



# V09 Schwerependel und Schallwellen

## Zielsetzung des Versuchs

Die Charakterisierung periodischer Vorgänge mit Hilfe der Fourieranalyse wird am Beispiel eines physikalischen Pendels, zweier gekoppelter Pendel sowie Schallwellen demonstriert. Im Versuch werden die Frequenz und die Dämpfung eines anharmonischen Pendels bei verschiedenen Trägheitsmomenten und der Einfluss unterschiedlicher Kopplungsstärken auf die Eigenfrequenzen eines Doppelpendels untersucht. Zusätzlich werden Klänge auf ihr Frequenzspektrum hin analysiert.

## Themengebiete

### Grundgesetze der Mechanik

Newton'sche Mechanik – Erhaltungssätze – Bewegungsgleichungen – Rotationsbewegungen

### Mechanik des starren Körpers

Berechnung von Schwerpunkt und Trägheitsmoments eines Körpers – Satz von Steiner

### Schwingungen

ungedämpfte und gedämpfte freie Schwingung (Amplitude, Schwingungsdauer, Kreisfrequenz) – Einfluss der Dämpfung, Dämpfungsfaktor, logarithmisches Dekrement – Differentialgleichungen für harmonische Schwingungen (insbesondere für Drehschwingungen) und deren Lösungen – mathematisches und physikalisches Pendel – Anharmonische Schwingungen – Frequenzveränderung bei großer Amplitude – gekoppelte Pendel, Schwebungen – Fourieranalyse (Bedeutung für die Physik)

### Wellen:

Unterschied zur Schwingung – Schallwellen – Hör- und Sprachphysiologie

## Physikalische Grundlagen

Viele beobachtbare Vorgänge in der Natur haben einen periodischen Charakter, d.h. in zeitlichen und räumlichen Abständen treten immer wieder gleiche Zustände auf. Ein prominentes Beispiel eines schwingenden Systems ist der harmonische Oszillator.

## Der harmonische Oszillator

Ein System, das periodisch ablaufende Bewegungen durchführen kann, wird als Oszillator bezeichnet. Der einfachste und wichtigste Fall ist der freie, harmonische Oszillator. Die wesentlichen Idealisierungen bei diesem Konzept sind die Annahme einer Ruhelage, in die der Oszillator durch eine zur Auslenkung linearen Kraft stets zurückgeführt wird, sowie die Vernachlässigung aller Energieverluste. Eine Möglichkeit wäre ein Massenpunkt, welcher an einer Feder befestigt und sonst frei von Kräften ist. Die Feder wirkt nach dem Hooke'schen Gesetz linear der Auslenkung aus der Ruhelage entgegen:  $F = m \cdot a = -D \cdot \Delta x$ . Wird zusätzlich noch angenommen, dass die Ruhelage  $x_0 = 0$  ist, folgt  $\Delta x = x$  und somit nach Umstellen für die Bewegungsgleichung:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + D \cdot x = 0. \quad (1)$$

Unabhängig von dem speziellen Sachverhalt wird im Hinblick auf die Lösung  $\omega^2 = \frac{D}{m}$  gesetzt und es folgt die allgemeine Form:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0. \quad (2)$$

Erwartungsgemäß ist die Lösung des harmonischen Oszillators, die beispielsweise über einen komplexen Exponentialansatz bestimmt werden kann:

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t) = C \cdot \cos(\omega t + \Delta). \quad (3)$$

An den beiden Darstellungen der Lösung wird deutlich, dass die Summe von Sinus- und Kosinusfunktionen gleicher Frequenz wieder eine Kosinusfunktion (bzw. Sinusfunktion) gleicher Frequenz ergeben. Die zwei bei einer Differenzialgleichung zweiter Ordnung entstehenden Freiheitsgrade drücken sich in den Parametern  $A$  und  $B$  bzw.  $C$  und  $\Delta$  aus. Sie können über die Anfangsposition  $x(0)$  und -geschwindigkeit  $v(0)$  festgelegt werden. Alle Bewegungsgleichungen, die von Gleichung (2) abweichen, führen streng genommen zu anharmonischen Abläufen. Die Periodendauer  $T$  kann mithilfe der Kreisfrequenz  $\omega$  über  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  berechnet werden.

## Der gedämpfte harmonische Oszillator

Wird die Bewegung des harmonischen Oszillators durch eine Kraft gebremst, die proportional zur Geschwindigkeit ist, ergibt sich die Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dx}{dt} + \omega^2 \cdot x = 0. \quad (4)$$

Diese Gleichung und auch die Lösung unterscheiden sich von der des harmonischen Oszillators nur um einen Term, der die Dämpfung ausdrückt. Die Lösung lautet

$$x(t) = (A \cdot \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t)) \cdot e^{-\delta t} \quad (5)$$

$$\text{bzw. } x(t) = (C \cdot \sin(\omega t + \Delta)) \cdot e^{-\delta t}. \quad (6)$$

Dies ist eine exponentiell abklingende harmonische Schwingung.  $\delta$  heißt Abklingkonstante. Als weiteres Maß für die Dämpfung definiert man das logarithmische Dekrement  $\Lambda$  als

$$\Lambda = \ln \left( \frac{\Phi_k}{\Phi_{k+1}} \right) = \delta \cdot T. \quad (7)$$

Dabei ist  $\Phi_k$  die Größe des  $k$ . maximalen Ausschlags des Schwingers und  $\Phi_{k+1}$  die des darauffolgenden maximalen Ausschlags in derselben Auslenkungsrichtung. Dieser Zusammenhang lässt sich sehr anschaulich begründen. Als Veranschaulichung dient die Abbildung 1. Links ist die real ausgeführte Schwingung als durchgezogene

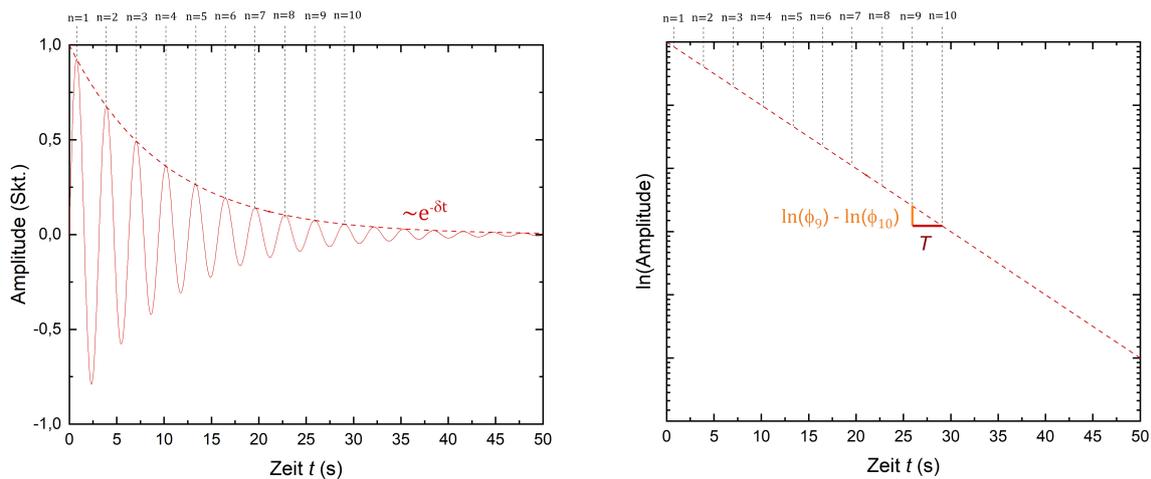


Abbildung 1: Veranschaulichung der Bedeutung des logarithmischen Dekrements zur Bestimmung der Dämpfungskonstante  $\delta$  aus der Höhe der abklingenden Amplituden einer gedämpften Schwingung.

Linie dargestellt. Die Exponentialfunktion, mit der die Amplitude abklingt, ist als gestrichelte Linie berücksichtigt. Die Bildung des natürlichen Logarithmus der abklingenden Amplituden führt demnach zur Entstehung einer Gerade mit der Steigung  $-\delta$  (rechts, gestrichelt). Über das Steigungsdreieck lässt sich einfach ablesen, dass die Differenzbildung zweier aufeinanderfolgender logarithmierter Amplituden  $\Phi_k$  und  $\Phi_{k+1}$  und die Division durch die Periodendauer  $T$  der Geradensteigung und damit  $-\delta$  entspricht. Um einen Mittelwert der Dämpfung über einen größeren Beobachtungszeitraum als eine Periode anzugeben, kann aus der Lösung der Differentialgleichung auch der Zusammenhang

$$\Lambda = \frac{1}{n} \cdot \ln \left( \frac{\Phi_k}{\Phi_{k+n}} \right) \quad (8)$$

hergeleitet werden. Dabei bezeichnen  $\phi_k$  und  $\phi_{k+n}$  zwei Maxima oder Minima in einem zeitlichen Abstand von  $n$  Periodendauern.

## Das mathematische Pendel

Stellt man sich einen Massenpunkt vor, der reibungsfrei an einem masselosen Faden aufgehängt ist und auf den lediglich die Schwerkraft wirkt, ist das Bild des mathematischen Pendels bereits vollständig. Mithilfe von Abbildung 2 lässt sich schnell einsehen, dass sich die einzige Kraftkomponente der Schwerkraft, die der Pendelbewegung entgegenwirkt, über  $m \cdot g \cdot \sin(\Phi)$  berechnen lässt. Wird noch mit Hilfe der Winkelbeschleunigung  $\alpha$  die Beschleunigung  $a = l \cdot \alpha = l \cdot \frac{d^2\Phi}{dt^2}$  ausgedrückt, so folgt insgesamt  $F = m \cdot a = m \cdot l \cdot \frac{d^2\Phi}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin(\Phi)$ . Nach Umstellen erhält man die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin(\Phi) = 0. \quad (9)$$

Um eine Lösung für diese Differentialgleichung zu erhalten, wird  $\sin(\Phi)$  in eine Taylor-Reihe um die Ruhelage  $\Phi = 0$  entwickelt. Bei kleinen Auslenkungen genügt es häufig, nur das erste Glied dieser Reihe zu berücksichtigen ( $\sin \Phi \approx \Phi$ ). Dies führt auf den Fall des harmonischen Oszillators. Eine genauere Lösung, die erste Abweichungen des Pendels vom harmonischen Oszillator berücksichtigt, erhält man durch Hinzufügen eines weiteren Terms der Taylor-Entwicklung

$$\sin \Phi \approx \Phi - \frac{1}{6} \cdot \Phi^3. \quad (10)$$

Die Bewegungsgleichung des anharmonischen Oszillators lautet dann

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \omega_0^2 \Phi - \frac{\omega_0^2}{6} \cdot \Phi^3 = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{l}. \quad (11)$$

Um für diese Differentialgleichung eine Näherungslösung zu erhalten, wird die Zeitachse zunächst so gewählt, dass gilt:  $\Phi(t = 0) = 0$ . Die Lösungsfunktion muss dann eine ungerade Funktion sein, d. h. bei einer Fourier-Entwicklung (s. unten) müssen die Koeffizienten der Kosinusreihe verschwinden, da der Kosinus eine gerade Funktion ist. Für eine Näherungslösung kann man sich dann auch in diesem Fall auf die ersten zwei Terme der Entwicklung beschränken und man erhält

$$\Phi(t) = \Phi_0 \sin(\omega t) + \epsilon \cdot \Phi_0 \sin(3\omega t) \quad (12)$$

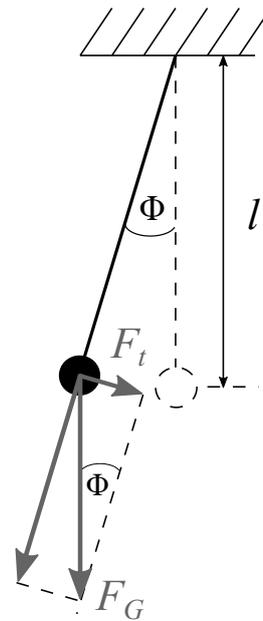


Abbildung 2: Das mathematische Pendel.

mit den Fourier-Koeffizienten:  $a_1 = \Phi_0$ ,  $a_2 = \epsilon \cdot \Phi_0$ . Unter Verwendung dieses Ansatzes lassen sich folgende Ausdrücke für die drei Summanden in der Gleichung (11) ableiten:

I. Summand

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = -\omega^2\Phi_0 \sin(\omega t) - 9\omega^2\epsilon\Phi_0 \sin(3\omega t) \quad (13)$$

II. Summand

$$\omega_0^2\Phi = +\omega_0^2\Phi_0 \sin(\omega t) + \omega_0^2\epsilon\Phi_0 \sin(3\omega t) \quad (14)$$

III. Summand

Bei Verwendung des Additionstheorems  $\sin(3\omega t) = 3\sin(\omega t) - 4\sin^3(\omega t)$  ergibt sich näherungsweise:

$$-\frac{1}{6}\omega_0^2\Phi^3 = -\frac{3\omega_0^2}{24} \cdot \Phi_0^3 \sin(\omega t) + \frac{\omega_0^2}{24} \cdot \Phi_0^3 \sin(3\omega t) - \frac{\omega_0^2}{2} \Phi_0^3 \epsilon \cdot \sin^2(\omega t) \cdot \sin(3\omega t) + \dots \quad (15)$$

Die Terme mit  $\epsilon^2$  und  $\epsilon^3$  lässt man unter der Annahme, dass  $\epsilon \ll 1$  ist, weg.

Die Gleichungen (13), (14) und (15) werden nun addiert. Die linke Seite ist nach Gleichung (11) Null. Wenn Gleichung (12) die Näherungslösung sein soll, müssen die Koeffizienten von  $\sin(\omega t)$  und  $\sin(3\omega t)$  jeweils für sich verschwinden. Für die Koeffizientensumme von  $\sin(\omega t)$  folgt also

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{3}{24}\omega_0^2\Phi_0^2 = 0 \quad (16)$$

oder

$$\omega^2 = \omega_0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{8} \cdot \Phi_0^2\right) \quad \text{bzw.} \quad \omega \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\Phi_0^2}{16}\right) \quad (17)$$

bei Verwendung der Näherungsformel  $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$ . Für  $\epsilon$  ergibt sich aus der Koeffizientensumme von  $\sin(3\omega t)$

$$-9\omega^2\epsilon + \omega_0^2\epsilon + \frac{\omega_0^2}{24} \cdot \Phi_0^2 = 0. \quad (18)$$

Setzt man näherungsweise  $\omega^2 \approx \omega_0^2$ , so folgt aus Gleichung (18)

$$\epsilon = \frac{\Phi_0^2}{192}. \quad (19)$$

Eine genauere Lösung bekommt man mit Hilfe des vollständigen elliptischen Integrals, das auch bei der Berechnung der Bogenlänge einer Ellipse auftritt. Hieraus erhält man für das mathematische Pendel die exakte Periodendauer über

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{d\Phi}{\sqrt{1+x(\Phi)}}. \quad (20)$$

Eine Näherung für  $\sqrt{1+x(\Phi)}$  liefert schließlich für die Periodendauer bei großen Auslenkungen

$$T \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\Phi_0}{2}\right)\right) = T_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \sin^2\left(\frac{\Phi_0}{2}\right)\right) \quad \text{mit} \quad T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (21)$$

Für kleine Anfangswinkel  $\Phi_0 \ll 1$  wird  $\sin^2(\frac{\Phi_0}{2})$  vernachlässigbar klein, sodass Gleichung (21) in die Periodendauer  $T_0$  der harmonischen Näherung übergeht. Die Abweichung wird maximal für einen Winkel von  $\Phi_0 = 180^\circ$  und beträgt dann 25 %.

## Das physikalische Pendel

Sobald es nicht mehr ausreicht einen Körper als Massenpunkt zu beschreiben, um seine Bewegungen vorherzusagen, muss die räumliche Ausdehnung des Körpers berücksichtigt werden. Dabei entstehen weitere Freiheitsgrade. Beim starren Körper, bei dem alle Massenelemente einen festen Abstand zueinander aufweisen, kommen drei Rotationsfreiheitsgrade hinzu. Bei einer festen Drehachse spricht man vom physikalischen Pendel. Abbildung 3 zeigt ein solches schematisch. Eine wichtige Größe dabei ist der Schwerpunkt des Pendels. Für Systeme von Massenpunkten bzw. kontinuierliche Massenverteilungen mit der Gesamtmasse  $M$  berechnet sich der Schwerpunkt  $\vec{r}_S$  über

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \sum_i \vec{r}_i \cdot m_i$$

bzw.

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int \vec{r}(m) \cdot dm. \quad (22)$$

Das Trägheitsmoment  $\Theta$ , also der Widerstand, den der Körper bezüglich einer Veränderung seiner Rotationsbewegung um eine bestimmte Drehachse aufweist, lässt sich über

$$\Theta = \int r^2 dm \quad (23)$$

berechnen. Dabei ist  $r$  der senkrechte Abstand zur Drehachse. Für ein physikalisches Pendel gilt nach dem Drehimpulssatz

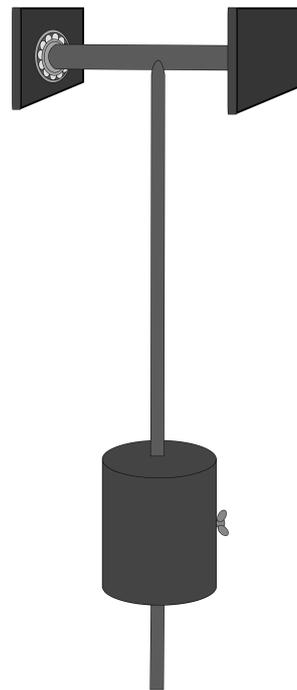


Abbildung 3: Schema eines physikalischen Pendels nach dem Vorbild des Versuchsaufbaus.

$$\Theta \cdot \frac{d^2\Phi}{dt^2} + M \cdot g \cdot s \cdot \sin(\Phi) = 0, \quad (24)$$

wobei  $s$  der Abstand zwischen Drehpunkt und Schwerpunkt ist. Daraus folgt für kleine Winkel

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} + \frac{M \cdot g \cdot s}{\Theta} \cdot \Phi = 0 \quad (25)$$

und hieraus die Eigenkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot s}{\Theta}}. \quad (26)$$

## Gekoppelte Pendel

Zwei durch beispielsweise eine Feder verbundene Pendel (hier: gleiche Länge  $l$ , gleiche Masse  $m$ ) heißen *gekoppelte Pendel*. Für ein solches System erhält man aus den Bewegungsgleichungen (für kleine Winkel) ein zweidimensionales System von gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\Theta \cdot \frac{d^2\phi_1}{dt^2} + D_g \cdot \phi_1 - D_f(\phi_2 - \phi_1) = 0 \quad (27)$$

$$\Theta \cdot \frac{d^2\phi_2}{dt^2} + D_g \cdot \phi_2 + D_f(\phi_2 - \phi_1) = 0. \quad (28)$$

Hierbei sind  $\phi_1, \phi_2$  die Winkelausschläge der beiden Pendel,  $\Theta$  deren Trägheitsmoment,  $l$  und  $m$  deren Länge und Masse,  $g$  ist die Erdbeschleunigung.  $D_g = m \cdot g \cdot l$  ist das rücktreibende Moment infolge der Schwerkraft. Der Ausdruck  $D_f(\phi_2 - \phi_1)$  ist das durch die Kopplungsfeder hervorgerufene Drehmoment. Bis auf den letzten Term sind die Gleichungen damit identisch zu der Bewegungsgleichung des physikalischen Pendels in Gleichung (25). Werden die beiden Gleichungen addiert bzw. subtrahiert, ergeben sich zwei ungekoppelte Differentialgleichungen für die Winkelsumme ( $\phi_2 + \phi_1$ ) bzw. -differenz ( $\phi_2 - \phi_1$ ):

$$\Theta \cdot \frac{d^2(\phi_2 + \phi_1)}{dt^2} = -(m \cdot g \cdot l) \cdot (\phi_2 + \phi_1) \quad (29)$$

$$\Theta \cdot \frac{d^2(\phi_2 - \phi_1)}{dt^2} = -(m \cdot g \cdot l + 2 \cdot D_f) \cdot (\phi_2 - \phi_1). \quad (30)$$

Beide Gleichungen stellen harmonische Oszillatoren da, sodass für die Lösungen gilt

$$(\phi_2 + \phi_1) = 2A \cdot \cos(\omega t + \delta) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{mgl}{\Theta}} \quad (31)$$

$$(\phi_2 - \phi_1) = 2B \cdot \cos(\Omega t + \Delta) \quad \text{mit} \quad \Omega = \sqrt{\frac{mgl + 2D_f}{\Theta}}. \quad (32)$$

Werden die Lösungen nun wieder addiert bzw. subtrahiert und anschließend durch 2 dividiert, so folgen daraus

$$\phi_1 = A \cos(\omega t + \delta) - B \cos(\Omega t + \Delta) \quad (33)$$

$$\phi_2 = A \cos(\omega t + \delta) + B \cos(\Omega t + \Delta), \quad (34)$$

wobei  $\omega$  der Eigenkreisfrequenz des Pendels im ungekoppelten Fall entspricht.  $\Omega$  ist die durch das Kopplungsdrehmoment  $D_f$  veränderte Frequenz. Die vier noch freien Parameter ( $A$ ,  $B$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$ ) werden durch die Wahl der Anfangsbedingungen ( $\phi_1(t=0)$ ,  $\phi_2(t=0)$ ,  $\dot{\phi}_1(t=0)$ ,  $\dot{\phi}_2(t=0)$ ) festgelegt. Für das Schwingverhalten des gekoppelten Pendels unterscheidet man drei einfachere Fälle:

- (a) Beide Pendel werden bei  $t=0$  von der Lage  $\phi_1 = \phi_2 = \Phi$  losgelassen. Dann sind die Anfangsbedingungen:

$$\phi_1(t=0) = \Phi, \phi_2(t=0) = \Phi, \dot{\phi}_1(t=0) = 0, \dot{\phi}_2(t=0) = 0.$$

Daraus ergibt sich als Lösung:  $\phi_1 = \phi_2 = \Phi \cos \omega t$ .

- (b) Beide Pendel werden bei  $t=0$  von der Lage  $\phi_1 = \Phi, \phi_2 = -\Phi$  losgelassen. Hier sind die Anfangsbedingungen:

$$\phi_1(t=0) = \Phi, \phi_2(t=0) = -\Phi, \dot{\phi}_1(t=0) = 0, \dot{\phi}_2(t=0) = 0.$$

Die Lösung lautet:  $-\phi_1(t) = \phi_2 = \Phi \cos \Omega t$ .

Diese beiden Fälle werden als *Fundamentalschwingungen* bezeichnet.

- (c) Pendel 2 wird in die Lage  $\Phi$  ausgelenkt und Pendel 1 in der Nulllage belassen. Dann lauten die Anfangsbedingungen:

$$\phi_1(t=0) = 0, \phi_2(t=0) = \Phi, \dot{\phi}_1(t=0) = 0, \dot{\phi}_2(t=0) = 0.$$

Die Lösung lautet:  $\phi_1 = \Phi/2 \cdot (\cos \omega t - \cos \Omega t)$ ,  $\phi_2 = \Phi/2 \cdot (\cos \omega t + \cos \Omega t)$

Schreibt man diese mit Hilfe von Additionstheoremen um, so folgt

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \Phi \sin\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right) \cdot \sin\left(\frac{\Omega - \omega}{2} t\right) \\ \phi_2 &= \Phi \cos\left(\frac{\omega + \Omega}{2} t\right) \cdot \cos\left(\frac{\Omega - \omega}{2} t\right). \end{aligned}$$

Ist die Kopplung schwach, d. h. das Kopplungsmoment klein ( $D_f \ll D_g$ ), dann ist  $(\Omega - \omega)$  auch klein gegenüber  $(\Omega + \omega)$ . Damit kann die Bewegung der Pendel aufgefasst werden als eine Schwingung der Frequenz  $(\Omega + \omega)$ , deren Amplitude sich langsam mit der Frequenz  $(\Omega - \omega)$  ändert. Diese Art der Schwingung wird als *Schwebung* bezeichnet. Der Kopplungsgrad  $k$  beider Pendel ist definiert als das Verhältnis

$$k = \frac{D_f}{D_g + D_f} = \frac{D_f}{m \cdot g \cdot l + D_f}. \quad (35)$$

Alle genannten Spezialfälle sind bzw. die Herstellung der Anfangsbedingungen ist in Abbildung ?? visualisiert. Entsprechen die Anfangsbedingungen keinem der genannten Spezialfälle, so treten ebenfalls Schwebungen auf, nur ist die mathematische Behandlung dann schwieriger.

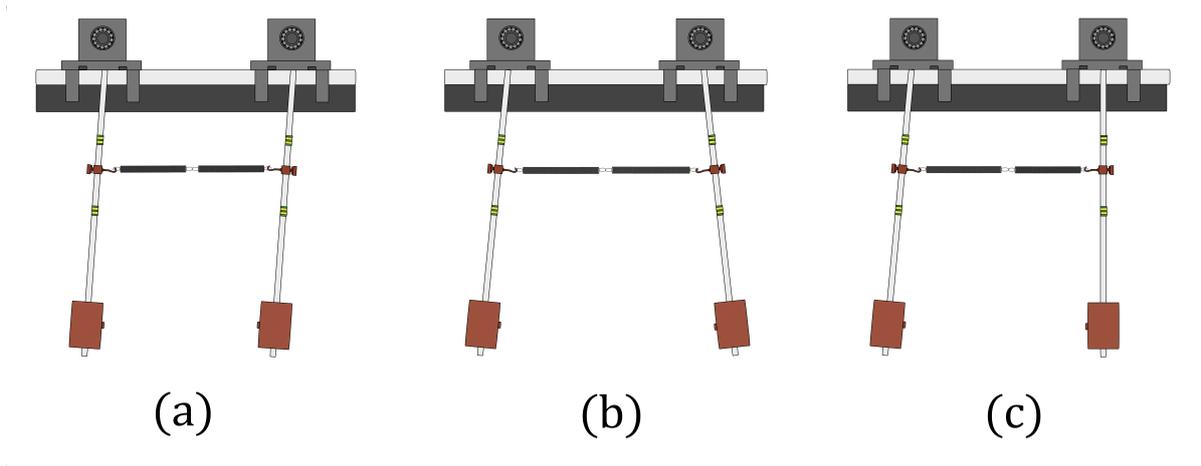


Abbildung 4: Spezialfälle des Schwingverhaltens gekoppelter Pendel: (a) und (b) werden als Fundamentalschwingungen bezeichnet, bei Fall (c) wird von einer Schwebung gesprochen.

??

## Wellentheorie

Werden mehrere Oszillatoren miteinander gekoppelt, kann sich die Auslenkung eines Pendels auf die anderen übertragen, sodass es dann nicht nur eine Schwingung gibt, sondern gleich mehrere. Die sich so ausbreitende kinetische Energie wird als mechanische Welle bezeichnet. Der Zustand dieser Welle hängt somit nicht nur von der Zeit, sondern auch vom Ort ab. Bei mechanischen Wellen handelt es sich immer um schwingende Massen, weshalb sie ein Medium benötigen. Ein alltägliches Beispiel ist Schall in der Erdatmosphäre, bei dem es sich um eine longitudinale Welle handelt. Viele Formen der Energieausbreitung können als Welle beschrieben werden, so auch das Licht, das eine elektromagnetische Welle ist. Der mathematische Formalismus ist jedoch für alle Wellen gleich und wird durch die Wellengleichung

$$\Delta \vec{r}(x, y, z, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{r}(x, y, z, t)}{\partial t^2} \quad (36)$$

beschrieben. Dabei ist  $\vec{r}(x, y, z, t)$  die Auslenkung (in beliebige Richtung),  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  der Laplace-Operator und  $v$  die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Jede Funktion  $\vec{r}(x, y, z, t)$ , die von Ort und Zeit abhängt und diese Gleichung erfüllt, beschreibt somit eine Welle.

## Fourieranalyse

### Fourierreihe

Jedes periodische Signal kann *eindeutig* in eine Reihe orthogonaler Funktionen entwickelt werden (verallgemeinerte Fourierreihe). Eine besondere Stellung unter diesen

Funktionen haben  $\sin(n\omega t)$  und  $\cos(m\omega t)$ , da sie zusammen mit einer Konstanten ein Orthonormalsystem bilden. So lässt sich jede periodische Funktion der Zeit  $f(t)$  in eine Reihe der Form

$$f(t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin(n\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cdot \cos(m\omega t) \quad (37)$$

oder auch

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot \sin(n\omega t + \epsilon_n) \quad (38)$$

entwickeln. Diese Reihe wird „Fourierreihe“ genannt. Die einzelnen Komponenten der Reihe heißen

$$\begin{aligned} n = 0 & : \text{arithmetischer Mittelwert} \\ n = 1 & : \text{Grundschwingung} \\ & \vdots \\ n = k & : (k - 1). \text{ Oberschwingung} \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $a_n, b_m$  und  $c_n$  geben dabei den Anteil der  $n - 1$ -ten bzw.  $m - 1$ -ten Oberwelle zur Funktion  $f(t)$  an. Im Allgemeinen geht der Beitrag der Oberwellen für wachsende  $n$  gegen Null, sodass man in praxi meist nur endlich viele Glieder zu berücksichtigen braucht. Die Form des periodischen Signals wird durch das Verhältnis der Amplituden der  $a_n, b_m$  von Sinus- und Kosinusreihe bestimmt.

## Fourierintegral

Ist die Funktion  $f(t)$  *nicht periodisch* und unendlich, sondern geht z. B. für  $t \rightarrow \infty$  gegen Null (*Dämpfung*), dann reichen in der Reihenentwicklung abzählbar viele Glieder nicht mehr aus. Man muss zur kontinuierlichen Darstellung, d. h. zum Integral übergehen. Hier ist es nun üblich, nicht für Sinus und Kosinus getrennte Integrale zu benutzen, sondern (nach der Euler'schen Beziehung) mit der Exponentialfunktion zu rechnen, wobei

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \cdot e^{i\omega t} \cdot d\omega \quad (39)$$

gilt. Dieses Integral heißt *Fourierintegral*. Man kann zeigen, dass die Funktionen  $f(t)$  und  $F(\omega)$  *umkehrbar eindeutig*, d. h. *eineindeutig* miteinander zusammenhängen. Es gilt weiterhin

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \cdot dt. \quad (40)$$

Dieser Zusammenhang zwischen  $f(t)$  und  $F(\omega)$  gilt für beliebige Funktionen, die einige Voraussetzungen bezüglich Stetigkeit erfüllen müssen und ist bekannt unter dem Namen „Fouriertransformation“.  $F(\omega)$  heißt (*Frequenz-*)*Spektrum* von  $f(t)$ . Die Fouriertransformation erlaubt, Funktionen der Zeit eineindeutig in Funktionen der Frequenz bzw. Funktionen des Ort eineindeutig in Funktionen des Impulses abzubilden,

wo manche mathematische Operationen leichter durchzuführen sind. Es lassen sich z. B. Differentiationen in einfache Multiplikationen überführen. Die Fouriertransformation hat erhebliche Bedeutung in allen Gebieten der Physik. Das Integral in Gleichung (40) hat weiterhin den Vorteil, dass es schnell mit Hilfe von Computern berechenbar ist, wenn man für die Anzahl der Messwerte eine Potenz  $2^n$  benutzt. Das dann anwendbare Verfahren der diskreten Fourier-Transformation heißt „Fast Fourier Transform“ (FFT). Das Ergebnis einer Transformation von  $f(t)$  mit  $2^n$  Messwerten ist ein Spektrum  $F(\omega)$  mit ebenfalls  $2^n$  Stützstellen. Dies lässt sich wieder in ein Amplituden- und ein Phasenspektrum bzw. in ein Kosinus- und ein Sinusspektrum (= Real- und Imaginärteil) mit jeweils  $2^{n-1}$  Stützstellen zerlegen. Die Synthese der Ausgangsfunktion gelingt nur, wenn sowohl Amplituden- als auch Phasenspektrum (oder sowohl Real- als auch Imaginärteil) berücksichtigt werden. Der Beitrag eines Frequenzintervalls  $\delta\omega$  zum Signal wird aber bereits durch die Amplitude  $A(\omega)$  wiedergegeben.

### Abtasttheorem

Für den Zusammenhang zwischen Zeit- und Frequenzskala gilt

$$n \cdot \delta t \cdot \delta \nu = 1. \quad (41)$$

Hierbei ist  $\delta t$  das Zeitintervall zweier benachbarter Messpunkte und  $\delta \nu$  das Frequenzintervall zweier benachbarter Stützstellen des Spektrums  $F(\nu)$ . Aus dieser Gleichung folgen unmittelbar zwei wichtige Eigenschaften der Fourier-Transformation:

1. Je größer  $n \cdot \delta t (= t_{\text{ges}})$ , desto kleiner ist  $\delta \nu$ , d. h. umso feiner ist die Auflösung im Spektrum.
2. Je kleiner  $\delta t$ , desto größer ist  $n \cdot \delta \nu$ , d. h. die Gesamtlänge des Spektrums.

Weitere Einzelheiten über die Fouriertransformation-Algorithmen, welche hier jedoch nicht vorausgesetzt werden, entnehme man der einschlägigen Spezialliteratur (zum Beispiel O. E. Brigham, *The Fast Fourier Transform*).

### Menschliche Physiologie

Der Mensch verfügt über Organe, mit denen er Schall erzeugen und wahrnehmen kann. Zur gezielten Erzeugung von komplexen Klängen wie der gesprochenen Sprache spielen mehrere Organe zusammen. Der wichtigste Teil ist die spaltförmige Stimmritze, die von den Stimmbändern umschlossen wird. Diese fungieren als schwingende Membranen, die die Luft in geradezu harmonische Schwingungen versetzen. Die Klangfarbe wird erst durch oberhalb liegende Resonanzräume, Rachen, Nasenhöhle und insbesondere Mundstellung bestimmt. Mit einem weiten Frequenzbereich von 100 Hz bis 10000 Hz ist die menschliche Stimme jedem Musikinstrument überlegen. Die Wahrnehmung des Schalls wird im Ohr auf zwei Weisen realisiert. Einerseits gibt es die Luftleitung, bei der der Schall über Gehörgang und Trommelfell im Mittelohr auf das Gehörknöchelchen läuft und von da aus letztlich zum Innenohr, wo die Perilymphe zu Schwingungen

angeregt wird. Diese wird dann in Aktionspotentiale umgewandelt werden, um über das zentrale Nervensystem (ZNS) transportiert zu werden. Die Eigenfrequenz dieser Luftleitung liegt bei 1 Hz bis 3000 Hz, was somit dem empfindlichsten Bereich angibt. Bei der Knochenleitung werden Schwingungen des Schädelknochens zu den Sinneszellen des Cortischen Organs weitergeleitet, wo sie dann in elektrische Signale für das ZNS umgewandelt werden. Insgesamt liegen die hörbaren Frequenzen zwischen 20 Hz und 20000 Hz, was natürlich individuell sehr verschieden sein kann. Mit dem Alter sinkt die Obergrenze, so dass 50-Jährige im Mittel maximal nur noch etwa 12000 Hz wahrnehmen können.

## Vorbereitende Aufgabe

Bestimmen Sie in Vorbereitung auf Versuchsteil 1, wo sich der Schwerpunkt des großen Pendels in Abhängigkeit vom Abstand des Gewichts zur Drehachse  $s$  befindet. Nehmen Sie an, dass sich das System aus Stange und Gewicht zusammensetzt (siehe Abbildung 3). Diskutieren Sie das Ergebnis mit Ihrer betreuenden Person im Kolloquium.

Zeigen Sie außerdem, dass das Trägheitsmoment des großen Pendels in Abhängigkeit vom Abstand des Gewichts von der Drehachse  $s$  über die Relation

$$\begin{aligned}\theta_{\text{Pendel}} &= \theta_{\text{Pendelstange}} + \theta_{\text{Pendelgewicht}} \\ &= \frac{r^2 + R^2}{4}M + \frac{1}{12}Mh^2 + Ms^2 + \frac{1}{3}ml^2\end{aligned}\quad (42)$$

gegeben ist.  $R$  ist der Radius des zylinderförmigen Pendelgewichts mit dem Durchmesser  $D = 2R$ ,  $r$  der Stangenradius,  $d = 2r$  der Stangendurchmesser,  $h$  die Höhe des Gewichts,  $l$  die Länge der Pendelstange,  $M$  die Masse des Gewichts und  $m$  die Masse der Pendelstange.

## Versuchsaufbau

Der Versuch ist in drei Teilversuche untergliedert. Für alle Versuchsteile erfolgt die Messdatenaufnahme und -auswertung computergestützt. Der hierfür zur Verfügung stehende Versuchsaufbau ist in Abbildung 5 mit beschrifteten Komponenten dargestellt. Für den ersten Teilversuch wird ein großes anharmonisches (physikalisches) Pendel

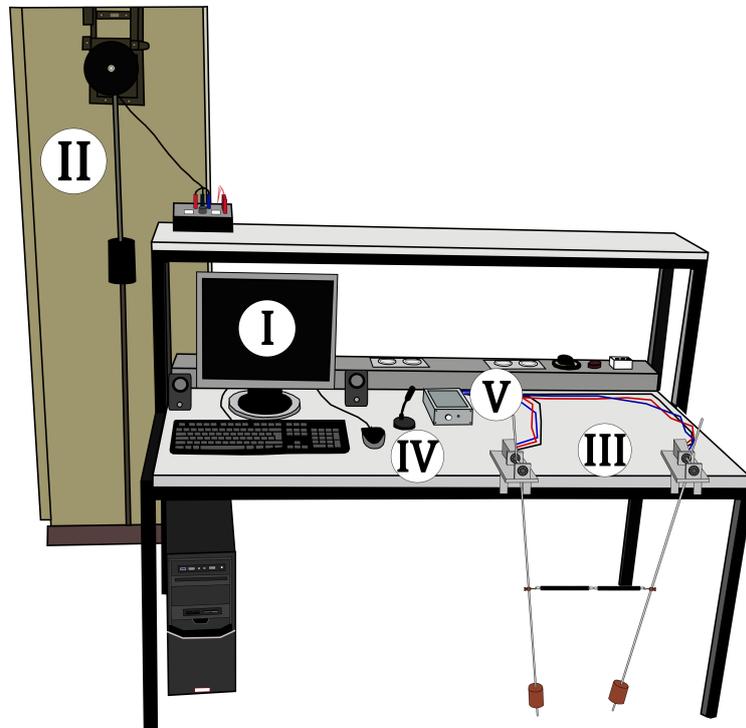


Abbildung 5: Versuchsaufbau mit Beschriftung der wesentlichen Komponenten: (I) Computer zur Aufnahme und Auswertung von Messdaten, (II) großes anharmonisches Pendel, (III) Gekoppelte Pendel. (IV) Mikrofon, (V) Schnittstelle (Analog-Digital-Wandler).

verwendet. Dieses besteht aus einer Stange, an der ein Zylinder durch eine entsprechende Stellschraube verschoben und in variabler Höhe fixiert werden kann. Es ist drehbar über Kugellager gelagert. Die Auslenkung (wie auch für alle anderen Pendel) wird über den Widerstandswert von Präzisionspotentiometern bestimmt, welcher über eine Analog-Digital-Wandlerkarte gemessen und in ein serielles Signal umgewandelt wird. Der Anschluss der Pendel an die Schnittstelle ist in Abbildung 6 dargestellt. Das durch die Wandlerkarte erzeugte serielle Signal wird nun an den PC weitergeleitet und dort über ein implementiertes LabVIEW-Programm angezeigt und erfasst. Die gekoppelten Pendel, welche im zweiten Teilversuch untersucht werden sollen, bestehen jeweils aus einem dünnen Metallstab, an dem ähnlich zum anharmonischen Pendel ebenfalls ein verschiebbarer Zylinder befestigt ist. Über einen ebenfalls beweglich angebrachten Haken, an denen Federn eingehängt werden können, können die Pendel

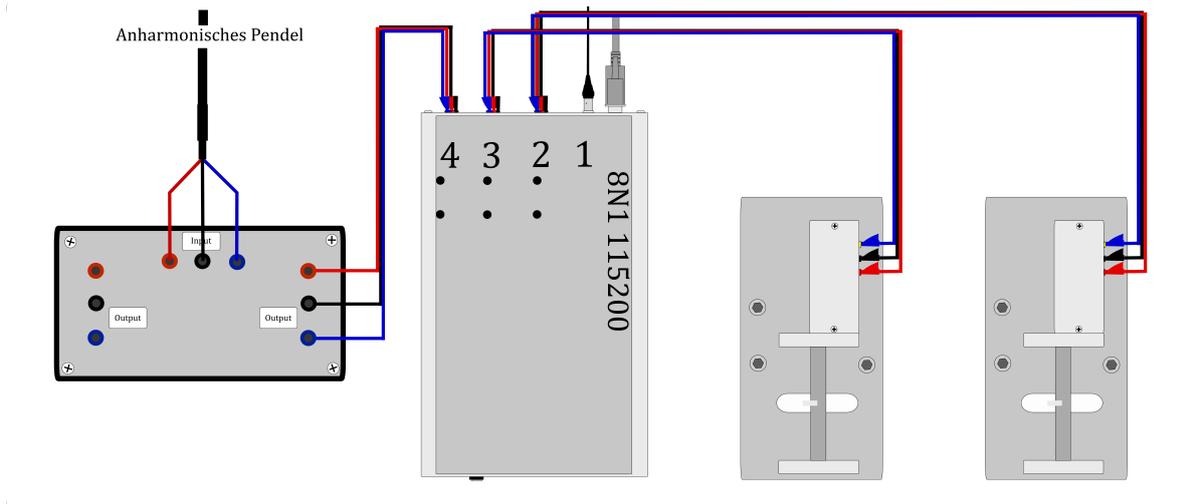


Abbildung 6: Schema zum Anschluss der Pendel an die Analog-Digital-Wandlerkarte.

mit variabler Kopplungsstärke aneinander gekoppelt werden. Auch diese Pendel sind drehbar über Kugellager gelagert und die Messung der Auslenkung erfolgt ebenfalls über Präzisionspotentiometer und die gleiche Messsoftware wie beim ersten Versuchsteil. Zur Schallmessung dient ein Mikrofon und ein entsprechend implementiertes LabVIEW-Programm. Die Bedienung beider Messprogramme wird nachfolgend kurz anhand der Programmoberfläche beschrieben.

## Messsoftware

Die in LabVIEW entwickelten Programme müssen, nachdem sie geöffnet wurden, zunächst ausgeführt werden, indem der Pfeil im oberen Bereich unterhalb des Hauptmenüs angeklickt wird (vgl. Abbildung 7). Wenn also die Diagramme alle leer sind, liegt es höchstwahrscheinlich daran, dass das Programm noch nicht ausgeführt wird. Für die Datenaufnahme werden die Programme *Anharmonische Schwingungen.vi* und *Schallwellen analysieren.vi* benötigt. Diese werden im Folgenden kurz vorgestellt.

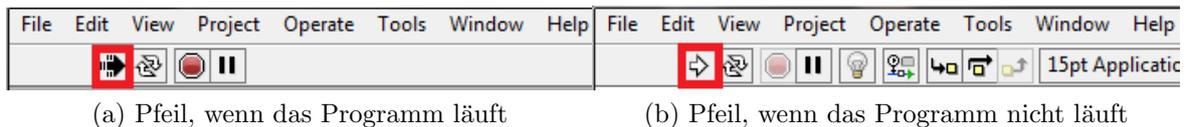


Abbildung 7: Obere Programmleiste beim Ausführen und Nichtausführen des LabVIEW-Programms

### Anharmonische Schwingungen.vi

Die Benutzeroberfläche des Programms zu den Pendelversuchen ist in Abbildung 8 zu sehen. Im linken Diagramm wird der aktuelle zeitliche Verlauf aller vier Kanäle angezeigt. Die Größe des Zeitfensters kann über das Eingabefeld unter dem Diagramm verändert werden. Unter dem Diagramm befindet sich eine Legende, die anzeigt, welche Kanäle welchem Pendel und welcher Farbe zugeordnet sind. Im unteren linken Bereich befindet sich die Nulllagenkorrektur. Grundsätzlich ist sie bei diesem Versuch nicht notwendig, aber da hier in erster Linie die Dynamik und nicht die Statik des Pendels von Interesse ist, ist es sinnvoll, die Nulllagenkorrektur zu verwenden. Wurde die Nulllagenkorrektur ausgeführt, so werden während der Messwertaufnahme die Mittelwerte der zugehörigen Nulllage bei allen Kanälen subtrahiert, so dass die Schwingung um die Nulllage aufgezeichnet wird. Zur Nulllagenkorrektur: Wenn sich die zu untersuchenden Pendel in ihrer Ruhelage befinden, wird mit einem Klick auf „Nulllage bestimmen“ die Mittelwertbildung eingeleitet und mit einem zweiten Klick wieder gestoppt, sobald sich ein stabiler Fehler einstellt (etwa 1000 aufgenommene Werte zur Mittelwertbildung reichen in der Regel aus). Mit einem Klick auf „Werte löschen“ wird dem Mittelwert wieder der Wert 0 zugewiesen. Im rechten Bereich der Programmoberfläche läuft die Messwertaufnahme ab. Nachdem der Knopf „Daten aufnehmen“ angeklickt wurde, beginnt die Messwertaufzeichnung. Die Messdaten werden zudem zur Übersicht während der Datenaufnahme in das rechte Diagramm eingezeichnet. Ein zweiter Klick auf „Daten aufnehmen“ stoppt den Messvorgang und öffnet einen Dialog zum Speichern der Daten.

### Schallwellen analysieren.vi

Die Benutzeroberfläche des Programms zur Analyse von Schallwellen ist in Abbildung 9 zu sehen. In dem Diagramm unter **Aufnahme** ist der zeitliche Verlauf des Messsignals

in Echtzeit dargestellt. Durch Drücken des Knopfes „Messung starten“ wird das Messsignal für die eingestellte Messdauer aufgezeichnet. Während der Messung leuchtet die Kontrollleuchte „Messung läuft“ auf. Eventuell ist es notwendig, den Knopf „Messung starten“ etwas länger zu drücken, bevor die Messung beginnt. Die Messdaten werden unter dem eingestellten Dateinamen (ohne Dateiendung!) abgespeichert. Zunächst ist dafür der Pfad einzustellen, unter welchem die Messdaten gespeichert werden sollen. In der Regel genügt es, dazu die Gruppennummer anzupassen. Unter **Wiedergabe** können die aufgezeichneten Klänge abgespielt werden. In den beiden Diagrammen sind die Frequenzspektren der Echtzeitmessung (oben) sowie der Messung (unten) unter **Analyse** dargestellt. Mit Hilfe der Diagramm-Werkzeuge kann in bestimmte Bereiche des Diagramms hereingezoomt werden.

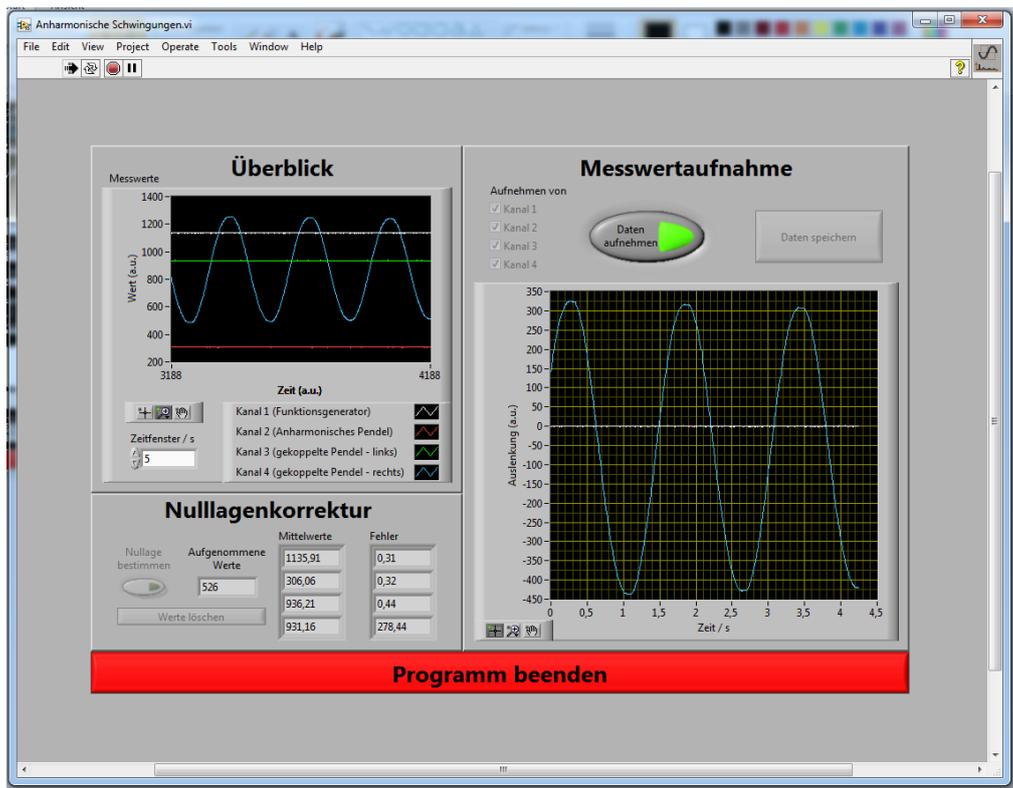


Abbildung 8: Programmoberfläche von *Anharmonische Schwingungen.vi*

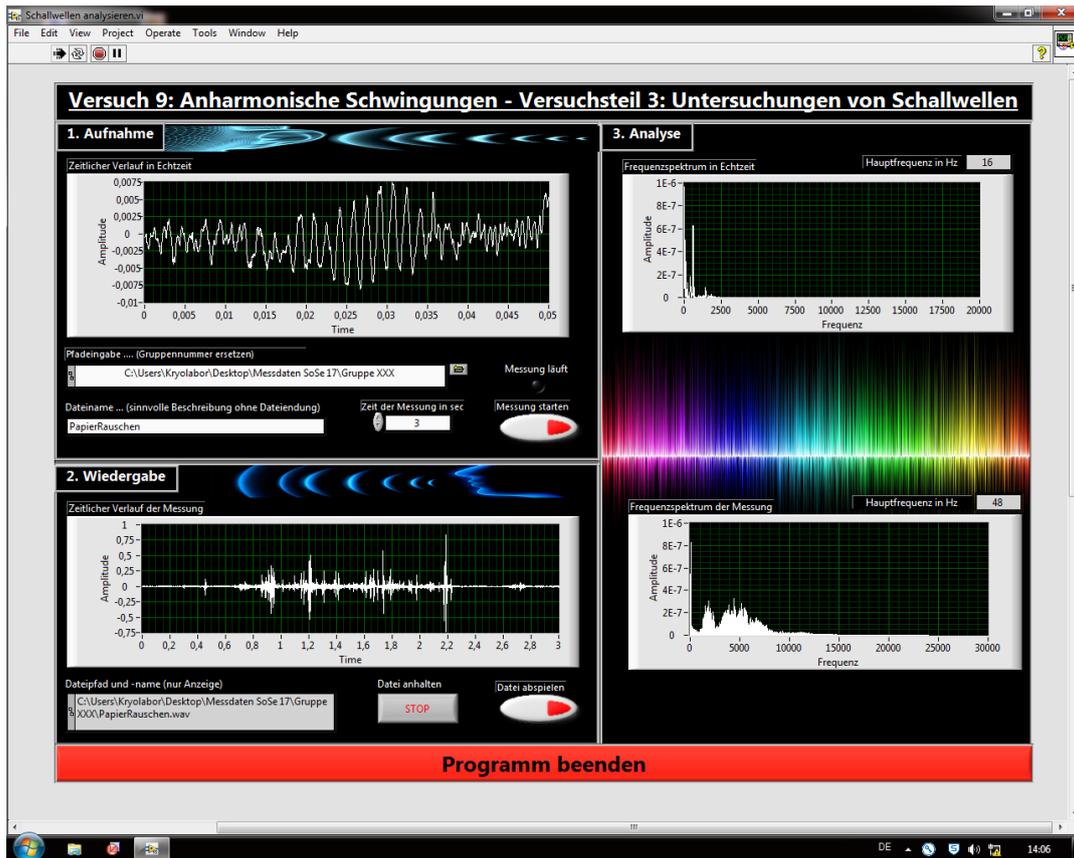


Abbildung 9: Programmoberfläche von *Schallwellen analysieren.vi*

## Experiment

Die Aufnahme der Messdaten erfolgt vollumfänglich digital. Damit Sie Ihre Messdaten am Ende des Versuchstages für die weitere Auswertung mitnehmen können, denken Sie bitte an die Mitnahme eines USB-Sticks.

### 1. Teilversuch: Anharmonisches großes Pendel

In diesem Teilversuch soll das Schwingverhalten eines großes (physikalischen) Pendels untersucht. Allgemein gilt, dass nach dem Auslenken des Pendels sowie während des gesamten Messzeitraums darauf zu achten ist, dass Sie den Schwenkbereich des Pendels nicht betreten.

#### Versuchsdurchführung

- Nehmen Sie das Schwingverhalten des Pendels für zwei Positionen des Pendelgewichts für jeweils eine kleine ( $< 10^\circ$ ) und eine große Auslenkung ( $\gg 10^\circ$ ) auf.

- Messen Sie den Abstand des Gewichts zur Drehachse  $s$ , bevor Sie die Position des Gewichts verändern und notieren Sie diesen.

### Auswertungsaufgaben

- Stellen Sie zu jeder Messung den zeitlichen Verlauf der Schwingung dar und führen Sie eine Fourieranalyse (in diesem Fall eine FFT) durch. Tragen Sie das daraus entstehende Frequenzspektrum graphisch auf.
- Bestimmen Sie aus dem zeitlichen Verlauf der Schwingung das logarithmische Dekrement  $\Lambda$ . Diskutieren Sie den Einfluss der Dämpfung auf die zugehörigen Frequenzspektren.
- Bestimmen Sie das Trägheitsmoment  $\Theta_{\text{Pendel}}$  nach der im Rahmen der vorbereitenden Aufgabe gezeigten Relation in Gleichung (42). Verwenden Sie zur Berechnung die in der Abbildung 10 eingetragenen Werte des Pendels sowie den von Ihnen gemessenen Abstand des Gewichts zur Drehachse  $s$ . Vergleichen Sie diese rechnerischen Ergebnisse mit den Ergebnissen die Sie aus der Fourieranalyse erhalten haben.
- Vergleichen Sie die Messungen für kleine Pendelauslenkungen mit denen für große Pendelauslenkungen und diskutieren Sie Ihre Beobachtungen.

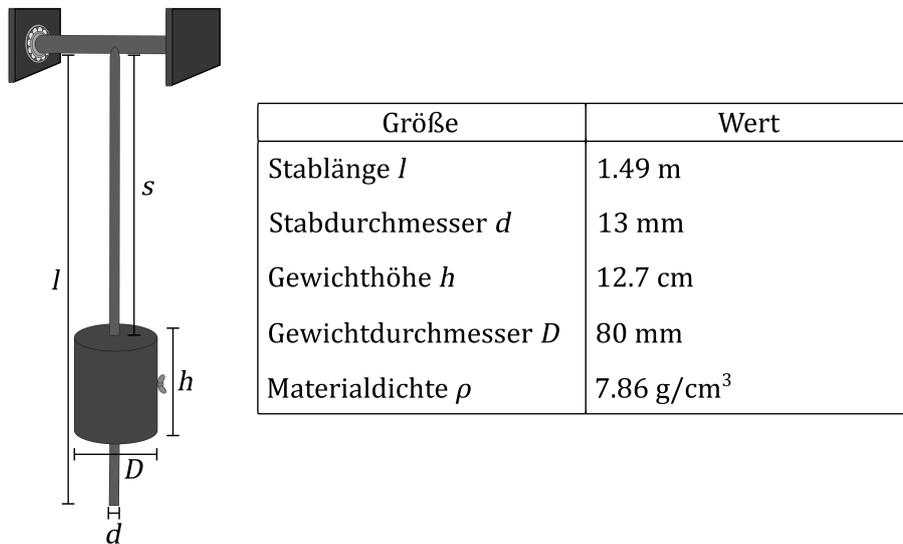


Abbildung 10: Maße des anharmonischen Pendels zur rechnerischen Bestimmung des Trägheitsmoments  $\Theta_{\text{Pendel}}$ .

## 2. Teilversuch: Gekoppelte Pendel

Das gekoppelte Pendel besteht, wie im Rahmen der Beschreibung des Versuchsaufbaus thematisiert, aus zwei Pendeln, die über eine Feder ein Kopplungsdrehmoment aufeinander ausüben können. Die Kopplungsstärke kann über die Variation des Abstands der Feder von der Drehachse in einem markierten Bereich variiert werden (siehe Abbildung 11).

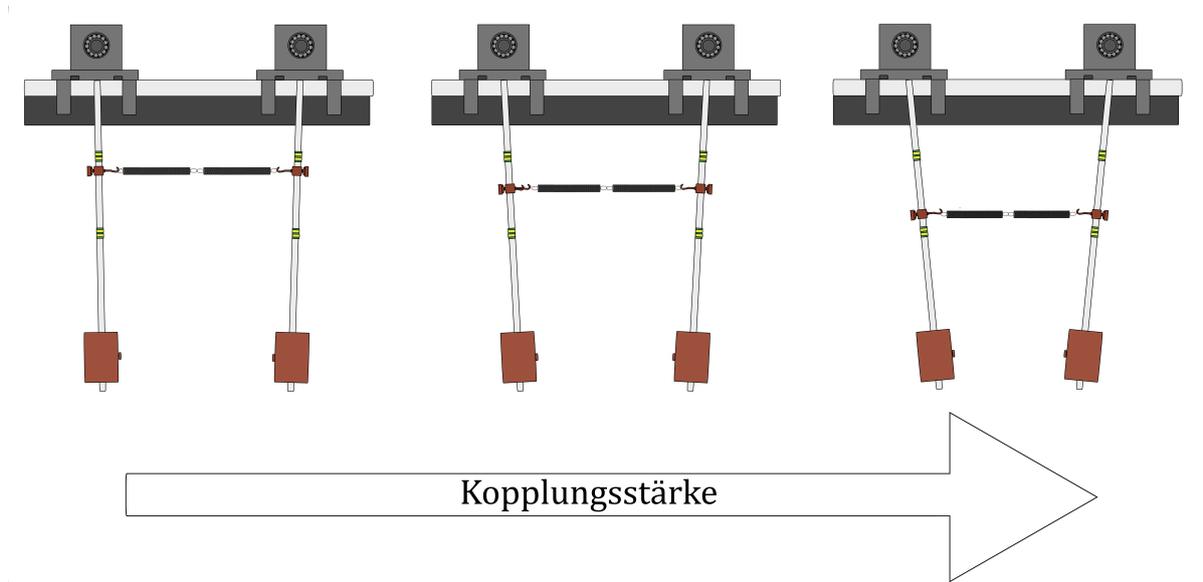


Abbildung 11: Schema zur Variation der Kopplungsstärke der gekoppelten Pendel.

### Versuchsdurchführung

- Bestimmen Sie die Masse der Pendelgewichte und den Abstand der Gewichte von der Drehachse. Nachdem Sie die Gewichte an beiden Pendel auf ungefähr gleicher Höhe montiert haben, sollten Sie den so eingestellten Abstand zur Drehachse für den restlichen Versuch konstant halten.
- Bestimmen Sie das Frequenzspektrum der Pendel im **ungekoppelten** Zustand. Lenken Sie hierzu gleichzeitig beide Pendel um einen Winkel von ungefähr  $30^\circ$  aus und nehmen Sie das Schwingverhalten beider Pendel gleichzeitig auf.
- Koppeln Sie die Pendel über die am Versuchsplatz ausliegende Feder aneinander. Bestimmen Sie nun das Schwingverhalten der gekoppelten Pendel, indem Sie eines der beiden Pendel auslenken, während das andere in der Ruhelage verbleibt. Eventuell müssen Sie hierzu das zweite Pendel festhalten, damit es sich nicht bei der Auslenkung des ersten Pendels aus der Ruhelage heraus bewegt.

- Wiederholen Sie die vorangegangene Messung für drei unterschiedliche Kopplungsstärken. Messen Sie den Abstand des Kopplungspunktes von der Drehachse, bevor Sie die Kopplungspunkte verschieben.

### Auswertungsaufgaben

- Stellen Sie zu jeder Messung den zeitlichen Verlauf der Schwingung dar und führen Sie eine Fourieranalyse (in diesem Fall eine FFT) durch. Tragen Sie das daraus entstehende Frequenzspektrum graphisch auf. Diskutieren Sie die erhaltenen Spektren.
- Bestimmen Sie auch die theoretisch erwartbaren Eigenfrequenzen der beiden Pendel. Nehmen Sie die Pendel hierzu als mathematische Pendel an. Vergleichen Sie den gekoppelten mit dem ungekoppelten Fall.
- Bestimmen Sie aus den Messdaten, die Sie für die gekoppelten Pendel aufgenommen haben, die Kopplungsstärke  $k$  mithilfe der Gleichungen (32) und (35).

### 3. Teilversuch: Schallwellen

In diesem Teilversuch sollen Klänge verschiedener Geräuschquellen bezüglich ihres Frequenzspektrums untersucht werden. Insgesamt sollen sieben verschiedene Messungen durchgeführt werden, wofür das oben beschriebene Messprogramm *Schallwellen analysieren.vi* wird.

#### Versuchsdurchführung

- Nehmen Sie das Grundrauschen im Praktikumsraum. Starten Sie hierzu eine Messung, in der ausschließlich die Umgebungsgeräusche aufgenommen werden.
- Untersuchen Sie das Frequenzspektrum einer Stimmgabel (Kammerton A, 440 Hz). Nehmen Sie hierzu zunächst den Klang der Stimmgabel ohne aufgesetzten Reiter auf. Befestigen Sie danach den Reiter zur Beeinflussung des Schwingverhaltens an der Stimmgabel an drei unterschiedlichen Positionen und führen Sie jeweils eine Messung durch. Überlagern Sie zuletzt die Klänge von verstimmter und nicht verstimmter Stimmgabel und führen Sie erneut eine Messung auf.
- Untersuchen Sie den Klang von drei unterschiedlichen, am Versuchsplatz ausliegenden Geräuschquellen. Hierbei sollten Sie nach Möglichkeit ein dumpfes (z. B. Schlag auf den Tisch), ein schrilles (z. B. Quietscheentchen) und ein rauschendes Geräusch (z. B. Zusammenknüllen von Papier) aufnehmen.

### **Auswertungsaufgaben**

- Stellen Sie die erhaltenen Frequenzspektren graphisch dar und diskutieren Sie diese. Stellen Sie insbesondere Zusammenhänge zwischen den Klängen her und bewerten Sie das Frequenzspektrum hinsichtlich Ihres akustischen Eindrucks.