

ERMITTLUNG DER KLEMMENSINNUNGEN UND INDUKTIVITÄTEN MITTELS FE-RECHNUNG

H. Wöhl-Bruhn

1 EINLEITUNG

Die Vorhersage des Verhaltens einer elektrischen Maschine ist für eine Vielzahl von Varianten über analytische Gleichungen möglich. Spielen bei der Maschine nichtlineare Einflüsse eine nicht mehr zu vernachlässigende Rolle, gewinnt die Finite-Elemente-Rechnung (FE-Rechnung) eine besondere Bedeutung: Über Tabellen können die Materialeigenschaften abgelegt und somit die magnetische Belastung in der Auslegungsphase berücksichtigt werden. Für einige, z. B. hochausgenutzte Maschinen, ist diese Beachtung der nichtlinearen Eigenschaft des Eisens (Sättigung) sogar zwingend per FE-Rechnung erforderlich, sofern ein komplexer Magnetkreis mit hohen magnetischen Belastungen von Teilen des Eisenkreises weder homogen verteilt noch für verschiedene Betriebspunkte konstant ist.

2 SPANNUNGSSPEISUNG UND ALTERNATIVEN

Für eine möglichst realitätsgetreue Abbildung des Maschinenverhaltens kann eine Spannungsspeisung der Maschine vorgenommen werden. Wird sie eingesetzt, kann sich der Strom entsprechend der wirkenden Impedanzen des Systems einstellen. Bei der Modellierung von Permanentmagneten erfordert dies eine transiente Rechnung mit einem Lösungsintervall über die Drehung des Rotors von mindestens einer Polteilung. Die Kopplung von Feldberechnung mit konzentrierten Bauelementen erfordert die Lösung eines weiteren Freiheitsgrades in der Berechnung. Insbesondere bei nichtlinearen Berechnungen wird die Analyse einer Vielzahl von zu untersuchenden Arbeitspunkten und Rotor-/Translatorstellungen dadurch zeitaufwendig. Ferner ist die Kenntnis der (Gegen-)Induktivitäten für den Entwurfsgang von Interesse: Sie erlaubt ein größeres Verständnis des Maschinenverhaltens sowie eine gezielte Auslegung durch die geschickte Veränderung von induzierter Spannung oder der Induktivitäten in d-/q-Richtung des rotor- bzw. translatorfesten Koordinatensystems. Die Kopplung von Feldberechnung mit konzentrierten Bauelementen ist exemplarisch in **Bild 1** für eine Implementierung im Programm ANSYS[®] gezeigt.

Alternativ bietet sich eine statische Berechnung des Betriebsverhaltens mit Hilfe eingepprägter Ströme an. Bei diesem Ansatz geht man von einem bekannten Spektrum des Strangstromes aus, das der Wicklung im Zeitbereich eingepragt wird (auch verwandte Möglichkeiten, wie beispielsweise das Aufbringen eines Strombelags sind gemeint). Über den resultierenden magnetischen Zustand des Blechpakets sind die Induktivitäten der Maschine berechenbar. Sie ermöglichen das Lösen der Spannungsgleichungen der Stränge und damit die nachträgliche Berechnung der Klemmenspannung. Die allgemeine Spannungsgleichung (1) mit der

Widerstandsmatrix $\underline{\underline{R}}$ und dem Vektor des verketteten Flusses $\vec{\Psi}$ zeigt die Klemmenspannungen in Matrizenschreibweise ohne kapazitive Kopplungen.

$$\vec{u} = \underline{\underline{R}} \cdot \vec{i} + \frac{d\vec{\Psi}}{dt} \quad (1)$$

Die Spannungen der Stränge, welche an die Maschine zur Erzeugung des angenommenen Stromverlaufes angelegt werden müssten, sind mit ihr berechenbar. Wenngleich dieses Vorgehen nicht der Kausalität der physikalischen Zusammenhänge entspricht, erlaubt es die Berechnung über die kleinste Periodizität der Statorwicklung ohne die Implementierung konzentrierter Bauelemente sowie ohne eine harmonische oder transiente Berechnung.

In dem kommenden Abschnitt werden elementare Grundlagen des Ferromagnetismus zum Aufzeigen der Herausforderung von Induktivitätsberechnungen von Magnetkreisen mit nichtlinearen Eigenschaften erläutert. Anschließend wird auf mögliche Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Strangspannung bei eingprägten Strömen mit Hilfe unterschiedlich definierter Induktivitäten eingegangen.

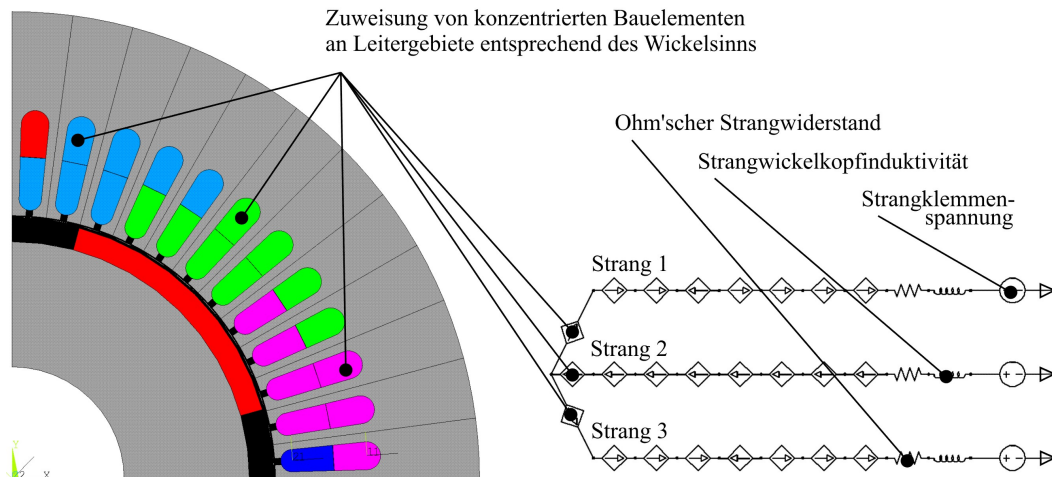


Bild 1: Spannungsspeisung einer Synchronmaschine mit dem Tool ANSYS[©]

3 RELATIVE PERMEABILITÄT

Ferromagnetische Materialien weisen Hysteresekurven auf, wie sie für einen weichmagnetischen Stoff in **Bild 2 a)** und für ein hartmagnetisches Material in **b)** gezeigt sind. Je nach Frequenz und Amplitude der Feldstärke, sowie deren magnetische Historie (Umlauf gekennzeichnet durch Pfeile), lassen sich für eine Feldstärke unterschiedliche Flussdichten zuordnen. Mit zunehmender Feldstärke setzen bei dem makroskopisch unmagnetisierten Stoff verschiedene Prozesse ein, die anhand der Neukurve mit **c)** erläutert werden können: Bei geringer Feldstärke setzen reversible Verschiebungen der Blochwände ein (Bereich I), die mit zunehmender Feldstärke irreversibel werden. Steigt die Feldstärke weiter an, klappen abrupt ganze Weiß'sche Bezirke um und richten sich in gleicher Richtung aus (II). Nach dem Ausrichten der Bereiche finden reversible Verdrehungen der Atome statt (III), ehe das Material vollends gesättigt ist (IV).

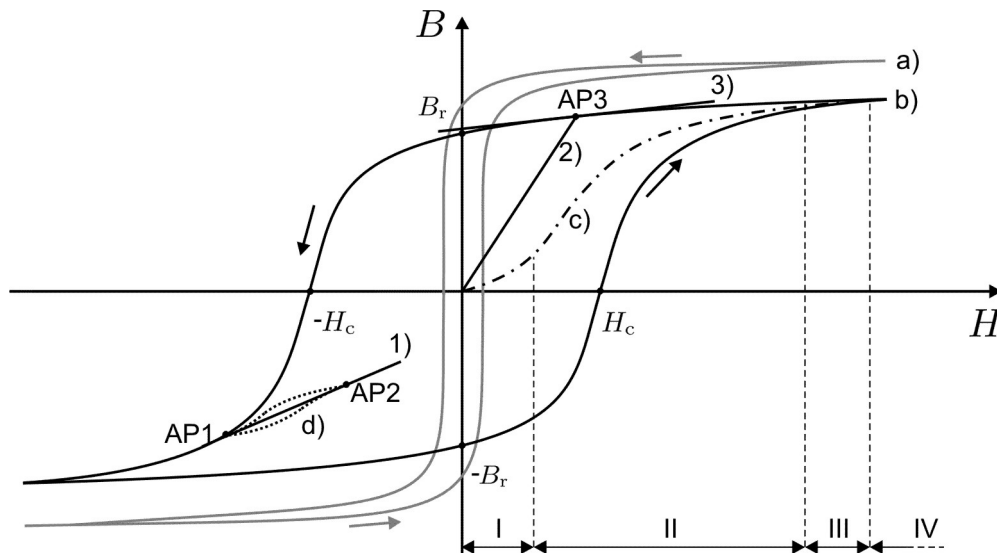


Bild 2: Hysteresekurven ferromagnetischer Materialien

Die Hysteresekurve eines Materials variiert stark: Wird beispielsweise das Material während einer Aufmagnetisierung ohne Erreichen der Sättigung mit fester Frequenz und kleiner Amplitude ummagnetisiert, kann sich eine lanzettenförmige Hysteresekurve, wie exemplarisch in d) gezeigt, ergeben. Sie liegt zwischen den Arbeitspunkten $AP1$ und $AP2$. Die Arbeitspunkte sind mit einer Geraden 1) verbunden, deren Steigung proportional zur *Übergangsp permeabilität* ist. Für sehr kleine Auslenkungen infolge des Wechselfelds wird diese auch als *reversible Permeabilität* bezeichnet. Hingegen werden die wirksamen Permeabilitäten in $AP3$ entsprechend der Geraden 2) als *totale Permeabilität* und der Tangente 3) als *differentielle Permeabilität* bezeichnet.

Je nach geometrischer Lage wirken unterschiedliche Permeabilitäten in den Teilbereichen des Blechs einer elektrischen Maschine, so dass keine generelle Zuordnung der für die Maschineninduktivität wirksamen Permeabilität vorgenommen werden kann. Für die Lösung der Spannungsgleichungen sind die "spannungsrichtigen" Permeabilitäten bzw. Induktivitäten gesucht, welche die Maschine hinreichend genau beschreiben.

4 LÖSUNG DER SPANNUNGSGLEICHUNG

Im Folgenden wird die Lösung der Spannungsgleichung mit Hilfe der totalen Permeabilität erläutert. Ausgangspunkt dafür ist die allgemeine Spannungsgleichung (1). Der verkettete Fluss entspricht hierbei einer Funktion insbesondere der Ströme, der Winkelstellung und der wirksamen Eigen- und Gegeninduktivitäten. Werden Induktivitäten zunächst ohne Berücksichtigung der Ableitung betrachtet, entspricht dies am ehesten unserem Verständnis eines konstanten, konzentrierten Bauelements in einem elektrischen Stromkreis, das beispielsweise den Stromanstieg bei Anlegen einer Spannung ($di/dt = u/L$) beschreibt. Aus diesem Grund soll für die folgenden Betrachtungen der Begriff *scheinbare Induktivität* eingeführt werden (apparent inductance). Die scheinbare Induktivität zwischen zwei Leiterschleifen n und m ist entsprechend Gleichung (2)

$$L_{nm}^{\text{app}} = L_{mn}^{\text{app}} = \frac{\Psi_{nm}}{i_m} = \frac{\Psi_{mn}}{i_n} \quad (2)$$

definiert, so dass für die allgemeine Spannungsgleichung der Flussvektor mit

$$\vec{\Psi} = \underline{\underline{L}}^{\text{app}} \cdot \vec{i} \quad (3)$$

beschrieben werden kann. Stellt man Gleichung (3) um und ersetzt den Stromvektor in der allgemeinen Spannungsgleichung, erhält man einen Ausdruck, bei dem der Fluss als Zustandsvariable gewählt wurde.

$$\dot{\vec{\Psi}} = - \left[\underline{\underline{R}} \cdot \{ \underline{\underline{L}}^{\text{app}} \}^{-1} \right] \cdot \vec{\Psi} + \vec{u} \quad (4)$$

Die Berechnung der zur Lösung notwendigen Induktivitäten kann über die Änderung der magnetischen Energie in Abhängigkeit allein von den Strömen des Systems erfolgen. Dazu erfolgt für einen zu betrachtenden Betriebspunkt die partielle Ableitung der Ströme für ein ν -strängiges System entsprechend

$$L_{nm}^{\text{app}} = \frac{\partial^2 W}{\partial i_n \partial i_m} \quad \text{für } n, m = 1, 2, 3, \dots, \nu. \quad (5)$$

Wie bereits erwähnt, ist für die Berechnung der scheinbaren Induktivität per FE-Rechnung zu beachten, dass die totale Permeabilität eines jeden Elements zu verwenden ist. Aufgrund der damit zusammenhängenden Linearisierung braucht nicht mehr zwischen magnetischer Energie und Koenergie unterschieden werden.

Der dargestellte Lösungsweg wird auch von Demerdash und Nehl in [1] und [2] vorgeschlagen und auf Grund der Wahl der Zustandsvariablen als Berechnung im *Flux Reference Frame* bezeichnet. Alternativ wird auf die Berechnung im *Current Reference Frame* hingewiesen, bei dem der rotatorische Anteil separat über den Fluss und weitere induzierte Spannungsanteile über die differentielle Induktivität der (feststehenden) Statorstränge gelöst werden.

5 FAZIT UND BERECHNUNGSERGEBNISSE

Charakteristisch für die Berechnungen im Flux Reference Frame ist die Überführung der Gleichungen in Zustandsgleichungen des Flusses. Sie erlauben die einheitliche Behandlung aller Flussquellen. Allerdings bedarf diese Herangehensweise somit der Modellierung eines Permanentmagneten mit Hilfe eines (fiktiven) Kantenstroms [3], dessen Darstellung insbesondere bei Magnetformen abweichend von einem Quader komplex sein kann. Die Berechnung im hier nicht näher erläuterten Current Reference Frame kann bei bewegten Permanentmagneten durch die Separierung schneller zur Berechnung der Klemmenspannung führen. Die Wahl des Weges der Berechnung bedarf folglich der Betrachtung des Systems. Dabei muss in jedem Fall die richtige Permeabilität bzw. Induktivität gewählt und bei sequentiellen Berechnungen für einen Betriebspunkt der Maschine auf einen unveränderten Sättigungszustand des Eisens geachtet werden.

Im Zuge der Berechnung von Synchronmaschinen mit hoch (z. T. dauerhaft) magnetisierten Blechabschnitten wurden diverse Berechnungen im Flux Reference Frame durchgeführt. Dazu gehörten Maschinen mit verteilter Wicklung und Einzelzahnwicklung, sowie unterschiedliche Magnetanordnungen auf bzw. im Rotorblech. Zur Kontrolle wurden für jeden Betriebspunkt mittlere Drehmomente über den Maxwell'schen Spannungstensor und über das Prinzip der virtuellen Verschiebung berechnet. Diese wurden mit dem Drehmoment des Betriebspunktes verglichen, welches sich aus Lösung der Spannungs- und Wirkleistungsgleichung abzüglich der ohmschen Verluste in den Strängen berechnet. Der Vergleich zeigt sehr geringe Abweichungen der Ergebnisse sowohl im Grunddrehzahl- als auch im Feldschwäcbereich der Maschine, so dass das vorgestellte Berechnungsverfahren als sehr unempfindlich bezeichnet werden kann.

LITERATUR

- [1] N. A. Demerdash, T. W. Nehl: *Electric Machinery Parameters and Torques by Current and Energy Perturbations from field computations - Part I: Theory and Formulation*,
IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, S. 1507-1513, 1999
- [2] N. A. Demerdash, T. W. Nehl: *Electric Machinery Parameters and Torques by Current and Energy Perturbations from field computations - Part II: Applications and Results*,
IEEE Transactions on Energy Conversion, Vol. 14, S. 1514-1522, 1999
- [3] H. Wöhl-Bruhn: *Synchronmaschinen mit Nutzung des Reluktanzeffekts*,
Jahresbericht des IMAB, TU Braunschweig, 2006