V05 Elastische Konstanten

Zielsetzung des Versuchs

Das elastische Verhalten eines festen Körpers unter der Wirkung von außen angreifenden Kräfte soll untersucht werden. Die wichtigsten charakteristischen Konstanten, der Elastizitätsmodul E und der Schub- oder Torsionsmodul G sollen bestimmt werden.

Themengebiete

Potential — Potentialverlauf im zwischenatomaren Bereich — Parabolische (harmonische) Näherung im Minimum — Lineares Kraftgesetz — Elastische und plastische Verformung — Einfluss von Gitterfehlern — Thermische Ausdehnung — Elastizitäts-, Kompressions- und Torsionsmodul — Querkontraktion und Poisson'sche Zahl — Drehschwingungen — Richtmoment — Trägheitsmoment

Physikalische Grundlagen

Jeder Festkörper besitzt ein Volumen und eine äußere Gestalt, wobei diese durch eine Deformation aufgrund dem Einfluss äußerer Kräfte verändert werden kann. Eine qualitative Beschreibung der Deformationsprozesse kann durch das atomare Modell realer Körper erfolgen, welches verschiedene interatomaren Wechselwirkungen berücksichtigt. Um die Ursache und das Zustandekommen der in diesem Versuch relevanten elastischen Konstanten zu verstehen, ist somit zunächst der grundlegende atomare Aufbau eines Festkörpers nachzuvollziehen.

Atomares Modell für Festkörper

Alle Körper sind aus Atomen oder Molekülen aufgebaut, wobei diese für kristalline Festkörper in einem regelmäßigen Gitter angeordnet sind. Zwischen zwei neutralen Atomen, die jeweils aus einem positiv geladenen Atomkern und einer diesen umgebenden Elektronenhülle bestehen, treten anziehende oder abstoßende elektrische Kräfte auf. Die resultierende Kraft $\vec{F}(r)$ und das daraus resultierende Potential $E_{\mathrm{p}}(\mathrm{r})$ ist vom Abstand der Atome abhängig. Das sich ergebene typische Potential (Lennard-Jones-Potential) ist in Abbildung 1 dargestellt. Der Abstand, an dem die potentielle Energie minimal ist, stellt die Gleichgewichtslage dar. Für Abstände um die Gleichgewichtslage herum

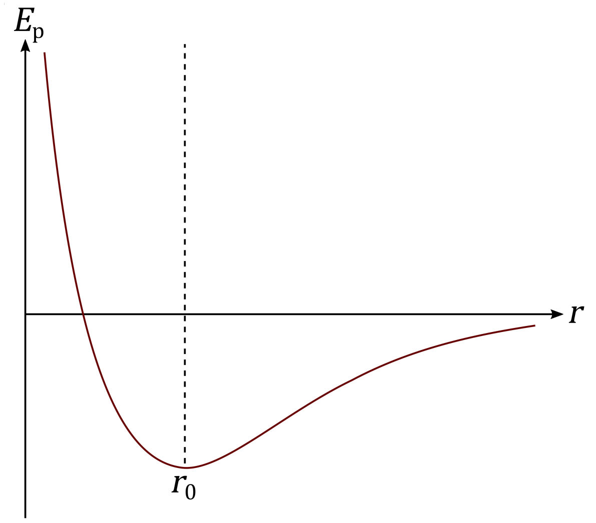

Abbildung 1: Schema des abstandsabhängigen Wechselwirkungspotentials zweier Atome mit eingezeichneter Gleichgewichtslage r_0.

lassen sich folgende Zusammenhänge formulieren: Für $r < r_0$ üben die Atome eine repulsive Kraft aufeinander aus, für $r > r_0$ eine attraktive Kraft. Für nicht zu große Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage treten demnach innere Rückstellkräfte auf, die das Atom in die Ruhelage zurückbringt, wenn die auslenkende Kraft verschwindet. Für genügend kleine Abstandsvariationen r um die Gleichgewichtslage r_0 herum kann das in Abb. 1 gezeigte Potential näherungsweise durch eine Parabel genähert werden. Aus dem grundsätzlichen Zusammenhang zwischen der Kraft und der potentiellen Energie

$$\vec{F}(r) = -\mathrm{grad} E_\mathrm{p}(r) \tag{1}$$

folgt für diesen Fall, dass die Kraft linearen Charakter hat. Vor diesem Hintergrund soll nun die elastische Dehnung eines Festkörpers diskutiert werden.

Der Elastizitätsmodul E

Es soll als versuchsnahes Beispiel ein Draht der Länge L mit dem Querschnitt A betrachtet werden, der am linken Ende festgehalten wird. An diesem greife eine Zugkraft $\vec{F}$ an, welche nach rechts gerichtet ist. Als Konsequenz vergrößert sich die Länge des Drahtes um ΔL. Dieser Prozess ist schematisch in Abbildung 2 dargestellt. Für genügend kleine Längenänderung ΔL lässt sich der Betrag der Kraft $F = |\vec{F}|$ darstellen als:

$$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L} \tag{2}$$

Der Faktor E wird Elastizitätsmodul genannt. Er hat die Einheit N/m^2. Das Elastizitätsmodul ist ein materialspezifisches Maß für den Kraftaufwand, der benötigt wird, um eine vorgegebene Längenänderung ΔL zu erreichen. Führt man nun noch die

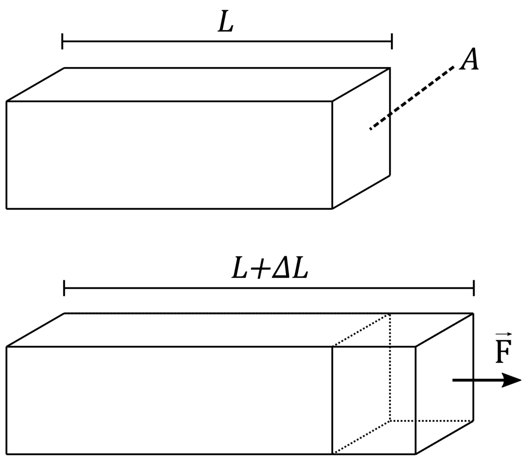

Abbildung 2: Skizze des Dehnungsprozesses eines Drahtes der Länge L und der Querschnittsfläche A auf die Länge $L + \Delta L$ durch das Anlegen einer Zugkraft $\vec{F}$

Zugspannung

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{3}$$

sowie die relative Dehnung

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \tag{4}$$

ein, dann ergibt sich aus Gleichung (2) das Hooksche Gesetz:

Hooksches Gesetz

$$\sigma = E \cdot \epsilon \tag{5}$$

Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, dass das Hookesche Gesetz nur für kleine Dehnungen gilt. Dieser Bereich wird Proportionalitätsbereich genannt, in dem der Körper nach Beendigung der äußeren Einwirkung wieder in die ursprüngliche Form zurückkehrt. Bei großen Dehnungen sind die Atome so weit aus der Gleichgewichtslage r_0 verschoben, dass die parabolische Näherung des Potentials in Abb. 1 nicht mehr gilt. Aufgrund der anharmonischen Form von $E_\mathrm{p}(r)$ treten nichtlineare Rückstellkräfte auf und die Dehnung wird stärker als die Zugspannung. Nach Beendigung der äußeren Krafteinwirkung kehrt der Körper nicht mehr vollständig in den Ausgangszustand zurück. Wird die belastende Kraft immer weiter erhöht, so setzen oberhalb der sogenannten Fließgrenze innere Gefügeveränderungen und Verschiebungen von Atomebenen (bzw. Gitterfehlern und Versetzungen) gegeneinander ein und die Deformation führt zu dauerhaften Formänderungen. Der Körper verhält sich plastisch. Bei weiterer Krafterhöhung über die Zerreißgrenze hinaus wird der Körper zerstört.

Querkontraktion

Der Draht erfährt durch die Zugspannung nicht nur eine Vergrößerung seiner Länge L um ΔL, sondern auch eine Verkleinerung seines Durchmessers d um Δd. Diese in

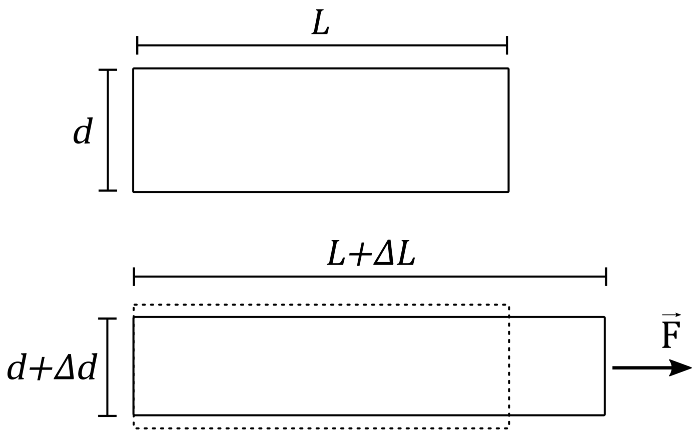

Abbildung 3: Skizze des Querkontraktionprozesses bei Dehnung eines Drahtes der Länge L auf die Länge $L + \Delta L$ durch das Anlegen einer Zugkraft $\vec{F}$

Abbildung 3 skizzierte Durchmesseränderung definiert die sogenannte Querkontraktion δ, für die

$$\delta = \frac{\delta}{\epsilon} \tag{6}$$

gilt. Das Verhältnis dieser beiden relativen Deformationen lässt sich in Form der Querkontraktionszahl oder Poisson-Zahl beschreiben:

Poisson-Zahl

$$\mu = -\frac{\Delta d}{d} \cdot \frac{L}{\Delta L} = \frac{\delta}{\epsilon} \tag{7}$$

Damit lässt sich die Volumenänderung des Körpers bei Dehnung bzw. Stauchung des Körpers ausdrücken als

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1 - 2\mu). \tag{8}$$

Bei Anlegung einer Zugspannung vergrößert sich das Volumen um $\Delta V > 0$, womit für die Querkontraktionszahl $\mu < 0.5$ gelten muss.

Der Kompressionsmodul K

Steht ein Körper von allen Seiten unter dem Druck $p = -\sigma$ (siehe Abbildung 4), dann erfolgt eine gleichartige Volumenverringerung $\Delta V < 0$ in allen drei Raumrichtungen,

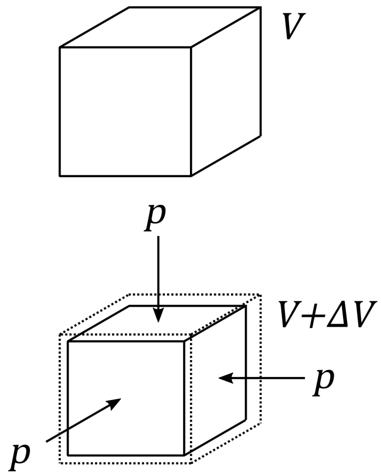

Abbildung 4: Skizze des Kompressionsprozesses eines Würfels des Volumens V um $\Delta V < 0$ durch gleichmäßiges Anlegen eines Druckes p auf alle Seitenflächen.

sodass sich aus Gleichung (9) insgesamt ergibt:

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon(1-2\mu) = -\frac{3p}{E}(1-2\mu). \tag{9}$$

Allgemein gilt lässt sich auf für die Kompression eine ähnliche Relation erhalten wie für die Zugspannung: Für nicht zu große Drücke ist die relative Volumenänderung $-\Delta V/V$ proportional zur Druckänderung dp, wobei die vermittelnde Proportionalitätskonstante der sogenannte Kompressionsmodul K ist:

$$dp = -K\frac{\Delta V}{V} \tag{10}$$

Über die Gleichung (9) lässt sich das Kompressionsmodul mit der Kompressibilität κ und mit der Querkontraktion und dem Elastizitätsmodul E verknüpfen:

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E}(1-2\mu) \tag{11}$$

Der Schermodul G

Die zweite Festkörperdeformation, die im Rahmen des Versuchs untersucht wird, ist die Scherung eines Körpers. Zur Veranschaulichung der Scherung, kann man sich einen quaderförmigen Körper vorstellen, der an seiner Grundfläche fixiert ist. Auf dessen Deckfläche A wirke eine tangential an diese angreifende und gleichmäßig über die gesamte Fläche A verteilte Kraft $\vec{F}$. Als Resultat verschiebt sich die obere Fläche gegen die untere und die zunächst senkrecht zueinander stehenden Seitenflächen werden um den

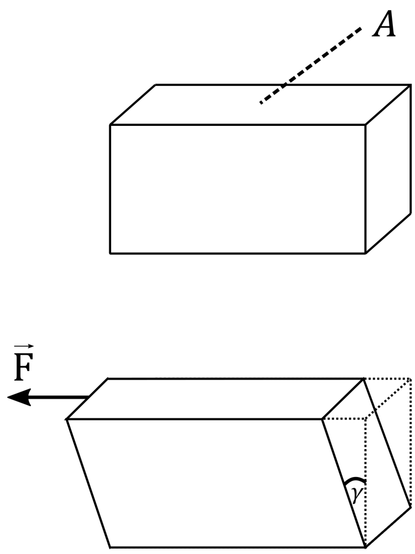

Abbildung 5: Skizze des Scherungsprozesses eines quaderförmingen Körpers, bei der eine an der Deckfläche A tangential angreifende Kraft $\vec{F}$ zur relativen Verschiebung der oberen und unteren Deckfläche um den Scherwinkel γ führt.

Scherwinkel γ geneigt. Bei genügend kleinem Schwerwinkel γ ist dieser proportional zur Schubspannung τ mit

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A}. \tag{12}$$

Die Proportionalitätskonstante in diesem Fall wird Schubmodul oder Schermodul G genannt und es gilt:

$$\tau = G \cdot \gamma \tag{13}$$

Verknüpfung der elastischen Konstanten

Da alle elastische Konstanten wie eingangs angedeutet durch zwischenatomare Kräfte bedingt sind, sind E, μ, K und G miteinander verknüpft. Die Elastizitätstheorie liefert als Verknüpfung der Module untereinander:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \quad \text{und} \quad K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \tag{14}$$

Versuchsaufbau

Der Versuch gliedert sich in zwei Teile, die jeweils über ihren eigenen Aufbau verfügen. In beiden Teilversuchen werden ein Messing- und ein Stahldraht vermessen.

1. Bestimmung des Elastizitätsmoduls E

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls E wird über eine Dehnungsmessung realisiert, für die der in Abb. 6 abgebildete Aufbau verwendet wird. Zur besseren

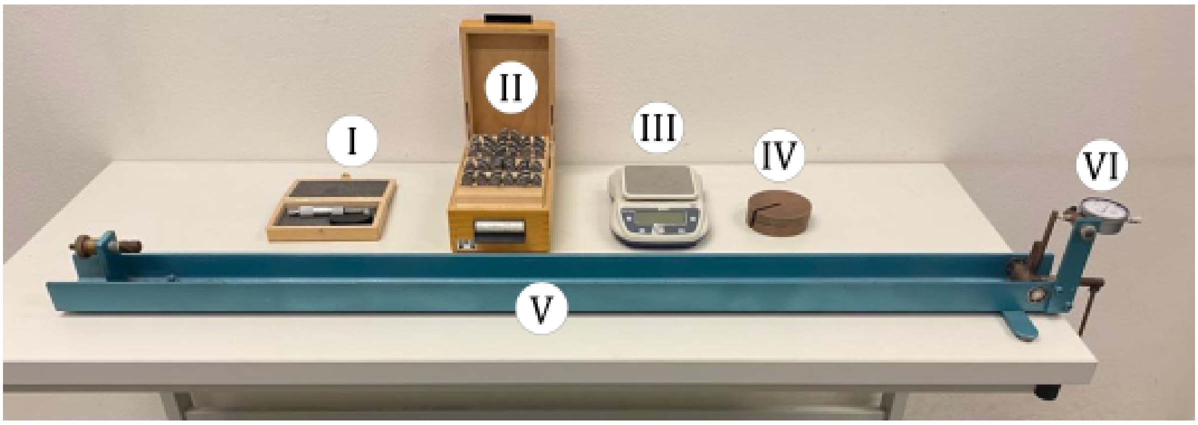

Abbildung 6: Versuchsaufbau zur Messung des Elastizitätsmodul E von Drähten mit Beschriftung der wesentlichen Komponenten: (I) Mikrometerschraube zur Messung des Drahtdurchmessers, (II) Box mit Schlitzgewichten aus Blei, (III) Digitalwaage, (IV) Messinggewichte ($m = 1\,kg$) zur Vorbelastung der Drähte, (V) Vorrichtung zur Dehnungsmessung (Details in Abb. 7), (VI) Messuhr zur Messung der Längenänderung

Nachvollziehbarkeit des Aufbaus findet sich in Abb. 7 ein Schema des Versuchsaufbaus dargestellt. Die Drähte werden in den Punkten A und B eingehängt. Die Stellschraube S dient zur Spannung des Drahtes. Über das Auflager D und die Hebel a und b wird auf die Drähte im Punkt A eine Zugspannung ausgeübt, wenn in D durch Auflegen des Gewichts zur Vorbelastung und zusätzlicher Bleistücke eine Last erzeugt wird. Durch die Längenabmessungen der Hebel findet eine Kraftverdopplung statt (a = 2b). Die Längenänderung wird über den Hebel c auf eine Messuhr übertragen (c = 2b). Bei den auftretenden kleinen Längenänderungen können Winkeländerungen vernachlässigt werden. Am Messplatz liegen neben dem zentralen Messaufbau zur Dehnungsmessung auch noch Schlitzgewichte aus Blei, eine Digitalwaage zur Massebestimmung der Gewichte, ein Zollstock und eine Mikrometerschraube aus. Mithilfe der Letzteren kann der Drahtdurchmesser bestimmt werden. Bezüglich der Messung des Drahtdurchmessers gilt es, folgende Punkte zu beachten: Drehen Sie den Grobtrieb der Mikrometerschraube nur so weit bis Sie den Draht fast einklemmen. Drehen Sie die Mikrometerschraube ab diesem Punkt ausschließlich mit dem Feintrieb. Die Mikrometerschraube kann abgelesen werden, sobald die Drehung des Feintriebs leerläuft.

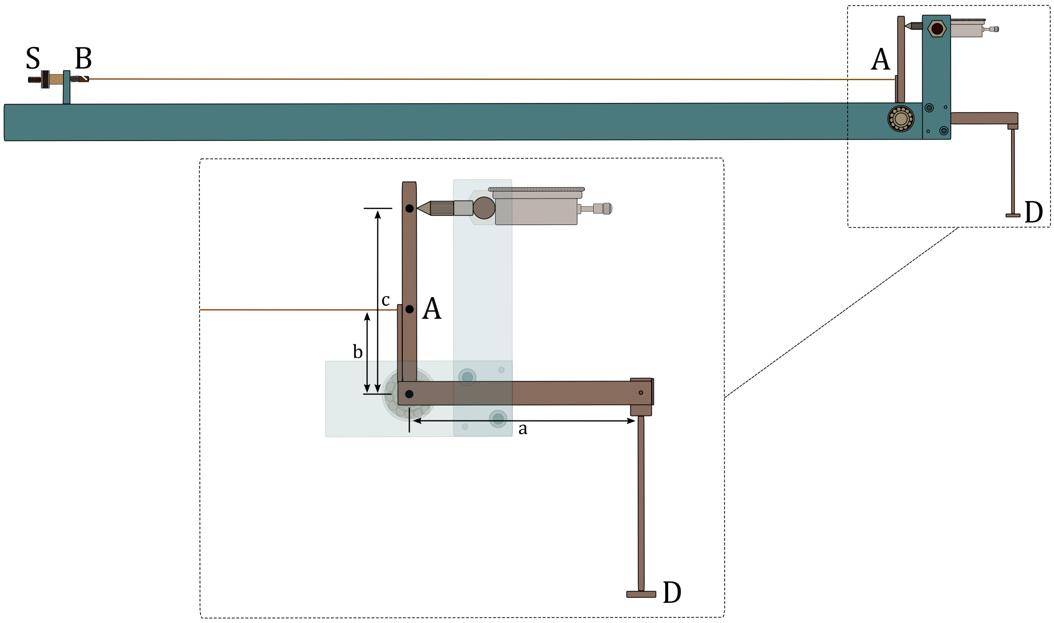

Abbildung 7: Schema des Versuchsaufbaus zur Dehnungsmessung. Vergrößert eingezeichnet sind die unterschiedlichen Hebel, die für einen Kraftübertrag auf die Messuhr führen. Mehr Informationen finden sich im Fließtext.

2. Bestimmung des Torsionsmoduls G

In diesem Versuchsteil soll der Torsionsmodul des Messing- und des Stahldrahtes mithilfe eines Torsionspendels gemessen werden. Das hierzu verwendete Torsionspendel ist schematisch in Abbildung 8 dargestellt. An das Grundgerüst des Pendels kann der zu

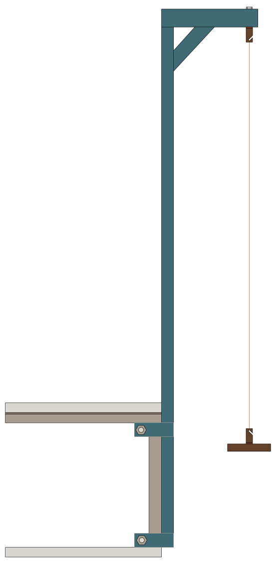

Abbildung 8: Schematischer Aufbau des Torsionspendels.

untersuchende Torsionsdraht eingehängt werden. Am unteren Ende des Drahtes wird eine Kreisscheibe (mit einer Markierung zur besseren Sichtbarkeit der ausgeführten Drehschwingung) angehängt. Zur Aufhängung der Kreisscheibe verwenden Sie bitte die gleichen Drähte, die Sie im Rahmen der ersten Hälfte des Versuchs untersucht haben.

Experiment

1. Bestimmung des Elastizitätsmoduls E

Versuchsdurchführung

Führen Sie das nachfolgend beschriebene Vorgehen analog für den Messing- und den Stahldraht durch.

- Spannen Sie den Draht, wie im Rahmen des Versuchsaufbaus beschrieben, zwischen den Punkten A und B der Versuchsapparatur ein.
- Legen Sie für die Messung des Messingdrahtes eine Scheibe aus Messing (1 kg) bzw. für die Messung des Stahldrahtes zwei Scheiben aus Messing (2 x 1 kg) als Vorbelastung auf den Auflagepunkt D. Dies dient zum Ausgleich der Knicke im eingespannten Draht.
- Stellen Sie mithilfe der Stellschraube S einen Anfangswert von 2 mm auf der Messuhr ein.
- Messen Sie die Anfangslänge L des eingespannten Drahtes. Messen Sie ebenfalls die Dicke d des Drahtes mithilfe der Mikrometerschraube an 10 unterschiedlichen Stellen des Drahtes und bilden Sie das arithmetische Mittel.
- Belasten Sie den Draht nun einmal mit 10 von Ihnen gewählten Massestücken und entlasten Sie ihn danach wieder vollständig.
- Belasten Sie nun den Draht schrittweise mit den gleichen Bleigewichten wie im vorherigen Schritt. Bestimmen Sie dabei vor jedem Auflegen die Masse des aufgelegten Bleistücks mithilfe der Digitalwaage. Klopfen Sie vor dem Ablesen der Messuhr leicht auf den Tisch, um einer Verfälschung der Messung durch Reibungseffekte bei der Bewegung des Zeigers der Messuhr entgegenzuwirken. Lesen Sie den Wert der Messuhr ab und notieren Sie diesen.
- Messen Sie im vollbeladenen Zustand den Durchmesser d' des Drahtes mit der Mikrometerschraube an 10 verschiedenen Stellen und bilden Sie das arithmetische Mittel.
- Entlasten Sie den Draht schrittweise durch Wegnahme der aufgelegten Gewichte in umgekehrter Reihenfolge, in der die Gewichte im vorherigen Schritt auf den Auflagepunkt gelegt worden sind. Notieren Sie sich nach der Entfernung jedes Gewichts den angezeigten Wert der Messuhr und das verbleibende Gewicht der noch aufgelegten Scheiben.

HINWEIS
Bei den Massestücken handelt es sich um Bleigewichte. Blei ist ein Schwermetall. Waschen Sie sich deshalb nach diesem Versuchsteil unbedingt die Hände.

Auswertungsaufgaben

- Leiten Sie aus den Abmaßen der Hebelanordnung die durch diese bewirkte Vervielfachung der belastenden Gewichtskraft her.

- Tragen Sie die Belastung in Gramm über der zugehörigen Längenänderung ΔL auf. Diskutieren Sie die Unterschiede der erhaltenen Diagramme für den Stahl- und den Messingdraht.

- Im Fall der Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes ergibt sich ein linearer Zusammenhang. Fitten Sie die Daten dementsprechend linear an. Bestimmen Sie aus der Steigung q der resultierenden Geraden das Elastizitätsmodul E. Sie können hierzu die folgende Betrachtung verwenden: Die Steigung q der Dimension Masse/Länge wird durch Erweitern mit der Erdbeschleunigung g auf die Dimension Kraft/Länge umgerechnet. Die Zugkraft wird durch die entsprechende Gewichtskraft $m \cdot g$ erzeugt. Somit ergibt sich der Zusammenhang:

  $$mg = F = q \cdot g \cdot \Delta L \tag{15}$$

  Über die Anwendung des Hookeschen Gesetzes kann die auslenkende Kraft zusätzlich mit dem Elastizitätsmodul verknüpft werden

  $$F = E \cdot A \cdot \frac{\Delta L}{L}, \tag{16}$$

  womit letztlich der Zusammenhang

  $$E = q \cdot \frac{gL}{A} \tag{17}$$

  folgt. Die für die Berechnung benötigte Querschnittsfläche A können Sie aus dem Durchmesser des unbelasteten Drahtes d berechnen.

- Diskutieren Sie den erhaltenen Wert für E. Bestimmen Sie die Querkontraktionszahl μ beider Drähte und schätzen Sie den Fehler ab, den Sie im vorherigen Schritt bei der Berechnung von E durch die Annahme eines für alle Dehnungen konstanten Durchmessers d getroffen haben. Vergleichen Sie Ihre Messergebnisse ebenfalls unter Angabe der entsprechenden Quellen mit Literaturdaten.

2. Bestimmung des Torsionsmoduls G

Versuchsdurchführung

- Bestimmen Sie die äußeren Abmaße und die Masse der an den Draht anzuhängenden Kreisscheibe. Sie können die Vorrichtung zur Befestigung der Drähte bei der Aufnahme der Abmaße vernachlässigen.

Führen Sie die nachfolgend beschriebenen Schritte sowohl für den Messing- als auch den Stahldraht durch.

- Bauen Sie das Torsionspendel mit dem entsprechenden Draht gemäß der Beschreibung des Versuchsaufbaus auf.
- Verdrillen Sie das Torsionspendel leicht aus seiner Ruhelage und messen Sie Schwingungsdauer der einsetzenden Drehschwingung. Messen Sie hierbei fünfmal die Zeit für jeweils fünf Schwingungsperioden und bilden Sie das arithmetische Mittel.

Auswertungsaufgaben

- Berechnen Sie das Trägheitsmoment der Kreisscheibe unter Verwendung der von Ihnen aufgenommenen Abmessungen und Masse mit der Formel

$$\Theta = \int_V r_\perp^2 dm. \tag{18}$$

- Bestimmen Sie das Torsionsmodul G aus der gemessenen Periodendauer T. Der Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer des Torsionspendels und dem Torsionsmodul kann aus folgender Betrachtung hergeleitet werden:
  An einem zylindrischen Draht der Länge L und des Radius r greife am oberen Ende tangential eine Kraft $\vec{F}$ an, die eine Torsion des Drahtes bewirkt. Zunächst soll ein Hohlzylinder mit Radius r und Wandstärke dr betrachtet werden (siehe Abb. 9). Dreht sich das obere Ende des Drahtes nur um einen kleinen Winkel ϕ, so lässt sich der Scherwinkel γ unter Anwendung der Kleinwinkelnäherung schreiben als:

$$\gamma \approx \tan(\gamma) = \frac{\phi \cdot r}{L} \tag{19}$$

  Für kleine Scherwinkel ist die Schubspannung τ dem Schwerwinkel γ proportional (siehe Gleichung (13)), weshalb gilt:

$$\tau = \frac{dF}{dA} = G \cdot \frac{\phi \cdot r}{L} \tag{20}$$

  Alle Flächenelemente dA des oberen Kreisrings der Fläche $2\pi r$ dr werden um den gleichen Winkel ϕ gegenüber der Ruhelage verdreht. Der Anteil der Kraft dF, der zur Scherung des Hohlzylinders führt, kann somit ausgedrückt werden als:

$$dF = \tau \cdot 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2\pi r^2 \phi G}{L} \mathrm{d}r \tag{21}$$

  Über den Hebelarm r erzeugt diese Kraft ein Drehmoment dM:

$$\mathrm{d}M = r \mathrm{d}F = \frac{2\pi r^3 \phi G}{L} \mathrm{d}r \tag{22}$$

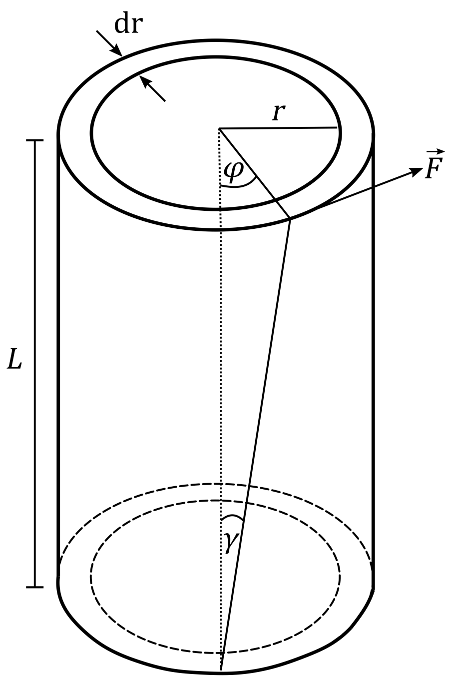

Abbildung 9: Skizze zur Berechnung des Torsionsmodul G aus Drahtschwingungen.

Für den im Versuch betrachteten Draht (Vollzylinder) muss dieser Ausdruck über den gesamten Drahtradius integriert werden, sodass sich der folgende Ausdruck für das Gesamtdrehmoment ergibt:

$$M = \int_0^R \mathrm{d}M = \frac{2\pi\phi G}{L} \int_0^R r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi\phi G R^4}{2L} \tag{23}$$

Durch Umformung kann daraus ein Ausdruck für G erhalten werden:

$$G = \frac{2LM}{\pi\phi R^4} \tag{24}$$

Die am Draht aufgehängte Kreisscheibe mit Trägheitsmoment Θ vollführt harmonische Schwingungen, wobei für deren Schwingungsdauer der Ausdruck

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D}} \tag{25}$$

Dabei ist D das Richtmoment des Drahtes, d.h. das Drehmoment pro Winkeleinheit:

$$D = \frac{M}{\phi} \tag{26}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\boxed{G = \frac{8\pi L\Theta}{R^4 T^2}.} \tag{27}$$

Dieser Ausdruck es ermöglicht bei Kenntnis von L, Θ und R durch die Messung der Periodendauer T direkt auf das Schubmodul zu schließen.

- Diskutieren und vergleichen Sie die erhaltenen Schubmodule G für Stahl und Messing. Führen Sie insbesondere unter Angabe der entsprechenden Quellen einen Vergleich Ihrer Messergebnisse mit Literaturdaten durch.
- Überprüfen Sie die Relation zwischen G, E und μ (Gleichung (14)). Diskutieren Sie mögliche Abweichungen.