

WÄRMEQUELLENNETZ ZUR MODELLIERUNG TRANSIENTER ERWÄRMUNGSVORGÄNGE

H. Mosebach

1 AUFGABENSTELLUNG

Die Flexibilität moderner stromrichter gespeister elektrischer Antriebe erlaubt eine feinfühligere Anpassung der Antriebseigenschaften an die jeweiligen Erfordernisse der Last. Typisch sind daher stark variable Belastungsverhältnisse, die erheblich vom Dauerbetrieb (S1) abweichen können und nur in wenigen Fällen durch standardisierte Betriebsarten (S2-S10) erfassbar sind. Bei genügend kurzzeitiger Einwirkung und ausreichender Stromrichterleistung ist es möglich, den Antrieb mehr oder weniger deutlich zu überlasten. Um eine Überdimensionierung der Maschine zu vermeiden, ist es unumgänglich, die mit der wechselnden Last verbundenen transienten Erwärmungsvorgänge rechnerisch abzubilden.

Es existieren verschiedene kommerzielle numerische Programme (z. B. ANSYS), mit denen die gestellte Aufgabe gelöst werden kann. Die Modellierung ist aufwändig, aber grundsätzlich sehr detailliert möglich. Schwierigkeiten ergeben sich bei sehr dünnen Schichten, die entsprechend fein diskretisiert werden müssen. Die erforderlichen Rechenzeiten erscheinen dann häufig unangemessen hoch. Das Hauptproblem stellt aber die meist unzulängliche Datenlage dar. Es ist insgesamt in vielen Fällen attraktiver, die Berechnung mit einem deutlich einfacher zu bedienenden vereinfachten analytischen Verfahren durchzuführen.

2 TRANSIENTES WÄRMEQUELLENNETZ

Ein beispielhaftes Wärmequellennetz (WQN) ist in **Bild 1** dargestellt.

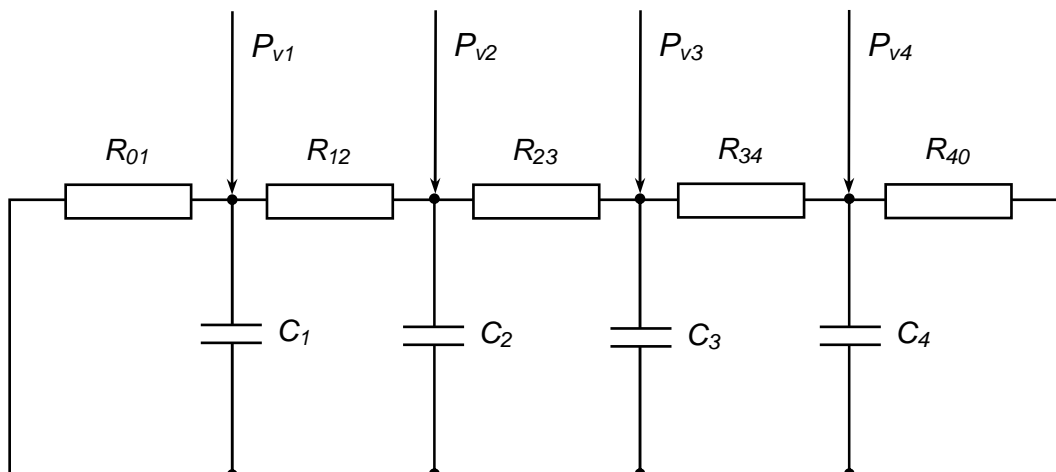


Bild 1: Beispielhaftes Wärmequellennetz für transiente Erwärmungsvorgänge

Das WQN nutzt die Analogie zwischen Wärmeströmen und elektrischen Strömen ([1]-[5]). Zur Behandlung transients Vorgänge besteht es allgemein aus Wärmewiderständen und Kapazitäten, die die Speicherfähigkeit darstellen. Es wird im Allgemeinen von zeitveränderlichen Strom- bzw. Verlustquellen gespeist. Die Temperaturen erscheinen als Knotenpunktsspannungen. Für die Größen des WQN gelten folgende Anmerkungen:

R_{ij} ... **Wärmewiderstände** [K/W], enthalten Anteile

$$\frac{l}{\lambda A} \quad (\text{Wärmeleitung im Inneren eines Körpers})$$

$$\frac{1}{\alpha A} \quad (\text{Wärmeübergang durch Konvektion an Außenflächen})$$

$$\frac{1}{\alpha_s A} \quad (\text{Wärmeübergang durch Strahlung an Außenflächen})$$

$C_i = \rho c V$... **Wärmekapazitäten** [Ws/K], mit

ρc volumenbezogene spez. Wärme [Ws/(m³K)]

V Volumen [m³]

P_{vi} ... **Verlustleistungen** [W], umfassen

$$\frac{\hat{S}^2 V}{2 \sigma} \quad (\text{Stromwärmeverluste})$$

$$m_{Fe} \rho_{v,Fe}(f) \hat{B}^2 \quad (\text{Eisenverluste}) .$$

3 ANALYTISCHE BEHANDLUNG

Das zur Lösung der Aufgabe erforderliche Gleichungssystem soll an Hand eines Elements des WQN von **Bild 1** aufgestellt werden. Wie in **Bild 2** gezeigt, stellt es eine T-förmige Struktur dar, die aus dem gesamten Netz herausgegriffen wurde. Die Wärmekapazität C_i wird von Verlusten "geladen" und steht über Widerstände mit den Nachbarelementen in Verbindung.

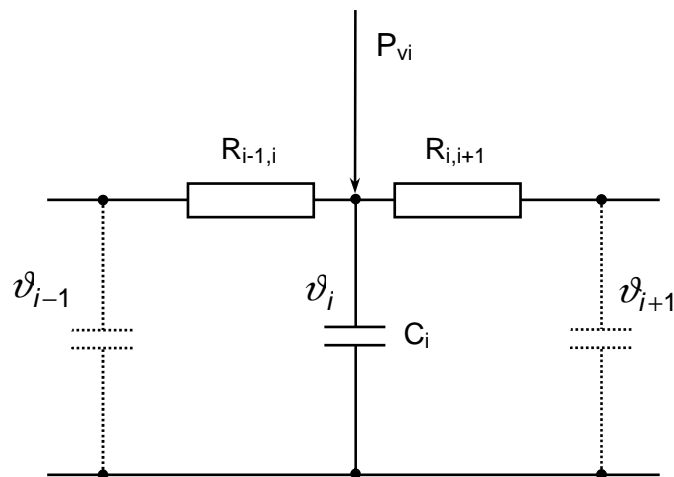


Bild 2: Allgemeines Element des WQN für transiente Vorgänge

Nach dem 1. Kirchhoffschen Gesetz (Stromsumme Null) erhält man die Gleichung

$$C_i \frac{d\vartheta_i}{dt} = P_{vi} - \frac{1}{R_{i-1,i}} (\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) - \frac{1}{R_{i,i+1}} (\vartheta_i - \vartheta_{i+1}) \quad (3.1)$$

Es ist zweckmäßig, Leitwerte

$$G_{i,j} = \frac{1}{R_{i,j}} \quad (3.2)$$

einzuführen und Gl.(3.1) entsprechend

$$C_i \frac{d\vartheta_i}{dt} = P_{vi} - G_{i-1,i} (\vartheta_i - \vartheta_{i-1}) - G_{i,i+1} (\vartheta_i - \vartheta_{i+1}) \quad (3.3)$$

umzuschreiben. Durch die Schreibweise

$$C_i \frac{d\vartheta_i}{dt} = P_{vi} + G_{i-1,i} \vartheta_{i-1} - (G_{i-1,i} + G_{i,i+1}) \vartheta_i + G_{i,i+1} \vartheta_{i+1} \quad (3.4)$$

wird die allgemeine Form des Gleichungssystems für das komplette WQN erkennbar:

$$\overline{C}_t \frac{d\overline{\vartheta}}{dt} = \overline{P}_v - \overline{G} \overline{\vartheta} \quad (3.5)$$

Bei Strukturen wie in **Bild 1** ist die Matrix \overline{G} eine Bandmatrix:

$$\overline{G} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{x} & \text{x} & & & & & \\ \hline \text{x} & \text{x} & \text{x} & & & & \\ \hline & \text{x} & \text{x} & \text{x} & & & \\ \hline & & \text{x} & \text{x} & \text{x} & & \\ \hline & & & \text{x} & \text{x} & \text{x} & \\ \hline & & & & \text{x} & \text{x} & \\ \hline \end{array} \quad (3.6)$$

Bei komplizierteren WQN mit Verzweigungen treten auch außerhalb des Hauptdiagonalbandes Elemente auf. Größere WQN, stark zeitveränderliche und womöglich temperaturabhängige Verluste und Materialdaten erfordern eine numerische Lösung des Gleichungssystems (3.5) mit einem Verfahren aus der Runge-Kutta-Familie. Bei entsprechender Modellierung ist die Methode als mitlaufendes Temperaturmodell zur betrieblichen Überwachung von Antriebssystemen geeignet.

4 BEISPIEL

Als Beispiel soll hier die transiente Erwärmung eines stromdurchflossenen Stabes dienen. Der Stab sei an seinen Längsseiten adiabat eingeschlossen, d. h. mit idealer thermischer Isolierung versehen. Die Kühlung erfolgt nur an den beiden Enden durch ein dort vorbeistreichendes Kühlmittel, **Bild 3**. Es ist zu erwarten, dass die Temperatur nach dem Einschalten des Stromes zunächst überall beinahe gleichförmig ansteigt. Danach sollte sich ein Maximum in Stabmitte ausbilden, wobei die Wärme nach beiden Seiten symmetrisch abfließt. Die stationäre Über-temperatur nach sehr langer Zeit kann analytisch exakt bestimmt werden. Sie beträgt nach [1]

$$\vartheta_\infty = \frac{\hat{S}^2 I_{ges}^2}{16 \sigma \lambda} \quad (4.1)$$

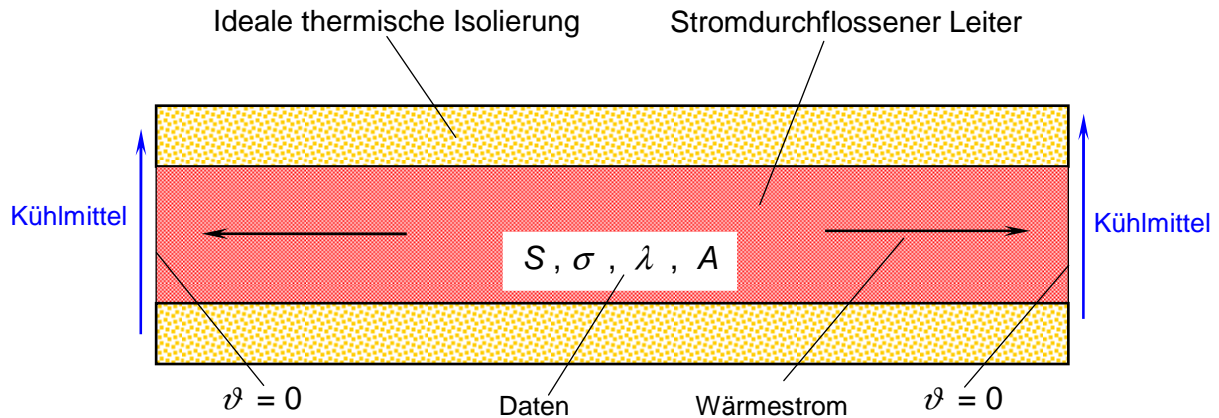


Bild 3: Erwärmung eines beidseitig gekühlten stromdurchflossenen Stabes

Die dem Beispiel zugrunde liegenden Daten sind in **Tabelle 4.1** zusammengestellt.

Tabelle 4.1: Zahlenbeispiel für transientes Wärmequellennetz

Größe	Zahlenwert / Beschreibung
Stablänge l_{ges}	400 mm
Leitmaterial	Kupfer
Zahl der Abschnitte n	7
Stromdichte \hat{S}	$10 \sqrt{2} \text{ A/mm}^2$
Einschaltdauer	900 s

Die Elemente R , C , P_v des WQN bei einer Stablänge l_{ges} und einer Unterteilung in n Abschnitte stellen sich nach den Anmerkungen in Kap. 2 wie folgt dar:

$$R = \frac{l_{ges}}{\lambda A n} \quad C = \frac{\rho c A l_{ges}}{n} \quad P_v = \frac{\hat{S}^2 A l_{ges}}{2 \sigma n} \quad (4.2 \text{ a,b,c})$$

Die Wärmewiderstände an den Enden sind abweichend von (4.2 a) zu ermitteln:

$$R_{0,1} = R_{n,0} = R / 2 \quad (4.3)$$

Die Symmetrie erlaubt eine Teilbarkeit des WQN in der Mitte, sofern n ungerade ist. Die Elemente an der Schnittstelle müssen allerdings geeignet modifiziert werden. Die Zahl der Differenzialgleichungen reduziert sich durch die Teilung von n auf $(n+1)/2$. Bei $n = 7$ wird dadurch direkt die Struktur wie in **Bild 1** erreicht.

Die in **Bild 4** und **Bild 5** dargestellten Kurven zeigen den zeitlichen Verlauf der Temperatur an verschiedenen Positionen bzw. die örtliche Abhängigkeit zu verschiedenen Zeiten. Die Ergebnisse sind physikalisch anschaulich und entsprechen den Erwartungen. Die Übereinstimmung mit der stationären Endtemperatur des Heißpunktes nach Gl.(4.1) ist ausgezeichnet. Durch die begrenzte Zahl der Abschnitte werden mit dem Modell geringfügig höhere Endtemperaturen berechnet, so dass man insofern auf der sicheren Seite liegt.

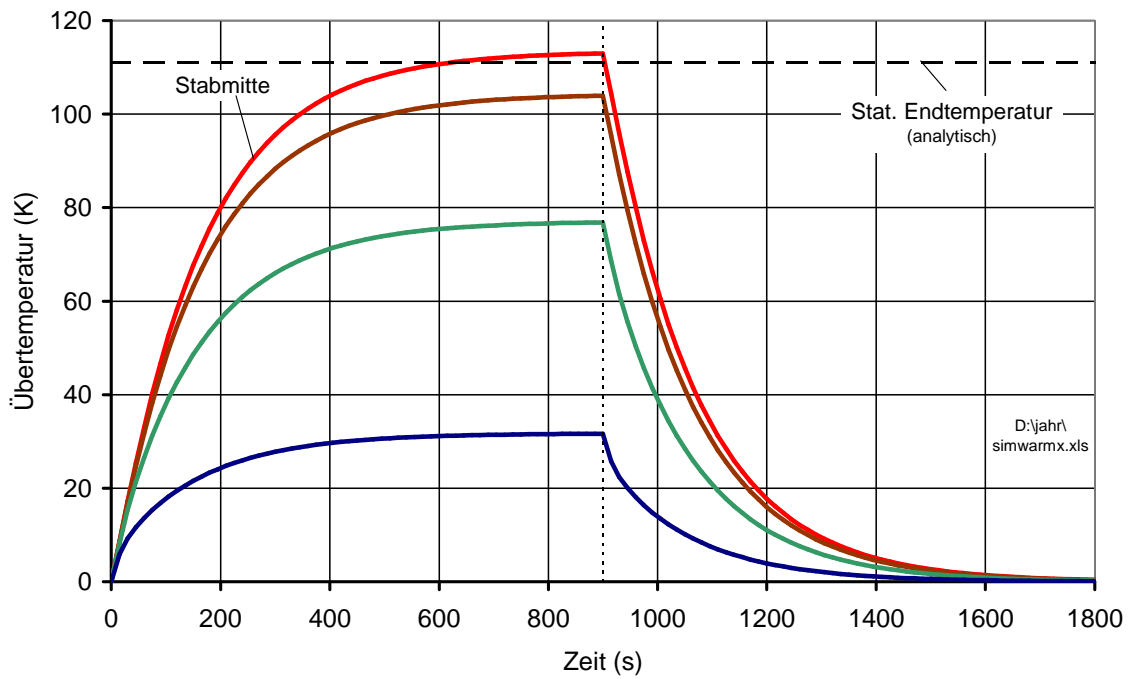


Bild 4: Transiente Erwärmungsvorgänge bei einem gekühlten stromdurchflossenen Stab (zeitliche Verteilung an verschiedenen Positionen)

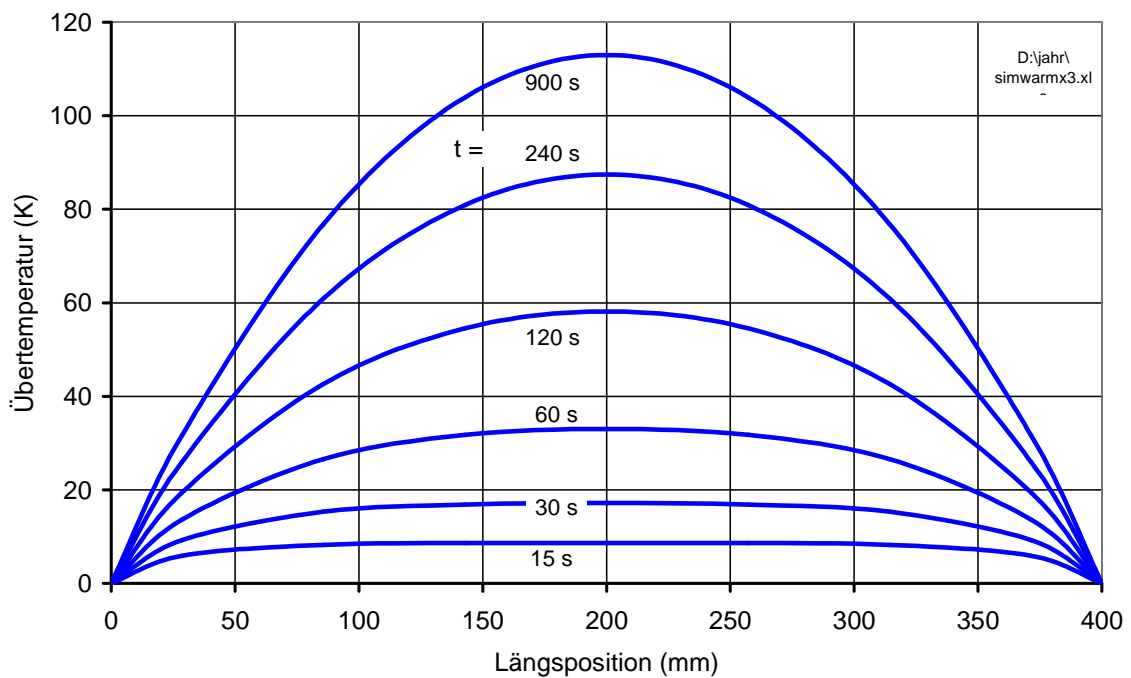


Bild 5: Transiente Erwärmungsvorgänge bei einem gekühlten stromdurchflossenen Stab (örtliche Verteilung zu verschiedenen Zeiten)

Die oberste Kurve in **Bild 4** bezieht sich auf den Heißpunkt in Stabmitte. Entsprechend der Aufteilung auf $n = 7$ Abschnitte sind die weiteren Kurven um je weitere $l_{ges}/7$ von der Stabmitte entfernt.

5 SCHLUSSBEMERKUNGEN

Die beschriebene Methode ist ein flexibles Berechnungsinstrument zur Behandlung transienter Erwärmungsvorgänge. Die Genauigkeit hängt neben der Feinheit der Modellierung vor allem von der Datenqualität ab. Die Methode ist nicht auf elektrische Maschinen beschränkt, sondern kann z. B. auch bei Halbleitern (wie in [2] für die transiente Erwärmung von Thyristoren geschehen) herangezogen werden.

Durch entsprechende Definition der Abschnitte ist es möglich, einem Wärmestrom über variable Querschnittsflächen A zu folgen (Beispiele sind: Verbreiterung beim Übergang Nut \rightarrow Blechpaket, Konzentration des Wärmestromes um ein im Joch eingebettetes Kühlrohr, radiale Zerlegung in ringförmige hohlzylindrische Teilschichten bei "dicken" Rohren bzw. Leitern, ...). Es gelingt auch zumindest angenähert, anisotrope Eigenschaften - wie unterschiedliche Wärmeleitfähigkeiten in x - und y -Richtung in Blechpaketen oder Wicklungen - darzustellen. Auf die Möglichkeit, auch die Temperaturabhängigkeiten von elektrischer und thermischer Leitfähigkeit wegen der numerischen Integration ohne weiteres berücksichtigen zu können, wurde bereits hingewiesen. Gegebenenfalls ist hierbei jedoch das Wiedemann-Franz-Gesetz zu beachten, nach dem $\sigma \cdot \lambda \approx \text{constant}$ gilt.

6 LITERATUR

- [1] E. Wiedemann, W. Kellenberger: "Konstruktion elektrischer Maschinen", Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1967
- [2] K. Heumann, C. Stumpe: "Thyristoren – Eigenschaften und Anwendungen", B. G. Teubner, Stuttgart, 1974, S. 21 ff
- [3] R. Richter: "Elektrische Maschinen", Bd. I, Verlag Birkhäuser, Basel, 1951, S. 312 ff
- [4] Gröber, Erk, U. Grigull: "Die Grundgesetze der Wärmeübertragung", Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1955
- [5] H. Herwig: "Wärmeübertragung A-Z", Springer, 1999