



V08 Adiabatenkoeffizient

Zielsetzung des Versuchs

Der Adiabatenkoeffizient κ von Gasen wird über zwei verschiedene makroskopische Messverfahren bestimmt: Nach dem Verfahren von Clement-Desormes sowie mithilfe von Staubfiguren im Kundt'schen Rohr. Durch die Bestimmung von κ kann auf die molekulare Struktur des untersuchten Gases geschlossen werden.

Themengebiete

Thermodynamische Begriffe

Temperatur – innere Energie – Wärmemenge – Wärmekapazität – Zusammenhang von C_p/C_V mit dem Aufbau der Gasmoleküle – ideales Gas – reales Gas – kritischer Punkt – isotherme, isobare, isochore und adiabatische Zustandsänderungen - p - V - und p - T -Diagramme für ideale und reale Gase – Gesetze von Avogadro, Boyle-Mariotte, Gay-Lussac, Poisson, Dalton – Hauptsätze der Thermodynamik

Schwingungen und Welle

Schwingungsgleichung und eindimensionale Wellengleichung – Amplitude – Schwingungsdauer – Frequenz – Phase - Ausbreitungsgeschwindigkeit – Phasen- und Gruppengeschwindigkeit – Wellenlänge – stehende Wellen – transversale und longitudinale Wellen – Schall und dessen Ausbreitung in festen Stoffen und in Gasen

Messmethoden

Messung der Wellenlänge, Frequenz, Ausbreitungsgeschwindigkeit; insbesondere mit dem Kundt'schen Rohr - Grund- und Oberschwingungen

Physikalische Grundlagen

Thermodynamische Grundlagen

Grundsätzlich gilt, dass die Thermodynamik eine allgemeine Energielehre ist. Sie beschäftigt sich neben den verschiedenen Erscheinungsformen der Energie auch mit Umwandlungsprozessen verschiedener Energieformen ineinander sowie mit den damit verbundenen Eigenschaften der Materie. Im Rahmen dieses Versuchs wird nur das makroskopische Verhalten der Materie betrachtet. Alle Untersuchungen werden an thermodynamischen Systemen vorgenommen, welche eine große Anzahl von Teilchen beinhalten. Eine mikroskopische Betrachtung des Verhaltens einzelner Atome oder Moleküle erfolgt nicht.

Allgemein lässt sich ein thermodynamisches System (im Folgenden nur noch System genannt) als das materielle Objekt definieren, dessen thermodynamische Eigenschaften untersucht werden sollen. Das System wird hierbei von einer festzusetzenden Systemgrenze von seiner Umgebung getrennt. Je nachdem, ob die Systemgrenze durchlässig gegenüber Materie und/oder Energie ist, lassen sich verschiedene Unterscheidungen treffen:

Offenes System

Der Materieaustausch und der Energieaustausch mit der Umgebung sind möglich.

Geschlossenes System

Der Materieaustausch mit der Umgebung ist nicht möglich. Der Energieaustausch mit der Umgebung ist möglich.

Abgeschlossenes System

Weder der Materie- noch der Energieaustausch mit der Umgebung sind möglich.

Nachdem ein thermodynamisches System definiert worden ist, muss der thermodynamische Zustand des Systems adäquat beschrieben werden.

Thermodynamischer Zustand eines Systems

Unter einem thermodynamischen Zustand wird immer ein Gleichgewichtszustand verstanden, d. h. ein Zustand, den das betrachtete System nach unendlich langer Zeit einnimmt. Der Zustand wird durch die Angabe von Zustandsgrößen charakterisiert. Die Zustandsgrößen müssen dabei die Bedingungen erfüllen, dass ihr Zahlenwert unabhängig vom Weg ist, auf dem das thermodynamische System den Zustand erreicht hat. Beispiele solcher Zustandsgrößen sind z. B. die Temperatur, der Druck, das Volumen, die innere Energie und die Entropie. Prozessgrößen hingegen hängen vom Weg ab, der bei Änderung des thermodynamischen Zustandes durchlaufen wird, sie beschreiben somit die Weise, in der eine Zustandsänderung abläuft. Beispiele solcher Größen sind die Arbeit oder die Wärme.

Zustandsgrößen, die mit der Größe des thermodynamischen Systems skalieren, werden als extensive Größen bezeichnet. Ist eine thermodynamische Größe unabhängig von der

Systemgröße, so wird sie als intensiv bezeichnet.

Ein thermodynamisches System kann aus mehreren (verschiedenen) Phasen jeweils physikalisch einheitlicher Teilchen bestehen (z. B. Eis, Wasser und Wasserdampf). Ebenso ist es möglich, dass ein System aus verschiedenen Stoffen (unterschiedliche chemische Verbindungen) besteht. Ein System, das an jedem Ort die gleichen Eigenschaften aufweist, nennt man homogen. Heterogene Systeme zeigen eine ortsabhängige Variation der Eigenschaften. Sie lassen sich jedoch in homogene Teilsysteme untergliedern, die durch Grenzflächen voneinander getrennt sind.

Der Zustand eines Systems ist durch die Angabe der Masse und die Zusammensetzung der einzelnen Phasen und Stoffe sowie der Angabe ihrer jeweiligen Zustandsgrößen vollständig bestimmt.

Zustandsgleichung thermodynamischer Systeme

Der funktionale Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen eines Systems im thermodynamischen Gleichgewicht ist durch die Zustandsgleichung gegeben. Besonders einfache Verhältnisse ergeben sich für homogene Einstoff- und Einphasensystemen vor. Exemplarisch hierfür werden im Folgenden die relevanten Beispiele des idealen und des realen Gases betrachtet.

Thermodynamische Zustandsänderung

Das Modell des idealen Gases ist charakterisiert durch das Grenzverhalten eines unendlich verdünnten Gases aus nicht-wechselwirkenden Teilchen, die kein Eigenvolumen haben. Der Zustand des idealen Gases ist allgemein durch die Zustandsgrößen Druck p , Volumen V und Temperatur T eindeutig bestimmt, sodass sich die folgende Zustandsgleichung ergibt:

Zustandsgleichung idealer Gase

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T, \quad p \cdot V_m = R \cdot T \quad (1)$$

mit

- n : Anzahl der Mole des Gases, aus dem das System besteht
- R : allg. Gaskonstante, $R = 8,314 \text{ J}/(\text{mol K}) = 1,986 \text{ cal}/(\text{mol K})$
- m : Masse des Gases, M : molare Masse
- V_m : molares Volumen ($V_m = V/n$).

Zwei der drei auftauchenden Zustandsgrößen p, V und T lassen sich unabhängig voneinander verändern, wohingegen die dritte Zustandsgröße durch die anderen beiden festgelegt wird. In der Realität jedoch weichen Gase vom Verhalten idealer Gase ab und müssten deshalb als reale Gase betrachtet werden. Im Rahmen dieses Versuchs sollen die Gase jedoch ausschließlich approximativ als ideal behandelt werden.

Innere Energie, Wärme und Arbeit

Wird einem System von außen die Wärmemenge ΔQ zugeführt, so kann dies zum einen zu einer Erhöhung der inneren Energie U oder zum anderen zur Expansion des Gases um das Volumen dV gegen den Druck p führen, wobei dies der Verrichtung der Arbeit ΔW entspricht. Es gilt dementsprechend

$$\Delta Q = \Delta U - \Delta W. \quad (2)$$

Konventionell gilt, dass $\Delta W < 0$ gewählt wird, falls das System Arbeit verrichtet. Der Zusammenhang entspricht dem 1. Hauptsatz der Thermodynamik, welcher häufiger in der Form

1. Hauptsatz der Thermodynamik

$$\Delta U = \Delta Q + \Delta W \quad (3)$$

angegeben wird. Die Änderung der inneren Energie eines Systems entspricht der Summe aus von außen zugeführter/abgeführter Wärmeenergie und der zugeführten/verrichteten Arbeit.

Die innere Energie U eines Systems ist eine Zustandsgröße oder Zustandsfunktion. U setzt sich hierbei aus der kinetischen, potentiellen, chemischen und elektrischen Energie der Moleküle zusammen. Aufgrund der Wechselwirkungsfreiheit der Teilchen im idealen Gas wird die innere Energie in diesem Spezialfall ausschließlich durch den kinetischen Term bestimmt und hängt somit ausschließlich von der Temperatur T der Teilchen ab. Darüber hinaus kann das ideale Gas aufgrund der Wechselwirkungsfreiheit ausschließlich Druckarbeit $\Delta W = -pdV$ verrichten. Der 1. Hauptsatz nimmt für ideale Gase demnach die Form

$$dU = \delta Q - pdV \quad (4)$$

an. Da Q keine Zustandsgröße ist, hängt deren Wert bei einer Zustandsänderung vom Weg ab. Dementsprechend ist hier ein partielles und kein totales Differential zu verwenden.

Thermodynamische Zustandsänderungen

Um die gleiche Temperaturänderung dT eines Systems zu erreichen, sind, je nach angelegter Randbedingung, unterschiedlich große Wärmemengen nötig. Um unter anderem dies zu motivieren, sollen verschiedene thermodynamische Zustandsänderungen energetisch betrachtet werden.

I. Isochore Zustandsänderung

Bei einer isochoren Zustandsänderung wird das Volumen des Systems konstant gelassen, während sich Druck und Temperatur ändern können. Es gilt demnach $dV = 0$, womit der 1. Hauptsatz die Form

$$\delta Q = dU = m \cdot c_V \cdot dT = n \cdot C_V \cdot dT \quad (5)$$

annimmt. Die von außen zugeführte Wärmemenge δQ wird vollständig zur Erhöhung der inneren Energie und damit der Temperatur verwendet. Die vermittelnde Größe zwischen zugeführter Wärmemenge und damit verbundener Temperaturänderung des Systems ist über die spezifische Wärmekapazität c_V oder die molare Wärmekapazität C_V bei konstantem Volumen gegeben. Diese Größen sind im Allgemeinen selbst temperaturabhängig. C_V lässt sich somit schreiben als:

$$C_V = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{\delta T} \right)_{V=\text{const.}} = \frac{1}{n} \left(\frac{dU}{dT} \right)_{V=\text{const.}} \quad (6)$$

II. Isobare Zustandsänderung

Bei einer isobaren Zustandsänderung wird der Druck des Systems konstant gelassen, welches impliziert, dass das Gas durchaus Ausdehnungsarbeit leisten muss. Diese muss bei der Betrachtung der durch eine zugeführte Wärmemenge bewirkten Temperaturänderung dT berücksichtigt werden, sodass der 1. Hauptsatz die Form

$$\delta Q = dU + p \cdot dV = m \cdot c_p \cdot dT = n \cdot C_P \cdot dT \quad (7)$$

annimmt. Die von außen zugeführte Wärmemenge wird nun nicht mehr vollständig zur Erhöhung der inneren Energie und damit der Temperatur verwendet, sondern bewirkt anteilig auch eine Expansion des Gases. Die molare Wärmekapazität bei konstantem Druck C_p unterscheidet sich somit um die Ausdehnungsarbeit des Gases, die es gegen den Druck p leistet. C_p lässt sich schreiben als

$$C_p = \frac{1}{n} \left(\frac{\delta Q}{\delta T} \right)_{p=\text{const.}} \quad (8)$$

Für das ideale Gas ist C_p größer als C_V , wobei sich diese Größen gerade um die universelle Gaskonstante R unterscheiden.

III. Isotherme Zustandsänderung

Bleibt die Temperatur eines idealen Gases im Rahmen einer Zustandsänderung konstant, so erfolgt auch keine Änderung der inneren Energie U . Aus dem 1. Hauptsatz folgt somit

$$\delta Q = p \cdot dV. \quad (9)$$

Die dem System zugeführte Wärmemenge wird vollständig in Arbeit umgewandelt, die das System nach außen abgibt. In diesem Fall wird die Zustandsgleichung zum Gesetz von Boyle-Mariotte:

$$p \cdot V = \text{const.} \quad (10)$$

Visualisiert man diese Zustandsänderungen graphisch in einem p - V -Diagramm, so ergeben sich für verschiedene Temperaturen Hyperbeln, welche in Abbildung 1 dargestellt sind.

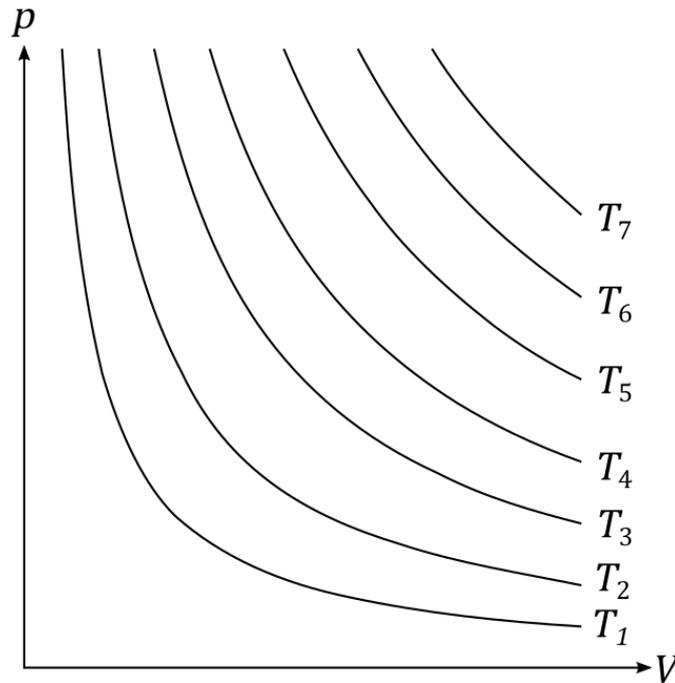


Abbildung 1: Isothermen des idealen Gases für verschiedene Temperaturen $T_1 < T_2 < \dots < T_6 < T_7$.

IV. Adiabatische Zustandsänderung

Die für diesen Versuch relevanteste Zustandsänderung ist die adiabatische Zustandsänderung. Diese liegt immer dann vor, wenn das System keine Wärmeenergie mit seiner Umgebung austauscht, es gilt somit $\delta Q = 0$. Häufig ist ein Prozess adiabatisch, wenn eine Volumen- oder Druckänderung innerhalb eines begrenzten Volumens so schnell vor sich geht, dass der währenddessen stattfindende Wärmeaustausch mit der Umgebung vernachlässigt werden kann. Als Beispiel lassen sich hier Schallwellen hinreichend hoher Frequenz anführen.

Für adiabatische Zustandsänderung besitzt der erste Hauptsatz die Form:

$$dU = C_V \cdot dT = -p \cdot dV \quad (11)$$

Wird nun die Zustandsgleichung idealer Gase verwendet und für den Druck p der Ausdruck $p = R \cdot T/V$ eingesetzt, so erhält man

$$C_V \cdot \frac{dT}{T} = -R \cdot \frac{dV}{V}. \quad (12)$$

Werden beide Seiten der Gleichung integriert ergibt sich der Ausdruck

$$C_V \cdot \ln T = -R \cdot \ln V + \text{const.}, \quad (13)$$

welches sich unter Ausnutzung der Logarithmengesetze zu

$$\ln (T^{C_V} \cdot V^R) = \text{const.} \quad (14)$$

umformen lässt. Die Verwendung von $R = C_p - C_V$ führt auf den Ausdruck

$$T^{C_V} \cdot V^{C_p - C_V} = \text{const.} \quad (15)$$

Wird die C_V -te Wurzel beidseitig gezogen und die Relation $T = p \cdot V/R$ eingesetzt, so führt dies auf die Adiabategleichung:

Adiabategleichung und Adiabatenkoeffizient

$$p \cdot V^{\frac{C_p}{C_V}} = p \cdot V^\kappa = \text{const.} \quad (16)$$

Der Adiabatenkoeffizient κ ist das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen und ist für ideale Gase aufgrund $C_p > C_V$ immer größer als 1. Adiabaten verlaufen im p - V -Diagramm somit steiler als Isothermen.

Zusammenhang zwischen κ und den Freiheitsgraden eines Moleküls

Über die kinetische Gastheorie lässt sich ein Zusammenhang zwischen der molekularen Struktur, den daraus resultierenden Freiheitsgraden und der Größe des Adiabatenkoeffizienten herstellen. Auf eine detaillierte Herleitung der besprochenen Ergebnisse sei an dieser Stelle verzichtet. Aus grundlegender Betrachtung der kinetischen Gastheorie lässt sich der Ausdruck

$$p \cdot V = \frac{2}{3} N \cdot \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{2}{3} N \cdot \overline{E_{\text{kin}}} \quad (17)$$

erhalten. Experimente haben gezeigt, dass das Produkt pV bei konstanter Teilchenzahl N von der Temperatur T abhängt. Die mittlere kinetische Energie $\overline{E_{\text{kin}}}$ hängt dementsprechend ebenfalls von der Temperatur ab. Es bietet sich demnach an, eine neue Temperaturskala zu definieren, bei der die mittlere kinetische Energie in proportionalem Zusammenhang zur Temperatur steht: Die absolute Temperaturskala T (in K) wird durch die Relation

$$\frac{m \overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2} k T \quad (18)$$

definiert. $k = 1.38054 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ bezeichnet die Boltzmann-Konstante. Mit dieser Definition geht die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie in die Zustandsgleichung idealer Gase über. Jedes Teilchen des idealen Gases kann im dreidimensionalen Raum Bewegungen in x -, y - und z -Richtung ausführen, was drei Freiheitsgraden der Translation entspricht. Im statistischen Mittel sind alle Geschwindigkeitsrichtungen gleichwertig, da durch Stöße mit anderen Teilchen permanent eine Änderung der Richtung und des Betrags der Geschwindigkeiten eintritt. Für die Mittelwerte der Geschwindigkeitsquadrate ergibt sich demnach:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}. \quad (19)$$

Diese Aussage führt zum Gleichverteilungssatz der Energie:

Gleichverteilungssatz der Energie

Im statistischen Mittel entfällt für ein System im thermischen Gleichgewicht auf jeden Freiheitsgrad eines Moleküls derselbe Energiebeitrag von

$$E = \frac{1}{2}kT \quad (20)$$

Für ein System mit f Freiheitsgraden ergibt sich somit:

$$\overline{E_{\text{ges}}} = \frac{f}{2}kT \quad (21)$$

Dieser Satz gilt für Vielteilchensysteme. Wichtig ist, dass der Gleichverteilungssatz ausschließlich für Freiheitsgrade gilt, die im thermischen Gleichgewicht tatsächlich auch angeregt sind. Häufig sind beispielsweise Molekülschwingungsfreiheitsgrade bei Raumtemperatur nicht angeregt und fließen somit nicht in die Berechnung der Gesamtenergie mit ein.

Pro Mol und Freiheitsgrad ergibt sich also eine Energie von $N_A \cdot kT/2 = RT/2$ (mit der Avogadrokonstanten $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{mol}^{-1}$). Aus den obigen Betrachtungen zur spezifischen Wärme lässt sich schließlich der folgende Zusammenhang für C_V und C_p gewinnen:

$$C_V = \left(\frac{dU}{dT} \right)_{V=\text{const.}} = \frac{\partial(f \cdot RT/2)}{\partial T} = \frac{f}{2} \cdot R. \quad (22)$$

Mit dem Zusammenhang $C_p - C_V = R$ lässt sich eine Relation für C_p erhalten:

$$C_p = R + C_V = R + \frac{f}{2} \cdot R = R \cdot \left(1 + \frac{f}{2} \right) = R \cdot \frac{2+f}{2}. \quad (23)$$

Der Adiabatenkoeffizient hängt damit über die Relation

$$\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f} \quad (24)$$

mit der Zahl der Freiheitsgrade f zusammen.

Bestimmung von κ

Im Rahmen dieses Versuchs wird der Adiabatenkoeffizient κ auf zwei verschiedene Weisen bestimmt. Die Hintergründe dieser Bestimmungsmethoden sollen nun abschließend dargestellt werden.

Bestimmung von κ nach Clément-Desormes

Dieses Experiment wurde 1819 von Nicholas Clément und Charles-Bernard Desormes durchgeführt. Im Rahmen dieser Bestimmungsmethode wird der Adiabatenkoeffizient durch Druckmessung vor und nach einer adiabatischen Expansion ermittelt. In

einem Druckbehälter mit dem Volumen V wird zunächst ein Überdruck p_1 erzeugt, der geringfügig höher ist als der Atmosphärendruck p_0 . Durch die entstehende Kompressionswärme kommt es zunächst zu einer Temperaturerhöhung, die sich nach kurzer Zeit thermisch mit der Umgebung ausgleicht, sodass auch der Druckbehälter auf der Umgebungstemperatur T_0 liegt. Nun der verbleibende Überdruck p_1 als Startpunkt der Messung bestimmt werden (Zustand I). Durch das kurzzeitige Öffnen eines Entlüftungsventils expandiert das Gas adiabatisch um das Volumen dV (Zustand II). Da kein Wärmeaustausch mit der Umgebung erfolgt, wird die Expansionsarbeit $-p_0 \cdot dV$ auf Kosten der inneren Energie geleistet, was eine Abkühlung des Gases auf $T_0 - dT$ bewirkt. Nach dem Schließen des Ventils ist ein Druckausgleich auf den Druck p_0 erfolgt und dem Gas steht nur noch das ursprüngliche Volumen V zur Verfügung (Zustand III). Durch Thermalisierungsprozesse mit der Umgebung erfolgt eine isochore Erwärmung, wobei der Druck des Systems von p_0 auf p_2 wächst (Zustand IV). Der komplette Prozess ist in Abbildung 2 dargestellt. Die Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten kann über

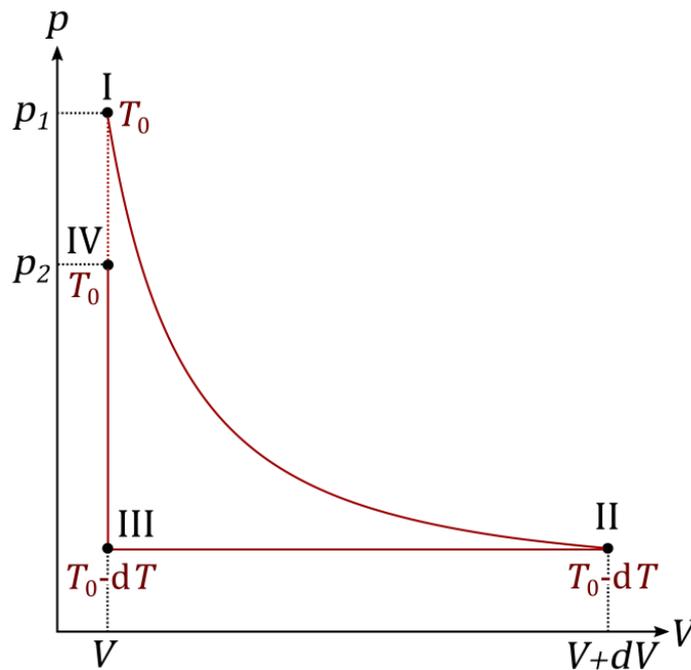


Abbildung 2: Zustandsänderungen der Bestimmungsmethode nach Clément-Desormes

die Verwendung der Adiabaten Gleichung (Gleichung (16)) sowie der Zustandsgleichung idealer Gase erfolgen (Gleichung (1)). Da die Zustandsänderung von I nach II adiabatisch erfolgt, kann er mit Gleichung (16)

$$p_1 V^\kappa = p_0 (V + dV)^\kappa \quad (25)$$

sowie mit dem über die Relation $T = p \cdot V/R$ zu erhaltenen Ausdruck:

$$T_0 \cdot V^{\kappa-1} = (T_0 - dT)(V + dV)^{\kappa-1} \quad (26)$$

beschrieben werden. Wie oben erwähnt sollen bei der Expansion nur kleine Volumenänderungen dV auftreten. Unter der Annahme $dV \ll V$ lässt sich eine Taylorapproximation durchführen, welche nach der ersten Ordnung abgebrochen wird:

$$(V + dV)^\kappa = V^\kappa \left(1 + \frac{dV}{V}\right)^\kappa \approx V^\kappa + \kappa V^{\kappa-1} dV. \quad (27)$$

Durch Anwendung dieser Approximation auf die Gleichungen (25) und (26) lassen sich schließlich die Ausdrücke

$$p_1 V^\kappa = p_0 (V^\kappa + \kappa V^{\kappa-1} dV) \Leftrightarrow \frac{p_1 - p_0}{p_0} = \kappa \frac{dV}{V} \quad (28)$$

und

$$T_0 \cdot V^{\kappa-1} = (T_0 - dT)(V^{\kappa-1} + (\kappa - 1)V^{\kappa-2} dV) \Leftrightarrow \frac{dT}{T_0} = (\kappa - 1) \frac{dV}{V}. \quad (29)$$

herleiten. Das Einsetzen der umgeformten Gleichungen ineinander führt auf den Ausdruck

$$\frac{dT}{T_0} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{p_1 - p_0}{p_0}. \quad (30)$$

Die isochore Zustandsänderung von Zustand III nach Zustand IV kann über die Relation

$$\frac{p_0}{T_0 - dT} = \frac{p_2}{T_0} \Leftrightarrow \frac{p_0}{p_2} = \frac{T_0 - dT}{T_0} = 1 - \frac{dT}{T_0} \quad (31)$$

beschrieben werden. Das Verhältnis dT/T_0 kann durch die Gleichung (30) ersetzt werden:

$$\frac{p_0}{p_2} = 1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{p_1 - p_0}{p_0}. \quad (32)$$

Diese Gleichung kann nach κ umgestellt werden und man erhält die Relation

$$\kappa = \frac{p_1 - p_0}{p_1 - p_2}. \quad (33)$$

Bestimmung von κ über die Messung der Schallgeschwindigkeit c

Eine weitere Möglichkeit, den Adiabatenkoeffizienten zu bestimmen, ist über die Messung der Schallgeschwindigkeit in Gasen gegeben. Um dies zu verstehen, werden im Folgenden die Grundzüge zur Beschreibung von Wellen, insbesondere von Schallwellen, dargestellt.

Wird in einem deformierbaren Medium an einer bestimmten Stelle eine elastische Deformation hervorgerufen, so pflanzt sich dieser Störungszustand in Folge der Kopplung mit der unmittelbaren Umgebung im Medium fort. Der sich zeitlich und räumlich einstellende Zustand wird Welle genannt. Grundsätzlich wird zwischen longitudinalen und transversalen Wellen unterschieden. Bei longitudinalen Wellen liegt

die Propagationsrichtung der Welle parallel zur Bewegung der Teilchen, wohingegen die Bewegung der Teilchen für Transversalwellen orthogonal zur Bewegungsrichtung der Welle erfolgt. In Gasen können aufgrund des verschwindenden Schermoduls ausschließlich longitudinale mechanische Wellen propagieren. In Gasen wirkt die lokale Kompression und die damit verbundene Druckerniedrigung in den Druckminima und Druckerhöhung in den Druckmaxima als Kopplungsmechanismus. Die Parametrisierung der Wellenbewegung kann in vielen Fällen korrekt über die eindimensionale Wellengleichung erfolgen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (34)$$

u ist hierbei die Verschiebung der an der Wellenausbreitung beteiligten Teilchen aus ihrer Ruhelage, t die Zeit, x die Ortskoordinate und c die Phasengeschwindigkeit im homogenen Medium.

Allgemein wird diese Gleichung durch den Ansatz

$$u(x, t) = f\left(\frac{c \cdot t \pm x}{x_0}\right) \quad (35)$$

gelöst. f ist eine beliebige zweimal nach x und t differenzierbare Funktion. Spezialfälle dieser Funktion wären die ebene Welle

$$u = u_0 \cdot \sin(\omega t \pm kx) \quad (36)$$

oder die sich radial ausbreitende Kugelwelle

$$u = \frac{u_0}{r} \sin(\omega t \pm kx). \quad (37)$$

Die Schallgeschwindigkeit kann über die Relation

$$c = \frac{\omega}{k} = \lambda \cdot \nu \quad (38)$$

erhalten werden, wobei ω die Kreisfrequenz, k die Wellenzahl, λ die Wellenlänge und ν die Frequenz ist. Für Gase kann die Schallgeschwindigkeit c über den Kompressionsmodul K und die Dichte ρ ausgedrückt werden:

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}}. \quad (39)$$

Die Definition des Kompressionsmoduls kann nun zur Ableitung des Adiabatenkoeffizienten benutzt werden:

$$K = -V \frac{dp}{dV}. \quad (40)$$

Für die im Versuch untersuchten Schallfrequenzen von > 1 kHz bleibt die Temperatur des Gases nicht mehr konstant. Durch die periodische Kompression und Expansion

des Gases wird die Temperatur an Orten des Druckmaximums höher als an Orten des Druckminimums. Ist die Schwingungsperiode deutlich schneller als der Temperatureausgleich, so ist es legitim, den Wärmeaustausch zwischen Druckmaximum und -minimum zu vernachlässigen. Die Wellenausbreitung erfolgt demnach adiabatisch. Um einen Ausdruck für den Quotienten dp/dV in Gleichung (40) zu finden, kann die Adiabatengleichung $pV^\kappa = \text{const.}$ verwendet werden. Es gilt dann:

$$0 = d(pV^\kappa) = dp \cdot V^\kappa + p \cdot \kappa V^{\kappa-1} dV \quad (41)$$

Diese Gleichung lässt sich umstellen zu

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p}{V} \kappa \quad (42)$$

Damit ergibt sich das Kompressionsmodul zu

$$K = p\kappa. \quad (43)$$

Insgesamt folgt daraus

$$c = \sqrt{\frac{p\kappa}{\rho}}. \quad (44)$$

Versuchsaufbau

Bestimmung von κ nach Clément-Desormes

Die Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten nach Clément-Desormes erfolgt mithilfe des Aufbaus, welcher in der Abbildung 3 skizziert ist. Das betrachtete thermodynamische

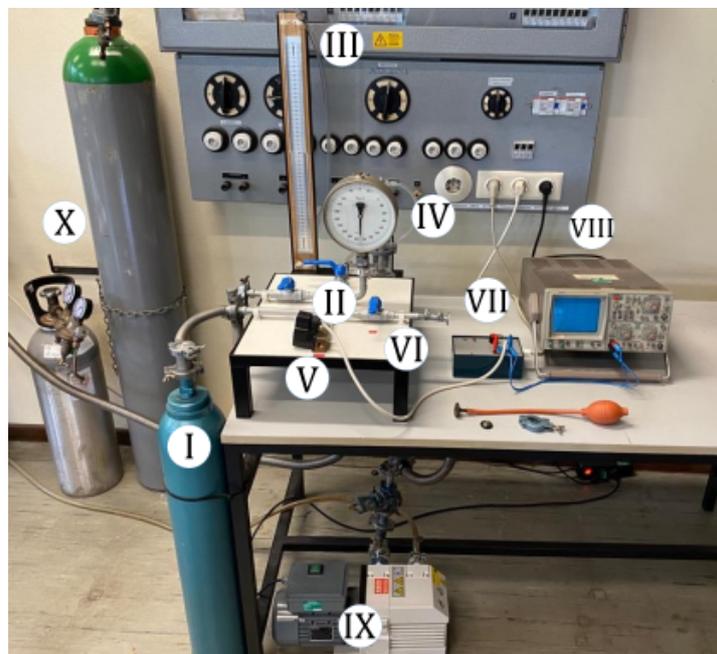


Abbildung 3: Versuchsaufbau nach Clément-Desormes mit Beschriftung der wesentlichen Komponenten: (I) Ausgleichsbehälter für Testgas ($V = 10\text{ L}$), (II) Rohrleitungs- und Ventilsystem, (III) U-Rohr-Manometer, (IV) Zeigermanometer, (V) Magnetventil, (VI) Anschluss zum Anflanschen des Blasebalgs/der Gasflaschen, (VII) regelbares Potentiometer, (VIII) Oszilloskop, (IX) Drehschieberpumpe, (X) Gasflaschen (Ar und CO_2).

System ist das Gas im Ausgleichsbehälter, welcher ein Fassungsvermögen von $V = 10\text{ L}$ besitzt. Der Ausgleichsbehälter selbst stellt jedoch nur ein Bad auf Raumtemperatur dar, er gehört nicht zum thermodynamischen System. Der Kern des Aufbaus besteht aus einem Rohrleitungs- und Ventilsystem, das die verschiedenen Komponenten des Aufbaus miteinander verbindet und über das der Druck und das Volumen des Systems geändert werden können. Eine schematische Darstellung der Ventilanordnung findet sich in Abbildung 4. Es ist während der Versuchsdurchführung darauf zu achten, dass die richtigen Ventile in der richtigen Reihenfolge und zum richtigen Zeitpunkt geöffnet bzw. geschlossen sind. Näheres dazu findet sich in der Beschreibung der Versuchsdurchführung. Da im Rahmen des Versuchs insgesamt drei Gase gemessen werden sollen (Ar, CO_2 und Luft) stehen für den Gaswechsel neben CO_2 und Ar-Gasflaschen auch eine Pumpe am Versuchsplatz, um das Restgas aus dem System entfernen zu können. Die Gasflaschen bzw. im Fall von Luft der Blasebalg können

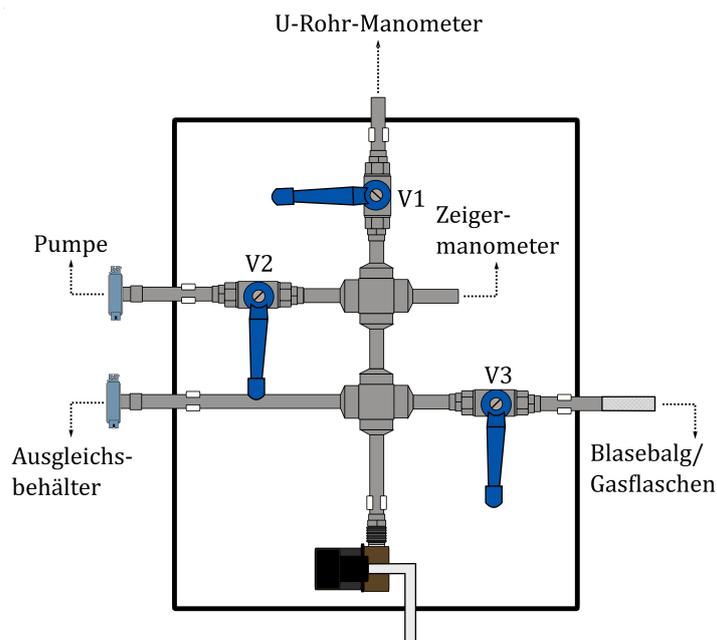


Abbildung 4: Schema des Rohrleitungs- und Ventilsystem, mit dem der Druck und das Volumen des Testgases im Ausgleichsbehälter variiert werden können.

zur Erzeugung eines Überdrucks an den dafür vorgesehenen Anschluss angeflanscht werden. Um die adiabatische Expansion des Gases vorzunehmen, wird ein Magnetventil verwendet, dessen Öffnungszeit über ein regelbares Potentiometer eingestellt werden und über ein Oszilloskop gemessen werden kann. Dazu sollen am Oszilloskop die Knöpfe **STORE** und **TRIGGER/AT** gedrückt sein und als Verstärkung 5-10 V/DIV gewählt werden. Als Zeiteinstellung ist 0.05-0.1 s/DIV zu wählen. Zur Druckmessung wird für Luft ein mit Wasser gefülltes U-Rohr-Manometer verwendet. Es misst die Differenz zwischen dem Atmosphärendruck, der auf dem linken, nach oben geöffneten, Schenkel anliegt und dem Gasdruck des Systems, welcher am rechten Schenkel des Systems anliegt. Ist der Druck auf der einen Seite des Systems höher verschiebt sich die Flüssigkeit auf die Seite mit dem geringeren Druck. Die Druckdifferenz kann aus dem Höhenunterschied des Wasserstandes bestimmt werden. Für Ar und CO₂ wird ein analoges Zeigermanometer verwendet.

Bestimmung von κ mit dem Kundt'schen Rohr

Das Kundt'sche Rohr oder auch Kundt'sche Staubrohr erlaubt es, stehende Schallwellen in einem Kunststoffrohr sichtbar zu machen. Der verwendete Versuchsaufbau ist in Abbildung 5 dargestellt. Es besteht aus einem mit Korkmehl gefüllten Kunststoffrohr, an dessen einen Ende sich ein Lautsprecher befindet (geschlossenes Ende). Am anderen Ende befindet sich ein Gaseinlass (offenes Ende), worüber das jeweilige Testgas durch das Umlegen von Ventilen mit einer Pumpe aus dem System entfernt bzw. in das System eingefüllt werden kann. Die gesamte Vorrichtung ist in einem schallgedämpften Kasten

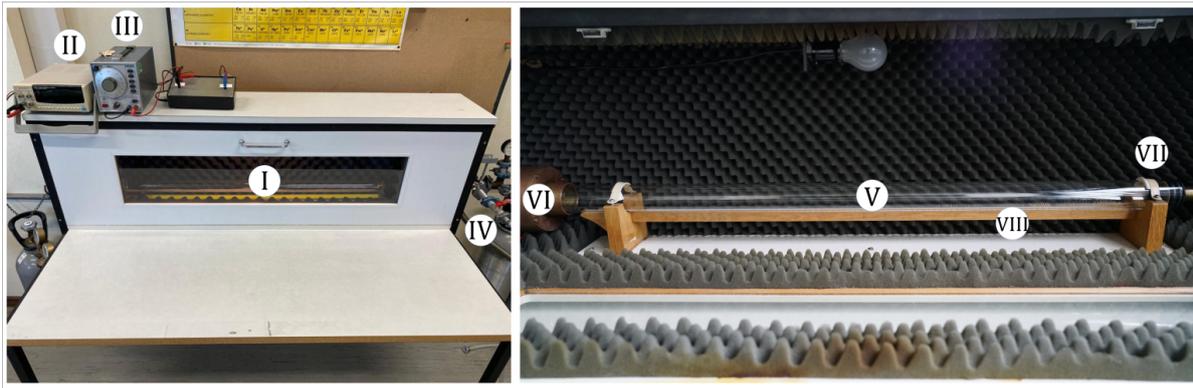


Abbildung 5: Versuchsaufbau zur Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten mit dem Kundt'schen Rohr mit Beschriftung der wesentlichen Komponenten: (I) Schallgedämpfter Kasten mit Kundt'schem Rohr im Inneren, (II) Frequenzmesser, (III) Frequenzgenerator, (IV) Ventilanordnung zum Wechsel der Testgase, (V) Kunststoffrohr (gefüllt mit einer geringen Menge an Korkmehl), (VI) Lautsprecher, (VII) Gaseinlass, (VIII) Längenskala (unter dem Kundt'schen Rohr montiert).

untergebracht, in dem auch ein Längenmaß zur Vermessung der Staubfiguren montiert ist.

Über einen Frequenzgenerator kann mithilfe des Lautsprechers eine Schallwelle einer einstellbaren Frequenz im Testgas erzeugt werden, wobei die Frequenz der Welle über ein Frequenzmessgerät gemessen wird. Wird die Frequenz der erzeugten Schallwelle derart eingestellt, dass sich eine stehende Welle im Staubrohr ergibt, so formen sich Staubfiguren aus dem am Boden des Rohres befindlichen Korkmehls. Über die Messung der Wellenlänge der entstehenden Staubfiguren und die Kenntnis der Frequenz der Schallwelle kann die Schallgeschwindigkeit und damit der Adiabatenkoeffizient bestimmt werden.

Experiment

Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten κ nach Clément-Desormes

Wichtig für alle Versuchsteile ist, dass die Ventile der Ventilanordnung korrekt umgelegt werden, um Schäden am Versuchsaufbau und eine damit verbundene Verfälschung der Messdaten zu vermeiden. Allgemein gilt, dass die Gasflaschen ausschließlich unter Aufsicht Ihres Betreuers oder durch den Betreuer selbst verstellt bzw. gewechselt werden sollten.

Die Pumpe darf ausschließlich bei geschlossenem Ventil V2 abgeschaltet werden, da sonst Öl in das Rohrleitungssystem gesaugt wird.

Vorbereitung - Gasspülung Wichtig ist ebenfalls die Gasspülung: Wollen Sie das untersuchte Testgas im System wechseln, dann sollte das vorher im System befindliche Gas entfernt werden und das System mit dem neuen Gas durchgespült werden, um eine Verfälschung der Messergebnisse durch Verunreinigungen zu vermeiden. Befolgen Sie hierzu die nachfolgenden Schritte.

1. Schließen Sie zunächst alle Ventile.
2. Falls Sie auf Ar oder CO₂ wechseln wollen, müssen Sie hierfür zunächst die entsprechende Gasflasche an den Anschluss bei V3 anflanschen. Wollen Sie Luft untersuchen, können Sie diesen Anschluss einfach offen lassen.
3. Öffnen Sie das Ventil V2 und warten Sie eine Zeit lang, bis der Druck im System nicht mehr weiter sinkt.
4. Schließen Sie das Ventil V2 und öffnen Sie das Ventil V3.
5. Lassen Sie das Ventil V3 solange geöffnet bis das Zeigermanometer ungefähr einen Druck von 760 Torr anzeigt (Atmosphärendruck).
6. Wiederholen Sie die Schritte 3. - 5. mindestens 3 Mal.

Überprüfung des Systems auf Dichtheit

Versuchsdurchführung

- Erzeugen Sie mithilfe der Pumpe ein Vakuum im Rohrleitungssystem. Schließen Sie hierfür die Ventile V1 und V3 und öffnen Sie das Ventil V2.
- Schließen Sie das Ventil V2 und warten Sie mindestens 3 Minuten. Notieren Sie die beobachtete Druckänderung, die Sie am Zeigermanometer ablesen können.
- Belüften Sie das System, indem Sie bei geschlossenem Ventil V1 und V2 das Ventil V3 öffnen.

Auswertungsaufgaben

- Treffen Sie auf Grundlage der beobachteten Druckveränderung eine Aussage über die Dichtheit des Systems und schätzen Sie den hierdurch resultierenden systematischen Fehler für die nachfolgenden Messungen ab.

Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten von Luft, Argon und CO₂

Versuchsdurchführung - Luft

- Führen Sie zunächst eine Gasspülung des Systems durch (s.o.)
- Flanschen Sie den Blasebalg an den Anschluss bei V3 an und öffnen Sie das Ventil V1 zum U-Rohr-Manometer. Wichtig ist hierbei, dass das Ventil V1 nur dann geöffnet werden darf, wenn das Rohrleitungssystem auf Atmosphärendruck liegt.
- Erzeugen Sie durch Pumpen des Blasebalgs einen Überdruck im Ausgleichsbehälter (ungefähr 300 mm Differenz zwischen den Wasserständen in den beiden Säulen des U-Rohrs). Warten Sie eine kurze Zeit, bis der Temperatenausgleich erfolgt ist und der Druck einen konstanten Anfangswert p_1 angenommen hat. Notieren Sie die Wasserstände der beiden Säulen als Maß für diesen Anfangsdruck p_1 .
- Stellen Sie eine Öffnungszeit des Magnetventils durch Anpassung des Potentiometers ein und öffnen Sie dieses mittels des roten Tasters.
- Die Wassersäule wird nun zunächst fallen. Lesen Sie unmittelbar nach dem Abfallen der Wassersäule die beide Wasserstände in den U-Rohr-Schenkeln als Maß für den Druck p_0 ab.
- Der Druck wird dann erneut langsam auf einen konstanten Endwert p_2 ansteigen. Lesen Sie die Wasserstände der Säulen des U-Rohrs als Maß für diesen Druck p_2 ab, nachdem sich eine Gleichgewichtslage eingestellt hat.
- Lesen Sie die Öffnungszeit von der Anzeige des Oszilloskops ab und notieren Sie diese.
- Wiederholen Sie die vorangegangenen Schritte für mindestens 7 unterschiedliche Öffnungszeiten des Magnetventils im gesamten Regelbereich des Potentiometers.

Versuchsdurchführung - Ar und CO₂

- Bitten Sie Ihre betreuende Person um den Wechsel der Gasflaschen.
- Führen Sie zunächst eine Gasspülung des Systems durch (s.o.)

- Lassen Sie das Ventil V1 des U-Rohr-Manometers während dieses Versuchs permanent geschlossen. Erzeugen Sie durch Öffnen des Ventils V3 einen Druck von ungefähr 1000 Torr im System. Warten Sie eine kurze Zeit, bis der Temperaturengleich erfolgt ist und der Druck einen konstanten Anfangswert p_1 angenommen hat. Lesen Sie den Anfangsdruck p_1 am Zeigermanometer ab und notieren Sie diesen.
- Stellen Sie eine Öffnungszeit des Magnetventils durch Anpassung des Potentiometers ein und öffnen Sie dieses mittels des roten Tasters.
- Der Zeiger des Zeigermanometers wird zunächst fallen, lesen Sie den Druck unmittelbar nach dem Abfallen des Drucks als Maß für den Druck p_0 ab.
- Analog zur vorherigen Durchführung mit Luft wird der Druck nun erneut langsam auf einen konstanten Endwert p_2 steigen. Lesen Sie den Druck p_2 nach Erreichen der Gleichgewichtslage ab und notieren Sie diesen.
- Lesen Sie die Öffnungszeit von der Anzeige des Oszilloskops ab und notieren Sie diese.
- Wiederholen Sie die vorangegangenen Schritte für mindestens 7 unterschiedliche Öffnungszeiten des Magnetventils im gesamten Regelbereich des Potentiometers.

Auswertungsaufgaben - Luft, Argon und CO₂

- (Nur Luft:) Rechnen Sie die von Ihnen aufgenommenen Differenzen der Wasserstände in den Säulen des U-Rohr-Manometers in die Drücke p_1 , p_0 und p_2 um.
- Bestimmen Sie für jede Öffnungszeit t_a den Adiabatenkoeffizienten κ und tragen Sie κ über t_a auf. Diskutieren Sie den Verlauf und die daraus resultierenden Fehlermöglichkeiten bezüglich der Bestimmung von κ .
- Bestimmen Sie C_p und C_V und vergleichen Sie die erhaltenen Werte sowie die ermittelten Werte für κ mit Literaturdaten.
- Ermitteln Sie aus den experimentell bestimmten Werten für κ die Anzahl der Freiheitsgrade und diskutieren Sie Ihre Ergebnisse.

Bestimmung des Adiabatenkoeffizienten κ mit dem Kundt'schen Rohr

Versuchsdurchführung

- Führen Sie zunächst eine Gasspülung des Systems durch.

- Füllen Sie das Rohr bis auf Atmosphärendruck mit Luft, indem Sie das Belüftungsventil öffnen. Verbinden Sie den Lautsprecher und den Frequenzmesser mit dem niederohmigen Ausgang des Tongenerators.
- Stellen Sie am Frequenzgenerator den Frequenzbereich von 1 kHz ein. Drehen Sie nun den Regler, bis sich das Korkmehl zu den typischen Staubfiguren anordnet. Notieren Sie sich die Frequenz, bei der dies passiert.
- Bestimmen Sie die Wellenlänge der Staubfiguren mit dem angebrachten Maßstab (siehe hierzu die Skizze in Abb. 6).

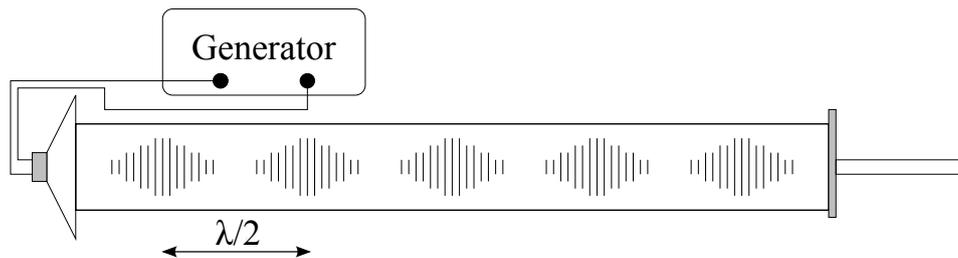


Abbildung 6: Skizze zur Vermessung der Staubfiguren im Kundt'schen Rohr

- Wiederholen Sie die Messung für mindestens zwei weitere Frequenzen. Wechseln Sie im Anschluss das Testgas und wiederholen Sie die Messung analog für Ar und CO_2 . Der Fülldruck des Kundtschen Rohrs sollte auch für diese Gase 1000 mbar (Atmosphärendruck) nicht überschreiten.

Auswertungsaufgaben

- Bestimmen Sie den Adiabatenkoeffizienten κ aus der Wellenlänge der Staubfigur und aus der Frequenz der Schallwelle. Sie können zur Berechnung die Gasdichten $\rho_{\text{Ar}} = 1.77 \text{ kg/m}^3$, $\rho_{\text{CO}_2} = 1.98 \text{ kg/m}^3$ und $\rho_{\text{Luft}} = 1.20 \text{ kg/m}^3$ verwenden.
- Diskutieren Sie Ihre Ergebnisse und vergleichen Sie diese insbesondere mit den Werten, die sie mit der Bestimmungsmethode nach Clément-Desormes ermittelt haben.