ANSCHAULICHE DARSTELLUNG DER KRAFTKOMPONENTEN EINER QUERKRAFT-PMSM

D. Hülsmann

1 EINLEITUNG

Bei vielen Anwendungen in der elektrischen Antriebstechnik, die sich z. B. durch hohe Anforderungen an die Lebensdauer oder lange Wartungsintervalle auszeichnen, gelangt man bei konventioneller, mechanischer Lagertechnik rasch an Auslegungsgrenzen. Insbesondere bei sehr hohen Drehzahlen, Temperaturen oder Drücken – wie dies u. U. in Pumpen der Fall ist – werden verstärkt magnetische Lager eingesetzt [1].

Unter diesen soll im Folgenden die Variante der so genannten *Querkraftmaschine* (oder auch *Lagerloser Motor*) betrachtet werden. Die Grundidee besteht darin, dass die zur Stabilisierung der translatorischen Freiheitsgrade eines Rotors in der Ebene notwendigen Kräfte, sowie das Vortriebsmoment, aus *einer* Maschine hervorgehen (siehe **Bild 1**).



Bild 1: Schematische Darstellung des Prinzips *Querkraftmaschine*: a) Konventionelle Magnetlagertechnik, b) Querkraftmaschine

Mit einer derartigen Anordnung besteht die Möglichkeit, die Anzahl der Systemkomponenten sowie die Baulänge der Maschine zu reduzieren, was letztlich einer Kostensenkung gleichkommt.

Im weiteren Verlauf wird das Funktionsprinzip der Querkraftmaschine näher erläutert und eine analytische Kraft- und Drehmomentberechnung am Beispiel einer PMSM mit Vollpolcharakter vorgestellt [2], [3], [4]. Basierend darauf, soll mit Hilfe der komplexen Raumzeigertheorie das Stellen der Querkraft am Umfang der Maschine veranschaulicht werden (ein ähnlicher Ansatz dazu findet sich in [5], [6]).

2 FUNKTIONSPRINZIP DER QUERKRAFTMASCHINE

Die Lagerfunktion in einer Querkraftmaschine wird durch das Hinzufügen einer weiteren *symmetrischen* Drehstromwicklung im Ständer erreicht (im Folgenden *Tragsystem* genannt). Der ohnehin vorhandene Antriebsfluss – der zur Entstehung des Drehmomentes führt – ist so für die Querkraftausbildung nutzbar. An dieser Stelle sei bereits vorweggenommen, dass sich eine Querkraft am Umfang der Maschine lediglich bei

$$p_{tr} = p_a \pm 1 \tag{2.1}$$

einstellt. Darin bezeichnen p_{tr} und p_a die Polpaarzahl der 3-strängigen Trag- bzw. Antriebswicklung. Besondere Bedeutung bekommt dieses Ergebnis in Hinblick auf die elektromagnetischen Wechselwirkungen zwischen den beiden Wicklungssystemen. So ist, bezogen auf die vorhandenen Hauptflüsse in der Maschine, keine gegenseitige Beeinflussung möglich, sofern die Drehstromwicklung mit der kleineren Polpaarzahl als Durchmesserwicklung ausgeführt ist [7]. Da sich jedoch Leiter beider Wicklungen in einer Statornut befinden, kommt es auf Grund der stets vorhandenen Streuflüsse durchaus zu einer Kopplung.

2.1 Laterale Querkräfte und Drehmoment

Für das analytische Rechenmodell der Querkraft-PMSM bietet es sich an, ein vereinfachtes *Strombelagsmodell* einzuführen, bei dem die tatsächliche elektrische Strömung in den Nuten durch eine stetig über die Trennfläche (Eisen \rightarrow Luft) verteilte Strömung ersetzt wird. Zur Erläuterung der einzuführenden Größen dient das **Bild 2**.



Bild 2: Darstellung zum Strombelagsmodell (statorfeste Zylinderkoordinaten)

Wendet man auf den darin eingezeichneten Umlaufweg das Durchflutungsgesetz an und setzt voraus, dass die Beiträge zur magnetischen Umlaufspannung im Eisengebiet und an beiden senkrecht zur Trennfläche stehenden Strecken gegen Null gehen, so lässt sich folgende Gleichung aufstellen:

$$-H_{t}(\gamma,t) \cdot d\gamma = -A_{a}(\gamma,t) \cdot d\gamma - A_{tr}(\gamma,t) \cdot d\gamma$$

$$B_{t}(\gamma,t) = \mu_{0} \cdot (A_{a}(\gamma,t) + A_{tr}(\gamma,t))$$
(2.2)

mit:

 A_a : Strombelag der Antriebswicklung

 A_{tr} : Strombelag der Tragwicklung

H_t: Tangentiale Komponente der mag. Feldstärke

- B_t : Tangentiale Komponente der mag. Flussdichte
- γ : Mechanischer Umfangswinkel (statorfestes System)

Die Gl. (2.2) ist das Ergebnis einer eindimensionalen Feldbetrachtung. Dieses Vorgehen stellt streng gesehen einen Modellfehler dar, weil neben den tangentialen Feldanteilen in erster Linie normale (radiale) Komponenten des Feldes, hervorgerufen durch dieselbe elektrische Strömung in den Nuten, vorhanden sein werden. Hinsichtlich der Übersichtlichkeit des Modells ist aber dennoch an dieser Betrachtungsweise festzuhalten. Eine Modell-Verbesserung ließe sich mit Hilfe eines 2-D-Feldansatzes im Luftspalt in der Art von [8] erreichen.

Sowohl das sich drehende Polrad als auch die kontinuierliche Überlagerung der statorseitig erzeugten Wechselfelder lassen im Luftspalt der Maschine umlaufende Feldwellen entstehen. Diese lassen sich nach *Fourier* in einzelne harmonische Wellen unterschiedlicher Wellenlänge zerlegen, von denen im weiteren Verlauf lediglich die Grundwelle betrachtet wird. Durch die Einführung der beiden elektrischen Kreisfrequenzen ω_a und ω_t sowie der Nullphasenwinkel φ_a , φ_t und φ_m lassen sich folgende Feldanteile im Luftspalt bilanzieren:

$$B_{t,a}(\gamma,t) = \mu_0 \cdot \hat{A}_a \cdot \cos(p_a \cdot \gamma - \omega_a \cdot t - \varphi_a)$$
(2.3)

$$B_{t,tr}(\gamma,t) = \mu_0 \cdot \hat{A}_{tr} \cdot \cos(p_{tr} \cdot \gamma - \omega_{tr} \cdot t - \varphi_{tr})$$
(2.4)

$$B_{n,a}(\gamma,t) = \hat{B}_a \cdot \sin(p_a \cdot \gamma - \omega_a \cdot t - \varphi_a)$$
(2.5)

$$B_{n,tr}(\gamma,t) = \hat{B}_{tr} \cdot \sin(p_{tr} \cdot \gamma - \omega_{tr} \cdot t - \varphi_{tr})$$
(2.6)

$$B_{n,f}(\gamma,t) = \hat{B}_f \cdot \cos(p_a \cdot \gamma - p_2 \cdot 3 \cdot t - \varphi_m)$$
(2.7)

Die Indizes der physikalischen Größen der Gleichungen (2.3) bis (2.9) wurden so gewählt, dass n und t die normale bzw. tangentiale Feldkomponente meinen, a und tr deuten jeweils an, dass es sich um das Antriebs- bzw. Tragsystem handelt. Das Feld der Permanentmagnete (beschrieben durch Gl. (2.7)) wird hier als rein radial angenommen, was bei relativ kleinen Magnethöhen und Luftspaltlängen durchaus zulässig ist. Mit dieser gefundenen Darstellung der magnetischen Feldkomponenten ist es möglich, die Grenzflächenkräfte unter Zuhilfenahme des *Maxwellschen Spannungstensors* \mathbf{T}_{M} zu bestimmen. Allgemein gilt für ein Flächenelement in einem kartesischen Bezugskoordinatensystem der Zusammenhang:

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_M \cdot \mathbf{e}_n \tag{2.8}$$

Der Kraftdichtevektor \mathbf{f} lässt sich ebenfalls auf ein gekrümmtes Flächenelement des Zylinderkoordinatensystems in **Bild 3** übertragen.



Bild 3: Transformation der Flächenkraftdichten

Unter der Annahme, dass sich die z-Komponente der magnetischen Feldstärke zu Null ergibt, lässt sich schreiben:

$$\mathbf{f}_{q} = \begin{bmatrix} f_{n} \\ f_{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{\mu_{0}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} (B_{n}^{2} - B_{t}^{2}) \\ B_{n} \cdot B_{t} \end{bmatrix}$$
(2.9)

Wird weiterhin der Umfangswinkel γ und die Transformationsmatrix

$$\mathbf{T}_{pk} = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{bmatrix}$$
(2.10)

berücksichtigt, ist wiederum eine Darstellung des Vektorfeldes aus Gl. (2.9) in der x-y-Ebene mit

$$f(\gamma, t) = T_{pk} \cdot f_a(\gamma, t)$$
(2.11)

möglich. In Querkraftmaschinen wird im Allgemeinen keine magnetische Sättigung des Eisenkreises zugelassen, so dass von einer linearen Überlagerung der Felder in der Art

$$B_{n}(\gamma,t) = B_{n,a}(\gamma,t) + B_{n,tr}(\gamma,t) + B_{n,f}(\gamma,t)$$
(2.12)

$$B_t(\gamma, t) = B_{t,a}(\gamma, t) + B_{t,tr}(\gamma, t)$$
(2.13)

ausgegangen werden kann.

Aus den Gleichungen (2.11), (2.12) und (2.13), mit Berücksichtigung der Gleichungen (2.3) bis (2.7), sind nun die Zug- und Schubspannungen am Umfang zu berechnen.

2.1.1 Drehmoment

Zur Berechnung des Drehmomentes ist lediglich der tangentiale Kraftdichteanteil $f_t(\gamma, t)$ heranzuziehen. Aus der Integration über den Umfang erhält man für das Drehmoment M mit dem Radius der Statorbohrung r_a und der Blechpaketlänge l_{Fe} folgenden Ausdruck:

$$M = F_t \cdot r_a = r_a^2 \cdot l_{Fe} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f_t(\gamma, t) \cdot d\gamma$$
(2.14)

Mit den entsprechenden Gleichungen und der Bedingung $p_a, p_{tr} \in N$ ergibt sich nach Auswertung der Integrale:

$$M = r_a^2 \cdot l_{F_e} \cdot \pi \cdot \hat{B}_f \cdot \hat{A}_a \cdot \cos(\varphi_a - \varphi_m)$$

= $\tau_{p,a} \cdot p_a \cdot l_{F_e} \cdot r_a \cdot \hat{B}_f \cdot \hat{A}_a \cdot \cos(\varphi_a - \varphi_m)$ (2.15)

Es hat sich gezeigt, dass ein Drehmoment nur aus der Überlagerung von Feldwellen *gleicher* Wellenlänge entstehen kann. Diese Feststellung gilt natürlich auch bei der Betrachtung höherer Harmonischer und deren Einfluss auf das Drehmoment. Bei einer Winkeldifferenz von $\varphi_a - \varphi_m = k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ wird *M* maximal. Weiterhin ist zu erkennen, dass es zeitlich unabhängig ist.

2.1.2 Querkraft

Für die Beschreibung eines resultierenden Querkraftvektors im ebenen, statorfesten x-y-Koordinatensystem (siehe **Bild 3**) muss sowohl der tangentiale als auch der normale Kraftdichteanteil Berücksichtigung finden. In ähnlicher Weise, wie bei der Drehmomentberechnung, ist dieser aus einer Integration zu bestimmen.

Es gilt nunmehr der Ansatz:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix} = l_{Fe} \cdot r_a \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} \mathbf{f}(\gamma, t) \cdot d\gamma$$
(2.16)

Die Lösung der Integrale in Gl. (2.16) erfolgt sinnvollerweise für beide Kraftkomponenten separat. Mit den geeigneten Additionstheoremen für Winkelfunktionen können diese bestimmten Integrale jeweils in einzelne Summenterme umgewandelt werden. Nach Auswertung aller Terme zeigt sich, dass die Querkräfte in x- und y-Richtung in der Regel Null sind, außer in den beiden Fällen $p_{tr} = p_a + 1$ und $p_{tr} = p_a - 1$, was der anfänglichen Behauptung in Gl. (2.1) entspricht.

Dieses Ergebnis offenbart sich als Folge einer *Grenzwertbetrachtung* eben dieser beiden Fälle. Des Weiteren stellt sich für

$$\omega_{tr} = \omega_a \tag{2.17}$$

ein zeitlich unabhängiger Querkraftvektor F ein.

Das bedeutet, bei *gleicher* elektrischer Speisefrequenz der beiden Wicklungssysteme ist es relativ einfach möglich, einen Querkraftvektor mit konstanter Richtung zu generieren. Dieser würde z. B. zur Gewichtskraft-Kompensation in einer horizontal betriebenen Maschine benötigt (siehe **Bild 1**).

Mit der Annahme aus Gl. (2.17) ergeben sich dann endgültig die Komponenten der Kraft zu:

$$F_{x} = \frac{l_{Fe} \cdot r_{a} \cdot \pi}{2 \cdot \mu_{0}} \cdot \left[\left(\hat{B}_{tr} \cdot \hat{B}_{a} - \mu_{0}^{2} \cdot \hat{A}_{a} \cdot \hat{A}_{tr} - \mu_{0} \cdot \left(\hat{B}_{tr} \cdot \hat{A}_{a} - \hat{B}_{a} \cdot \hat{A}_{tr} \right) \right) \cdot \cos(\varphi_{tr} - \varphi_{a}) - \left(\hat{B}_{f} \cdot \left(\mu_{0} \cdot \hat{A}_{tr} + \hat{B}_{tr} \right) \right) \cdot \sin(\varphi_{tr} - \varphi_{m}) \right]$$

$$(2.18)$$

$$F_{y} = \frac{l_{Fe} \cdot r_{a} \cdot \pi}{142} \cdot \left[(\hat{B}_{4} \cdot \hat{A}_{4} - 4\mu_{4}^{2} \cdot \hat{A}_{a4} \cdot \hat{A}_{4} - 2\mu_{4}^{2} \cdot \hat{A}_{a4} \cdot \hat{A}_{a4} - 2\mu_{4}^{2} \cdot \hat{A}_{a4} - 2\mu$$

Auf eine Unterscheidung einzelner Terme in *Maxwell- und Lorentzkraftanteile*, wie es in den erwähnten Arbeiten zu diesem Thema geschieht, wird an dieser Stelle verzichtet. Die verwendete Modellvorstellung betrachtet ausschließlich magnetische Feldgrößen und deren Verhalten an Grenzflächen, daher sollte in konsistenter Weise allenfalls von *Maxwellkräften* die Rede sein.

3 DARSTELLUNG ALS KOMPLEXE RAUMZEIGER

Die Regelung umrichtergespeister PMSM erfolgt in der Regel im d-q-System. Wie aus Gl. (2.15) hervorgeht, ist M und, in Verbindung mit der mechanischen Drehzahl Ω , damit auch die Antriebsleistung vom benötigten Querkraftvektor unabhängig. Es erscheint daher zweckmäßig, eine gemeinsame Darstellung der relevanten Größen sowohl des Antriebs- als auch des Tragsystems in d-q-Koordinaten zu finden.

Zunächst wird der Strombelags- und Feldwelle der Gleichungen (2.3) bis (2.7) ein komplexer Raumzeiger in der Art

$$B(\gamma, t) = \operatorname{Re}\left\{\underline{\vec{B}} \cdot e^{-jp\cdot\gamma}\right\}$$
(3.1)

zugewiesen. Damit ergibt sich beispielsweise für $B_a(\gamma,t)$ der komplexe Raumzeiger:

$$\vec{\underline{B}}_{a} = \hat{B}_{a} \stackrel{i}{\underline{4}} e_{2}^{j\left(\varphi_{a} + \frac{\pi}{2}\right)} e^{j\omega_{a} \cdot t} \qquad (3.2)$$

Geht man auf gleiche Weise bei den übrigen Wellenfunktionen vor und berücksichtigt die Annahme *gleicher* elektrischer Speisefrequenz entsprechend der Gl. (2.17), so gelangt man zur Darstellung in **Bild 4**.



Bild 4: Transformation ins rotorfeste d-q-System

Da die Raumzeiger in jedem System für sich betrachtet (statorfeste Wicklungssysteme im oberen Teil von **Bild 4**), mit der gleichen elektrischen Kreisfrequenz ω_a umlaufen, wird durch Multiplikation mit $e^{-j\omega_a t}$ eine Transformation in das d-q-System vorgenommen. Der wesentliche Vorteil besteht nun darin, dass alle Zeiger – hier sind es jetzt die komplexen Amplituden – stillstehend und mit fester Phasenlage zueinander dargestellt werden können. Weiterhin ist aus **Bild 4** ersichtlich, dass die beiden Nullphasenwinkel φ_m und φ_a bereits einen definierten Wert besitzen, nämlich

$$\varphi_m = \varphi_a = 0. \tag{3.3}$$

Zu dieser Erkenntnis gelangt man, da zum einen $\underline{\hat{B}}_{f}$ per Definition der d-Achse zugeordnet ist und zum anderen im Sinne der feldorientierten Regelung (sowie in Einklang mit der Gl.

(2.15)) lediglich eine q-Stromkomponente ein maximales Drehmoment erzeugt. Unter Berücksichtigung der Gl. (3.3) erhält die Querkraftvektor-Gleichung somit folgende Struktur:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi_{tr}) & -\sin(\varphi_{tr}) \\ \sin(\varphi_{tr}) & 2 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \\$$

In Anlehnung an Gl. (2.10) stellt \mathbf{T}_q eine winkelabhängige Transformationsmatrix dar, die den Vektor \mathbf{F}_q für einen bestimmten Wert von φ_{tr} in das x-y-System transformiert. Den Betrag der Querkraft erhält man aus

$$\|\mathbf{F}_{q}\|_{2} = F = C \cdot \sqrt{D^{2} + E^{2}}.$$
 (3.5)

Offensichtlich verbleibt neben dem *lastpunktabhängigen* Querkraft-Betrag der Nullphasenwinkel φ_{tr} als Parameter für die Orientierung der Kraft am Umfang der Maschine.

3.1 Richtungsvorgabe der Querkraft

Das kontrollierte Stellen der Querkraft erfolgt i. Allg. über einen Regelkreis. Bei einer Abweichung aus der zentrischen Rotorposition wird an Hand der Sensordaten eine erforderliche Kraft mit dem Betrag *F* und dem Winkel γ errechnet². Die Richtung dieser Kraft kann nach Gl. (3.4) über den Bereich $0 \le \varphi_{tr} \le 2\pi$ vorgegeben werden. Um einen analytischen Zusammenhang zwischen γ und φ_{tr} zu finden, soll zunächst mit Hilfe sinnvoll gewählter Beispielwerte für C, D und E die Lage des Querkraftvektors am Umfang für $0 \le \varphi_{tr} \le 2\pi$ (Inkrement: $\pi/6$) veranschaulicht werden. Das Ergebnis dieser Berechnung zeigt **Bild 5**.

Für die Berechnung wurden die Werte aus Tabelle 1 zu Grunde gelegt.

l_{FE} / mm	<i>r_a</i> / mm	\hat{B}_f / T	\hat{B}_a / T	\hat{B}_{tr} / T	$\hat{A}_a / \frac{\mathrm{kA}}{\mathrm{m}}$	$\hat{A}_{tr} / \frac{\mathrm{kA}}{\mathrm{m}}$
106	71	0,65	0,09	0,02	7,4	2,8

Tabelle 1: Datenbasis für die Beispielrechnung

 $^{^{2}}$ F und γ wurden hier gegenüber F_{x} und F_{y} auf Grund der Anschaulichkeit bevorzugt.



Bild 5: Querkraftvektor am Maschinenumfang (Beispielrechnung)

In **Bild 5** markiert der bläulich eingefärbte Zeiger den Wert der Querkraft bei $\varphi_{tr} = 0^{\circ}$, die übrigen Zeiger folgen mit $\Delta \varphi_{tr} = 30^{\circ}$ im mathematisch positiven Sinn. Offenbar sind die Querkraft-Zeiger um einen bestimmten Winkel $\Delta \gamma$, im Vergleich zu $\varphi_{tr} = \gamma$, verschoben. Daher wird folgende Gleichung angesetzt:

$$\varphi_{tr} = \gamma + \Delta \gamma \tag{3.6}$$

Bei $\varphi_{tr} = 0^{\circ}$ geht \mathbf{T}_{q} in die Einheitsmatrix über und Gl. (3.6) wird zu

$$\varphi_{tr} = \gamma + \arctan\left(\frac{D}{E}\right). \tag{3.7}$$

Je nach Belastung der Maschine – hier bezogen auf den Antriebsteil – ändern sich die Werte für *D* und *E*, d. h. Betrag und Richtung der Querkraft sind für den individuellen Belastungsfall nicht konstant. Es ist daher notwendig, dem Querkraft-Regelkreis die einzelnen Werte der Fluss- und Stromgrößen bekannt zu machen. Dies kann entweder durch direkte Messung der Größen oder mittels eines geeigneten Rechenmodells geschehen. Lediglich im reinen Schwebezustand (ohne Antriebsmoment $\rightarrow D = 0$) sind φ_{tr} und γ in Phase.

4 ZUSAMMENFASSUNG

Es konnte durch die obigen Ausführungen gezeigt werden, dass eine konstante Querkraft über dem Umfang einer PMSM nur durch eine zusätzliche Statorwicklung entsteht. Für diese Wicklung gilt weiterhin:

- 1. Die Polpaarzahl muss sich um ± 1 von der vorhandenen Antriebswicklung unterscheiden.
- 2. Die Speisefrequenz entspricht der des Antriebes.

Das eingeführte Rechenmodell, das die Kräfte mittels eines einfachen Strombelagmodells in Verbindung mit einer eindimensionalen Feldberechung bestimmt, führt trotz seiner relativen Einfachheit zu brauchbaren Ergebnissen. Insbesondere die Kraftgleichungen (2.18) und (2.19) sind in vereinfachter Form zur Maschinenauslegung geeignet.

Bei Vergleichen mit entsprechenden Rechenmodellen auf Basis der *FE-Rechnung* ergaben sich sowohl für den Betrag als auch für die Richtung der Kraft (Vorgaben) Abweichungen vom analytischen Modell von < 5 %.

LITERATUR

- [1] G. Schweitzer, A. Traxler, H. Bleuler: *Magnetlager*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1. Auflage, 1993
- [2] D. Schröder: *Elektrische Antriebe Grundlagen*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2007
- [3] U. Bikle: *Die Auslegung lagerloser Induktionsmaschinen*, Dissertation, ETH Zürich, Nr. 13180, 1999
- [4] C. Redemann: *Auslegung, Simulation und Aufbau einer lagerlosen Spaltrohrpumpe*, Dissertation, ETH Zürich, Nr. 13736, 2000
- [5] J. Hugel: The Vector Method for Determination of Torque and Forces of the Lateral Force Motor,
 International Power Electronic Conference IPEC, Yokohama, 1995
- [6] R. Schöb: *Beiträge zur lagerlosen Asynchronmaschine*, Dissertation, ETH Zürich, Nr. 10417, 1993
- [7] T. Schmitz: Die Wechselwirkung zwischen Wicklungen verschiedener Polzahl, ETZ, 55(42), Oktober 1934
- [8] H. Mosebach: 2D-Modell zur analytischen Behandlung der permanentmagneterregten Flachmagnet-Synchronmaschine,
 TU Braunschweig, Institut für Elektrische Maschinen, Antriebe und Bahnen,
 Institutsbericht, November 2003