



V04 Trägheitsmomente starrer Körper/Kreisel

Zielsetzung des Versuchs

Mit Hilfe von Drehschwingungen sollen im ersten Teil des Versuchs für einen Würfel und einen Quader die Trägheitsmomente für verschiedene Drehachsen durch den Schwerpunkt gemessen werden. Das zugehörige Trägheitsellipsoid soll dargestellt und der Trägheitstensor berechnet werden. Zudem wird eine Anwendung des Satzes von Steiner betrachtet. Im zweiten Teil des Versuchs soll die Präzessionswinkelgeschwindigkeit an einem schnellen, schweren Kreisel als Funktion der angreifenden Momente gemessen werden.

Themengebiete

Newton'sche Mechanik – Translatorische Bewegung, Rotationsbewegung, Analogien – Trägheitsmoment – Drehmoment – Drehimpuls – Rotationsenergie – Trägheitstensor (allgemeine Berechnung) – Deviationsmomente – Trägheitsellipsoid – Satz von Steiner – Drehschwingungen – Kreisel – Präzession, Nutation

Physikalische Grundlagen

Für viele physikalische Probleme können idealisierte Körper betrachtet werden. Diese werden durch das Modell des Massenpunktes beschrieben, welches die räumliche Ausdehnung des Körpers vernachlässigt. Die Untersuchung der Bewegung dieser Massenpunkte unter Krafteinfluss führen zu den wohlbekanntem Newton'schen Axiomen sowie Erhaltungssätzen für Energie, Impuls und Drehimpuls. Die Vernachlässigung der Ausdehnung eines Körpers ist jedoch nicht mehr legitim, wenn die zu beschreibenden Phänomene mit der räumlichen Gestalt verknüpft sind. Dies ist bei der Beschreibung von Rotationsbewegungen der Fall. Das Modell des Massenpunktes muss demnach um die räumliche Ausdehnung erweitert werden, welches auf das Konzept des starren Körpers führt.

Konzept des starren Körpers

Eine Menge von Massen m_ν , die um ihren gemeinsamen Schwerpunkt dergestalt rotieren, dass sich sämtliche Abstände voneinander nicht verändern, bezeichnet man als starren Körper.

Translatorische Bewegung und Rotationsbewegung

Bei der Bewegung eines starren Körpers sollen zwei Bewegungsformen betrachtet werden: Einerseits die Translationsbewegung und andererseits die Rotationsbewegung. Bei der Translationsbewegung bewegt sich der gesamte Körper (also alle Massenpunkte, aus denen er zusammengesetzt ist) mit derselben Geschwindigkeit in die gleiche Richtung. Bei der Rotationsbewegung um eine Rotationsachse ist dies nicht der Fall. Die Geschwindigkeit und Bewegungsrichtung ist für unterschiedliche Teile des Körpers verschieden. Massenpunkte, die sich nah an der Drehachse befinden, bewegen sich langsamer als jene, die sich weit von der Drehachse entfernt befinden.

Die mathematische Beschreibung der Bewegung des Körpers kann in beiden Fällen über das Aufstellen von Bewegungsgleichungen nach dem 2. Newton'schen Gesetz oder dem Lagrange- oder Hamilton-Formalismus geschehen. Die letzteren werden in den Theorie-Veranstaltungen der höheren Semester behandelt und werden an dieser Stelle nicht betrachtet. Zur mathematischen Beschreibung werden einige Grundgrößen des Systems bzw. der Bewegung benötigt. Zwischen der Rotation und der Translation lassen sich diesbezüglich Analogien herstellen, die in der Tabelle 1 zusammengefasst sind.

Translation	Rotation
Ort \vec{x}	Drehwinkel $\vec{\phi}$
Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{x}}$	Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \dot{\vec{\phi}}$
Beschleunigung $\vec{a} = \dot{\vec{v}}$	Winkelbeschleunigung $\dot{\vec{\omega}}$
Masse m	Trägheitsmoment Θ
Kraft $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$	Drehmoment $\vec{M} = \Theta \cdot \dot{\vec{\omega}}$
Impuls $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Drehimpuls $\vec{L} = \Theta \cdot \vec{\omega}$
Kinetische Energie $E_{\text{kin}} = 1/2 \cdot m \cdot v^2$	Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = 1/2 \cdot \Theta \cdot \omega^2$

Tabelle 1: Analogien zwischen den beschreibenden Größen von Translations- und Rotationsbewegung.

Der Trägheitstensor

Zu den wichtigsten die Bewegung beschreibenden Größen dieses Systems gehört der Gesamtdrehimpuls \vec{L} bezüglich des Schwerpunkts

$$\vec{L} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}_{\nu} \times \vec{v}_{\nu}) \quad (1)$$

mit \vec{v}_ν als Geschwindigkeiten der Massenpunkte und \vec{r}_ν als deren Ortsvektoren (hier mit dem Schwerpunkt im Koordinatenursprung). Einsetzen der Beziehung $\vec{v}_\nu = \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu$ mit $\vec{\omega}$ als Winkelgeschwindigkeit ergibt

$$\vec{L} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{r}_{\nu} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu})) . \quad (2)$$

Es existiert demnach eine eindeutige funktionale Abhängigkeit $\vec{L}(\vec{\omega})$ des Drehimpulsvektors vom Vektor der Winkelgeschwindigkeit. Eine Umformung des doppelten Kreuzprodukts in Gleichung (2) ergibt

$$\vec{L} = \sum_{\nu} m_{\nu} [r_{\nu}^2 \vec{\omega} - (\vec{r}_{\nu} \cdot \vec{\omega}) \vec{r}_{\nu}] . \quad (3)$$

Für die einzelnen Komponenten des Drehimpulses L_i mit $i = x, y, z$ folgt hieraus

$$L_i = \sum_{\nu} m_{\nu} \left[\left(\sum_{j=x,y,z} r_{\nu_j}^2 \right) \omega_i - \left(\sum_{j=x,y,z} r_{\nu_j} \omega_j \right) r_{\nu_i} \right] = \sum_{j=x,y,z} \sum_{\nu} m_{\nu} \left[\left(\sum_{k=x,y,z} r_{\nu_k}^2 \right) \delta_{ij} - r_{\nu_i} r_{\nu_j} \right] \omega_j \quad (4)$$

wobei δ_{ij} das Kronecker-Symbol ist ($\delta_{ij} = 1$ für $i = j$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$). Die Beziehung zwischen \vec{L} und $\vec{\omega}$ ist also linear. Die Abbildungsmatrix $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ mit

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{\omega} \quad \text{bzw.} \quad L_i = \sum_{j=x,y,z} \Theta_{ij} \omega_j \quad (5)$$

wird als Trägheitstensor bezeichnet. Ein Vergleich von (4) und (5) liefert für die einzelnen Komponenten des Trägheitstensors Θ_{ij} ($i = x, y, z, j = x, y, z$)

$$\Theta_{ij} = \sum_{\nu} m_{\nu} \left[\left(\sum_{k=x,y,z} r_{\nu_k}^2 \right) \delta_{ij} - r_{\nu_i} r_{\nu_j} \right] . \quad (6)$$

Für einen ausgedehnten Körper ist die Summe über die diskreten Massenpunkte durch ein Integral über infinitesimal kleine Massenstücke zu ersetzen

$$\Theta_{ij} = \int_V \left[\left(\sum_{k=x,y,z} r_k^2 \right) \delta_{ij} - r_i r_j \right] dm . \quad (7)$$

Eigenschaften des Trägheitstensors

Mathematisch gesehen ist der Trägheitstensor ein Tensor 2. Stufe, welcher als Matrix dargestellt werden kann.

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_{xx} & \Theta_{xy} & \Theta_{xz} \\ \Theta_{yx} & \Theta_{yy} & \Theta_{yz} \\ \Theta_{zx} & \Theta_{zy} & \Theta_{zz} \end{pmatrix} . \quad (8)$$

Tensoren

Tensoren werden in verschiedenen physikalischen Bereichen, wie hier in der Mechanik kontinuierlicher Medien, zur Beschreibung von Problemen genutzt. Die zur Beschreibung verwendeten mathematischen Objekte dürfen nicht von der Wahl eines speziellen Koordinatensystems abhängen. Tensoren erfüllen diese Bedingungen definitionsgemäß, ihre Eigenwerte sind invariant unter Rotation. Tensoren unterscheidet man je nach Form in unterschiedliche Stufen. Tensoren 0. Stufe sind Skalare, Tensoren 1. Stufe sind Vektoren und Tensoren 2. Stufe Matrizen.

Der Trägheitstensor ist symmetrisch (d.h. $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$). Zur Berechnung aller Trägheitsmomente bezüglich beliebiger Schwerpunktsachsen sind demnach nur sechs Integrale zu berechnen. Man unterscheidet hierbei die drei Diagonalelemente des Tensors, welche die Trägheitsmomente bei Rotation des Körpers um die Koordinatenachsen beschreiben,

$$\Theta_{xx} = \int_V (y^2 + z^2) dm, \quad \text{usw.} \quad (9)$$

von den Nichtdiagonalelementen, den sogenannten *Deviationsmomenten*:

$$\Theta_{xy} = - \int_V xy dm, \quad \text{usw.} \quad (10)$$

Im Allgemeinen ist erkennbar, dass die Form des Trägheitstensors und damit die Werte der einzelnen Matrixeinträge von der Wahl der Drehachse bzw. von der Wahl des Koordinatensystems abhängig sind.

Hauptachsentransformation

Eine wichtige Konsequenz der Symmetrie des Trägheitstensors ist die Existenz eines orthogonalen Systems von Eigenvektoren.

Eigenwert und Eigenvektoren

Wird die Matrix $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ auf einen Vektor \vec{r} angewendet, so entsteht im Allgemeinen ein neuer Vektor $\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}$, der zumeist anders orientiert ist als \vec{r} . Auf Eigenvektoren \vec{r}' trifft dies nicht zu. Der resultierende Vektor $\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}'$ ist parallel oder antiparallel zu \vec{r}' :

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{r}' = \lambda \vec{r}' \quad (11)$$

Der skalierende Faktor λ heißt Eigenwert, wobei diese die Lösung der Determinantengleichung

$$\det(\overset{\leftrightarrow}{\Theta} - \lambda \cdot \mathbb{1}) = 0 \quad (12)$$

ist.

Bei der Wahl eines Koordinatensystems, dessen Koordinatenachsen parallel zu den Eigenvektoren des Tensors gewählt werden, werden alle Deviationsmomente in diesem sogenannten Hauptträgheitsachsensystem null und der Trägheitstensor besitzt die Form

$$\overset{\leftrightarrow}{\Theta} = \begin{pmatrix} \Theta_a & 0 & 0 \\ 0 & \Theta_b & 0 \\ 0 & 0 & \Theta_c \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Die Transformation auf die Hauptachsen des Systems erfolgt mathematisch über die Diagonalisierung der Matrix, wobei sich die Hauptträgheitsmomente aus Gleichung (12) bestimmen lassen. Eine Symmetrieachse des Körpers ist immer eine Hauptträgheitsachse und die Drehung um diese Achsen erfolgt momentenfrei, auf die Drehachse wirkt also keine Kraft.

Sind alle Hauptträgheitsmomente verschieden $\Theta_a \neq \Theta_b \neq \Theta_c$, so bezeichnet man den Körper als asymmetrischen Kreisel. Sind zwei Hauptträgheitsmomente gleich (z. B. $\Theta_a = \Theta_b \neq \Theta_c$), so spricht man von einem symmetrischen Kreisel. Falls alle Hauptträgheitsmomente einander entsprechen $\Theta_a = \Theta_b = \Theta_c$, so nennt man diesen Körper einen Kugelkreisler. Jede durch den Schwerpunkt eines Kugelkreislers gelegte Drehachse ist eine Hauptträgheitsachse.

Drehung um eine beliebige Schwerpunktsachse

Dreht sich der starre Körper um eine beliebige Schwerpunktsachse, deren Lage im Raum durch die Schnittwinkel α, β, γ mit den Koordinatenachsen definiert wird, so bezeichnet man die skalare Größe $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ mit der Eigenschaft

$$L_{\alpha\beta\gamma} = \Theta_{\alpha\beta\gamma} \omega_{\alpha\beta\gamma} \quad (14)$$

als Trägheitsmoment um diese Achse. $\omega_{\alpha\beta\gamma}$ ist hierbei der Betrag der Winkelgeschwindigkeit der Drehung um die besagte Achse, $L_{\alpha\beta\gamma}$ ist die Projektion des

resultierenden Drehimpulses auf die Drehachse. $\Theta_{\alpha\beta\gamma}$ lässt sich sehr einfach mit Hilfe des Trägheitstensors bestimmen, wobei gilt

$$\Theta_{\alpha\beta\gamma} = \vec{e}_{\alpha\beta\gamma}^T \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \vec{e}_{\alpha\beta\gamma}. \quad (15)$$

Hierbei stellt $\vec{e}_{\alpha\beta\gamma}$ den in Richtung der Drehachse weisenden Einheitsvektor dar (links vom Tensor als Zeilenvektor, rechts vom Tensor als Spaltenvektor zu schreiben).

Das Rotationsellipsoid

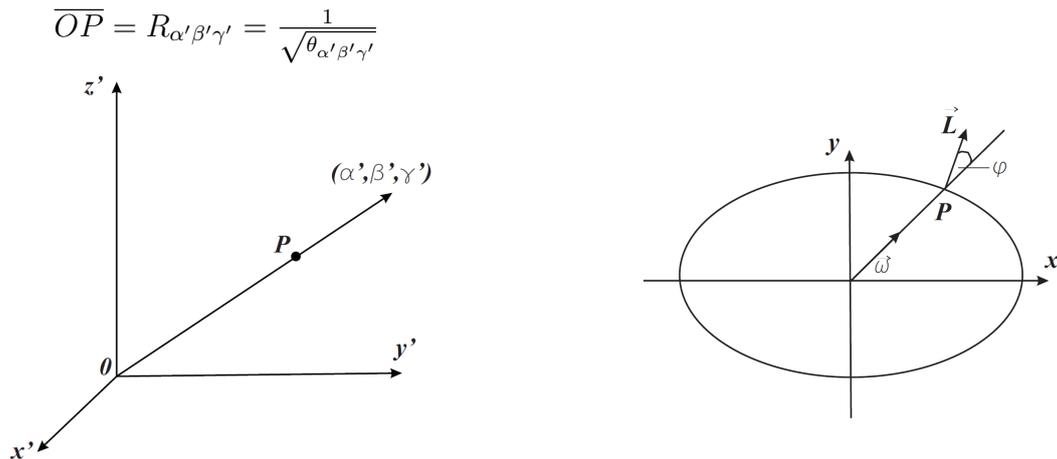


Abbildung 1: Links: Konstruktionsvorschrift für das Trägheitsellipsoid.

Rechts: Geometrische Konstruktion der Richtung von \vec{L} bei gegebenem $\vec{\omega}$ mit Hilfe des Trägheitsellipsoids

Verwendet man die Hauptträgheitsachsen als Koordinatensystem (angedeutet durch die gestrichelten Symbole), so lässt sich Gleichung (15) mit $\vec{e}_{\alpha'\beta'\gamma'} = (\cos \alpha', \cos \beta', \cos \gamma')$ schreiben als

$$\Theta_{\alpha'\beta'\gamma'} = \Theta_a \cos^2 \alpha' + \Theta_b \cos^2 \beta' + \Theta_c \cos^2 \gamma'. \quad (16)$$

Man führt nun den sogenannten Trägheitsradius

$$R_{\alpha'\beta'\gamma'} := \frac{1}{\sqrt{\Theta_{\alpha'\beta'\gamma'}}} \quad (17)$$

ein. Trägt man die Trägheitsradien wie in Abbildung 1 (links) dargestellt in jede $(\alpha'\beta'\gamma')$ -Richtung ein, so bilden die Endpunkte P eine Fläche zweiten Grades.

Mit $x' = R_{\alpha'\beta'\gamma'} \cos \alpha'$ bzw. $\cos \alpha' = x' \sqrt{\Theta_{\alpha'\beta'\gamma'}}$ (entsprechend für y', β' bzw. z', γ') lässt sich Gleichung (16) umformen zu

$$\Theta_a x'^2 + \Theta_b y'^2 + \Theta_c z'^2 = 1. \quad (18)$$

Die gesuchte Fläche zweiten Grades ist also ein Ellipsoid. Im Spezialfall eines symmetrischen Kreisels erhält man ein Rotationsellipsoid, im Fall eines Kugelkreisels

eine Kugel. Mit Hilfe des Trägheitsellipsoids lassen sich Richtung und Betrag von \vec{L} bei gegebenem $\vec{\omega}$ einfach bestimmen (vgl. Abbildung 1 (rechts)):

(i) *Richtung von \vec{L}*

Der Vektor $\vec{\omega}$ wird in den Koordinatenursprung gelegt. \vec{L} hat dann die Richtung der im Durchstoßpunkt P errichteten Flächennormalen.

(ii) *Betrag von \vec{L}*

Die Entfernung vom Ursprung O zum Durchstoßpunkt P sei R und φ der Winkel zwischen \vec{L} und $\vec{\omega}$. Dann ist

$$L = \frac{\omega}{R^2 \cos \varphi} \quad (19)$$

mit L und ω als Beträge der entsprechenden Vektoren.

Satz von Steiner

Bisher wurden ausschließlich Drehungen um Schwerpunktsachsen behandelt. Die Verallgemeinerung auf jede beliebige Drehachse bereitet jedoch keine großen Schwierigkeiten: Ist das Trägheitsmoment Θ_s eines Körpers um eine Drehachse durch den Schwerpunkt bekannt, so erhält man für eine dazu parallele, im Abstand a verlaufende Drehachse das Trägheitsmoment

Satz von Steiner

$$\Theta_a = \Theta_s + ma^2 \quad (20)$$

mit m als Gesamtmasse des Körpers. Der Beweis kann zum Beispiel über den Energiesatz erfolgen. Die Rotationsenergie eines Körpers ist

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta \omega^2. \quad (21)$$

Für einen mit dem Abstand a um eine Drehachse rotierenden Massenpunkt dm gilt also

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} a^2 dm \omega^2. \quad (22)$$

Rotiert ein ausgedehnter Körper der Masse m um eine Drehachse, die um die Strecke a vom Schwerpunkt entfernt ist, so dreht er sich bei jeder Umdrehung auch einmal um sich selbst. Seine Rotationsenergie ist also

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \Theta_s \omega^2 + \frac{1}{2} ma^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \Theta_a \omega^2. \quad (23)$$

Drehschwingungen

Wie bereits weiter oben angesprochen, lassen sich mithilfe des 2. Newton'schen Axioms Bewegungsgleichungen aufstellen. Dies ist im Rahmen des ersten Teils wichtig, bei dem

das Trägheitsmoment über die Periodendauer der Drehschwingung eines Torsionspendels gemessen werden soll. Entsprechend der Analogien zwischen den Größen der Rotation und der Translation in Tabelle 1 lässt sich ausgehend vom 2. Newtonsche Axiom der Drehimpulssatz formulieren:

$$\frac{d(\Theta \cdot \dot{\phi})}{dt} = \sum_n M_n \quad (24)$$

- Θ : Trägheitsmoment des Körpers bezüglich der Drehachse
 ϕ : Drehwinkel
 $\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt}$: Winkelgeschwindigkeit
 M_n : die einzelnen am System angreifenden Drehmomente

Die Bewegungsgleichung lautet dann allgemein

$$\Theta \cdot \ddot{\phi} = \sum_n M_n. \quad (25)$$

Da in diesem Versuch Reibungseffekte vernachlässigt werden sollen und eine freie Schwingung betrachtet wird, greift als einziges Moment ein Rückstellmoment $D(\phi)$ an, welches als linear angenommen wird. Dieses besitzt die Form $D = -D^* \cdot \phi$, sodass sich die Bewegungsgleichung zu

$$\Theta \cdot \ddot{\phi} + D^* \phi = 0 \quad (26)$$

ergibt. Eine durch diese Gleichung beschriebene Schwingung besitzt die Periodendauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\Theta}{D^*}}. \quad (27)$$

Bei Kenntnis des Richtmoments D^* kann über die Messung der Periodendauer auf das Trägheitsmoment geschlossen ist. Wichtig ist nur, dass die Auslenkung des Pendels aus der Ruhelage nur um kleine Winkel geschieht, damit die Annahme eines linearen Rückstellmoments legitim ist.

Kreisel

Die Bewegung eines starren Körpers kann stets aus einer Translation und einer Rotation zusammengesetzt werden. Wird diese allgemeine Bewegung derart beschränkt, dass ein Punkt des Körpers raumfest sein soll, so spricht man von einer Kreiselbewegung. Der Körper heißt dann Kreisel. Die Bewegungen des Kreisels können mittels des folgenden, sehr wichtigen physikalischen Gesetzes vollständig verstanden werden: Die Änderung des Drehimpulses \vec{L} des rotierenden starren Körpers ist gleich der Summe der an ihm angreifenden Momente, d.h.

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_n \vec{M}_n. \quad (28)$$

Ist die Summe der Momente gleich null, so folgt, dass sich der Drehimpuls nicht ändert, d.h. er bleibt in Betrag und Richtung konstant. Einen Kreisel, für den dies gilt, nennt man *kräftefreien* oder genauer *momentenfreien Kreisel*. Im Folgenden soll nur der einfache Spezialfall des *symmetrischen Kreisels* (starrer Körper mit Rotationssymmetrie) behandelt werden. Die Symmetrieachse heißt *Figurenachse*.

Die Nutation eines symmetrischen, momentenfreien Kreisels

Neben der Figurenachse unterscheidet man beim Kreisel zwei weitere, durch den Schwerpunkt verlaufende Achsen: die *Drehimpulsachse* und die *momentane Drehachse*. Erteilt man dem Kreisel einen Drehimpuls \vec{L} , der nicht parallel zur Figurenachse ist, so rotiert er mit der Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}|$ um die sogenannte momentane Drehachse. Die Richtung des Drehimpulses nennt man Drehimpulsachse. Laut Voraussetzung bleibt der Drehimpuls konstant, also ändert auch diese Achse ihre Lage im Raum nicht. Die Beziehung zwischen diesen Größen ist gegeben durch

$$\vec{L} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta} \cdot \vec{\omega} \quad (29)$$

wobei $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}$ der Trägheitstensor und $\vec{\omega}$ der Vektor der Winkelgeschwindigkeit ist. Diese Beziehung kann in die senkrecht und parallel zur Figurenachse liegenden Komponenten \vec{L}_{\parallel} und \vec{L}_{\perp} zerlegt werden mit

$$\vec{L}_{\parallel} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\parallel} \cdot \omega_{\parallel} \quad \text{und} \quad \vec{L}_{\perp} = \overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\perp} \cdot \vec{\omega}_{\perp}. \quad (30)$$

Da im allgemeinen Fall $\overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\perp} \neq \overset{\leftrightarrow}{\Theta}_{\parallel}$ ist, wird der resultierende Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \vec{\omega}_{\perp} + \vec{\omega}_{\parallel}$ *nicht* parallel zur Drehimpulsachse liegen. Deshalb müssen bei der Kreiselbewegung sowohl die Figurenachse als auch die momentane Drehachse die raumfeste Drehimpulsachse auf Kegelmänteln umkreisen. Diese allgemeine Bewegungsform des kräftefreien Kreisels wird als Nutation bezeichnet. Ein Kreisel ist nutationsfrei, wenn seine Figurenachse mit der Drehimpulsachse zusammenfällt.

Präzession eines Kreisels

Greift an einem Kreisel senkrecht zur Drehimpulsachse ein Moment an, bewirkt dieses eine Richtungsänderung von \vec{L} . Die Drehimpulsachse ist nicht mehr raumfest, sondern bewegt sich ihrerseits auf einem raumfesten Kegelmantel. Diese Bewegung heißt Präzession. Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_p$, mit der die Drehimpulsachse den Präzessionskegel umläuft, lässt sich sehr einfach für den Spezialfall eines symmetrischen, schnellen Kreisels (Drehimpulsachse \approx Figurenachse) berechnen: Den Drehsinn der Präzession findet man mit $d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt$. Die allgemeine Bewegung eines Kreisels besteht aus Präzession und Nutation und kann somit sehr komplizierte Formen annehmen.

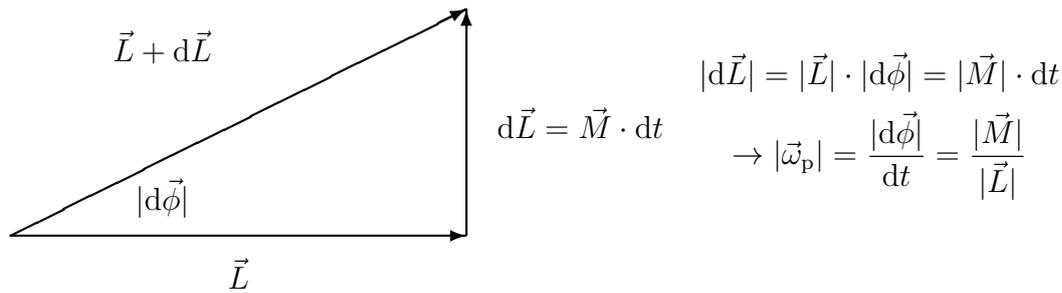


Abbildung 2: Schema zur Konstruktion der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_p$, mit der ein symmetrischer Kreisel den Präzessionskegel umläuft.

Versuchsaufbau

Der Versuch gliedert sich in zwei Teile, die zwei unterschiedliche Versuchsaufbauten verwenden.

1. Trägheitsmomente starrer Körper

Für den ersten Teil wird ein Torsionspendel verwendet, dessen wesentliche Komponenten in Abbildung 3 beschriftet sind. In das Grundgerüst können vertikal Torsionsdrähte gespannt werden, um über entsprechende Halterungen ein Metallkreuz bzw. verschiedene starre Körper schwingungsfähig aufzuhängen. Das Metallkreuz und die Würfel mit Loch werden für die Bestimmung des Richtmoments der Torsionsdrähte unter Anwendung des Satzes von Steiner benötigt. Das Kreuz verfügt über Einkerbungen im Abstand von 10 mm, um den Abstand der Würfel von der Drehachse systematisch zu variieren.

Die Ringe mit den radial im Abstand von $\Delta\Phi = 15^\circ$ eingefrästen Senken, in deren Mitte sich ein Würfel bzw. Quader unterschiedlicher Ausrichtung befindet, dienen zur Ermittlung des Trägheitsmoments der jeweiligen Körper für variable Drehachsen durch den Körperschwerpunkt. Die Aufhängungen müssen nur für die Ringe mit dem starren Körper verwendet werden. Abbildung 4 veranschaulicht hier exemplarisch für einen Winkel den Aufbauprozess. Beide Aufhängungen müssen durch die dafür vorgesehene Fräsung geführt werden und an exakt gegenüberliegenden Punkten des Rings angeordnet werden. Ein Verkippen ist auf jeden Fall zu vermeiden, da die resultierende Drehachse sonst nicht durch den Schwerpunkt des Körpers läuft. Zwischen den am Ring und am Torsionspendel befindlichen Aufhängungen ist jeweils ein Torsionsdraht zu spannen. Diese sollten in ihrer Länge derart gewählt werden, dass sie vor Umlegen des Hebels locker hängen. Nach dem Einhängen wird der Hebel am Torsionspendel umgeklappt und das Pendel damit gespannt (wie in Abbildung 5 visualisiert).

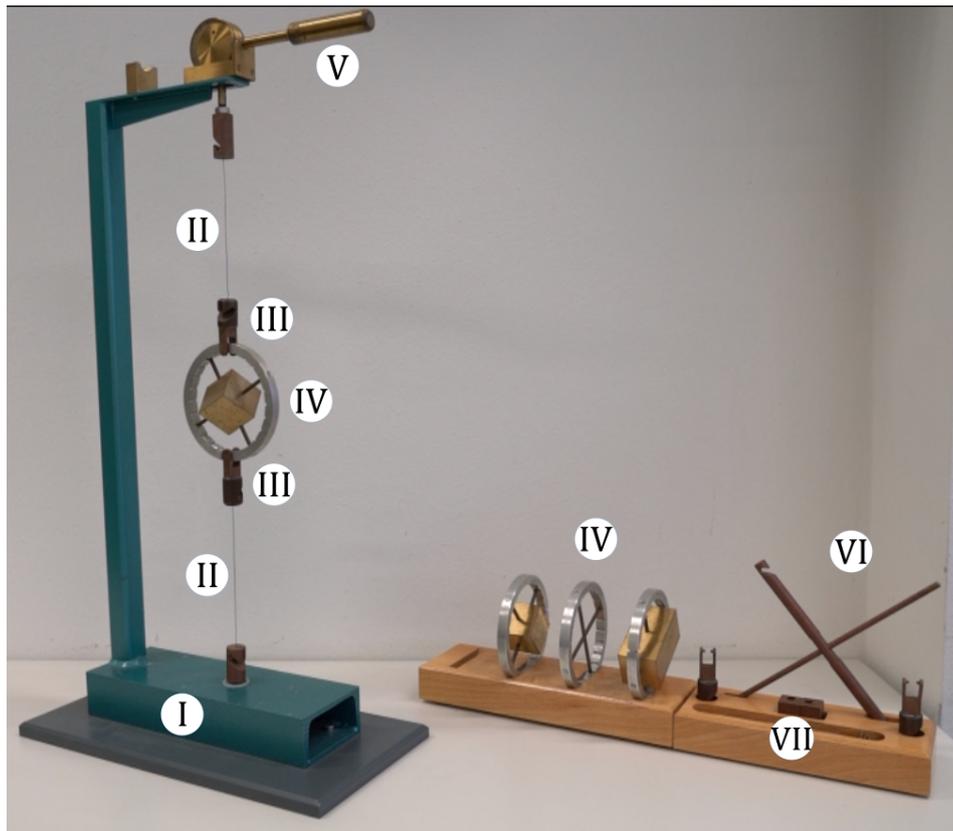


Abbildung 3: Aufbau des Torsionspendels mit Beschriftung der wesentlichen Komponenten: (I) Grundgerüst des Torsionspendels, (II) Torsionsdrähte, (III) Aufhängungen, (IV) Starrer Körper in Haltering, (V) Hebel zum Spannen und Entspannen der Torsionsdrähte, (VI) Metallkreuz mit Einkerbungen, Würfel mit Loch.

HINWEIS

Der Hebel sollte sich ohne großen Kraftaufwand umlegen lassen. Sollten Sie feststellen, dass das Umlegen des Hebels nicht möglich ist, so sind die gewählten Torsionsdrähte zu kurz. Versuchen Sie nicht, das Pendel in diesem Fall unter steigendem Kraftaufwand zu spannen, sondern entspannen Sie das Pendel und tauschen die verwendeten Torsionsdrähte gegen längere Drähte aus!

Die Aufhängung des Metallkreuzes funktioniert vollständig analog, bedarf aber keiner externen Aufhängung, da diese direkt am Kreuz integriert sind. Stellen Sie bei der Wahl der Torsionsdrähte sicher, dass sich mit diesen sowohl die Ringe wie auch das Kreuz einspannen lassen, bevor Sie mit der Versuchsdurchführung beginnen.

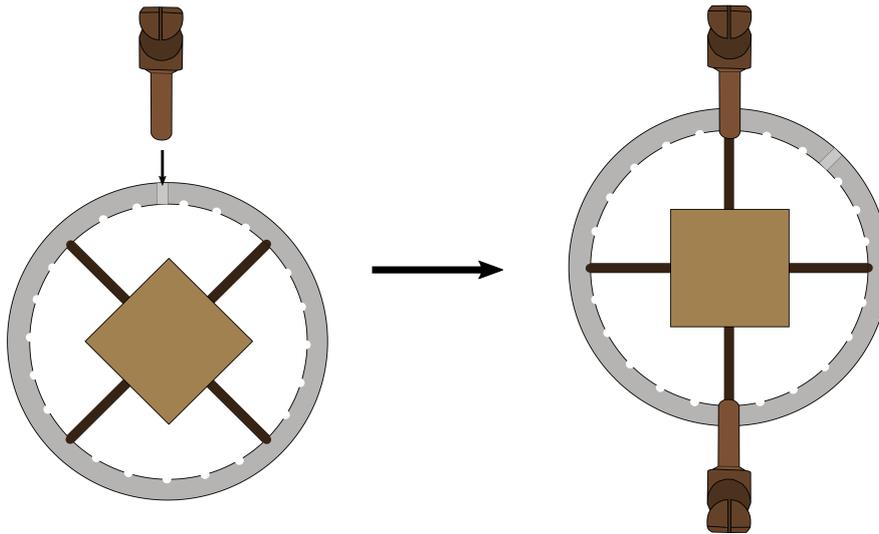


Abbildung 4: Schema zur richtigen Anordnung der Aufhängungen bei Untersuchung der verschiedenen starren Körper.

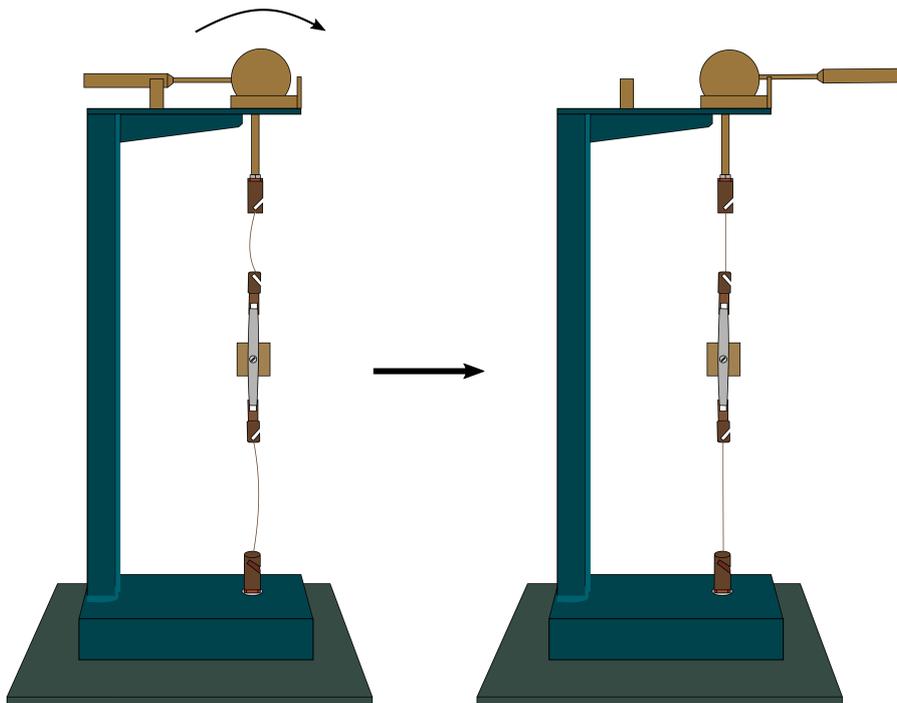


Abbildung 5: Schema zur Spannung des Torsionspendels.

2. Kreisel

Für die Durchführung der zweiten Hälfte des Versuchs wird ein motorisierter (schwerer) Kreisel verwendet, der in Abbildung 6 schematisch dargestellt ist. Ein mit 50

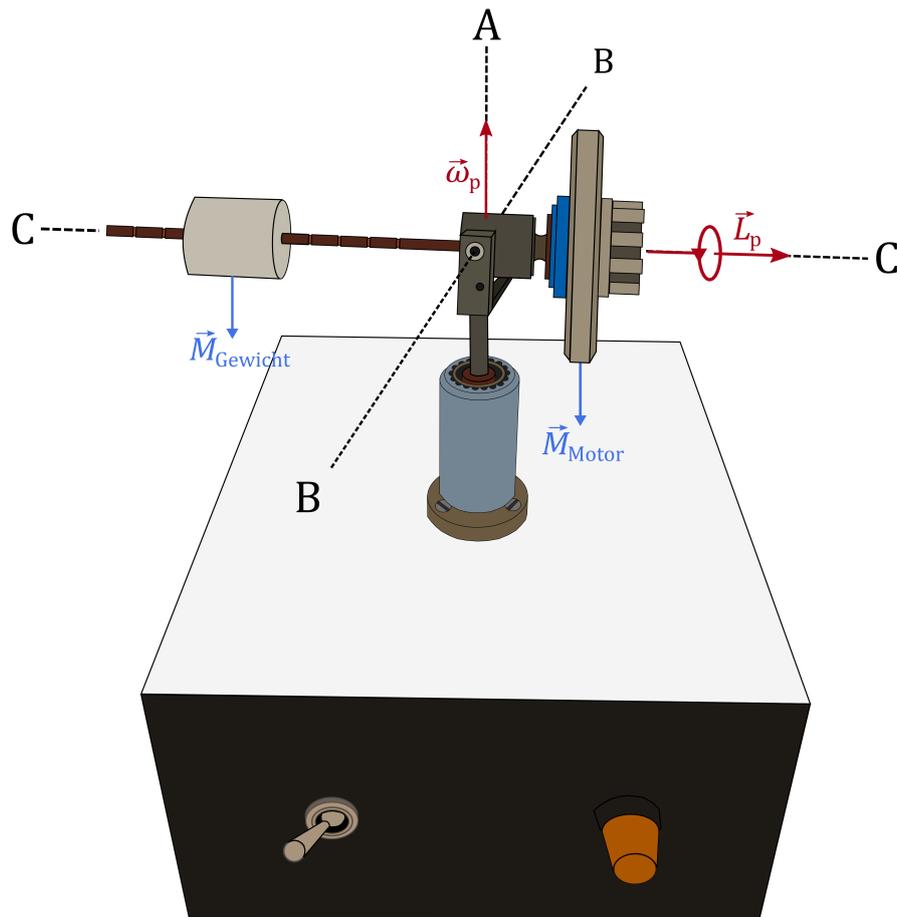


Abbildung 6: Schematischer Aufbau des schweren Kreisels. Der Kreisel ist drehbar gelagert, sodass Präzession um die Achse A beobachtet werden kann. C stellt die Figurenachse des Kreisels dar, die mit der Richtung des durch den Motor erzeugten Drehimpulses zusammenfällt. Weitere Informationen sind dem Fließtext zu entnehmen.

Umdrehungen pro Sekunde laufender Synchrotronmotor mit künstlich vergrößertem Trägheitsmoment liefert den Drehimpuls vom Betrag

$$|\vec{L}_{\text{Motor}}| = \Theta_{\text{Motor}} \cdot |\vec{\omega}_{\text{Motor}}|. \quad (31)$$

Der Drehimpulsvektor liegt zunächst exakt in der Figurenachse der Anordnung. Gegenüber dem Motor, auf der anderen Seite des drehbar gelagerten Auflagepunkts, ist ein auf einer Stange verschiebbares Gewicht angebracht. Auf die Drehachse des Kreisels wirken nun die durch die Schwerkraft hervorgerufenen Momente des Motorgewichts \vec{M}_{Motor} und des verschiebbaren Gewichts \vec{M}_{G} . Durch eine geeignete Verschiebung des Gewichts kann \vec{M}_{Motor} durch \vec{M}_{G} kompensiert bzw. überkompensiert werden. Falls keine vollständige Kompensation der Momente erfolgt, beginnt der Kreisel durch seine

drehbare Lagerung zu präzedieren. Der hierdurch entstehende Drehimpuls ergibt sich um die Achse A des Pendels (s. Abbildung 6).

Experiment

1.1 Bestimmung des Richtmoments mit Hilfe des Satzes von Steiner

Im Rahmen des ersten Teilversuchs soll das Richtmoment D^* der Pendelanordnung bestimmt werden, welches in den nachfolgenden Versuchen zur Berechnung des Trägheitsmoments verwendet wird. Stellen Sie somit sicher, dass die gewählten Torsionsdrähte auch zum Einspannen der Ringe mit den starren Körpern geeignet sind. Bei der Verwendung anderer Drähte zwischen verschiedenen Teilversuchen ist von Abweichungen des Richtmoments auszugehen, welches im Zuge der Fehlerminimierung vermieden werden sollte.

Versuchsdurchführung

- Hängen Sie das Metallkreuz in die Torsionsfäden ein und spannen Sie das Pendel.
- Bestimmen Sie die Masse der beiden kleinen Würfel mit Loch mit der Digitalwaage am Versuchsplatz.
- Stecken Sie die Messingklötze symmetrisch auf die horizontale Stange. Um das genaue Aufsetzen der Messingklötze zu erleichtern, ist die horizontale Stange im Abstand von 10 mm mit Einkerbungen versehen, in die die Klötze eingreifen. Dies ist schematisch in Abbildung 7 für den Abstand $r = 0$ dargestellt.

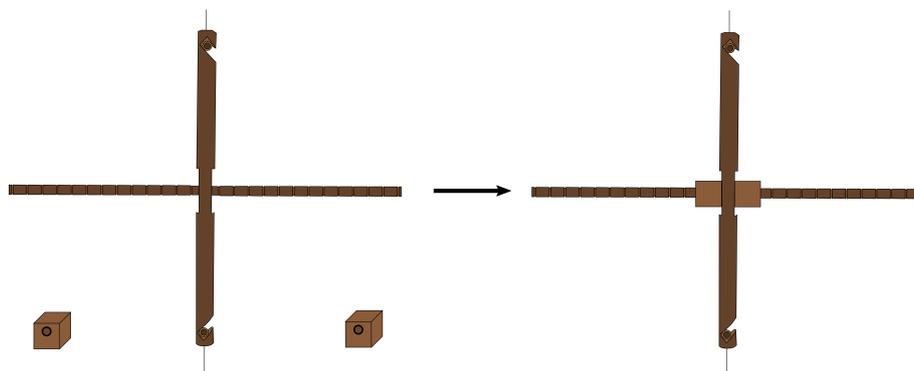


Abbildung 7: Schema zum korrekten Aufbau zur Bestimmung des Richtmoments der Anordnung D^* , beispielhaft für den Abstand $r = 0$ von der Drehachse.

- Messen Sie nun - beginnend mit dem kleinstmöglichen Abstand von der Drehachse - die Schwingungsdauer T für alle einstellbaren Abstände von der Drehachse r . Pro Abstand soll die Schwingungsdauer dreimal für je 20 Perioden aufgenommen werden. Verschieben Sie die Würfel bei Einstellung eines neuen Abstands stets symmetrisch.

Auswertungsaufgaben

- Stellen Sie T^2 als Funktion von r^2 graphisch dar und führen Sie einen linearen Fit durch.
- Bestimmen Sie aus der Steigung q der so ermittelten Ausgleichsgeraden das Richtmoment D^* .
Sie können hierzu verwenden, dass sich für die Schwingungsdauer unter Anwendung des Satzes von Steiner der Zusammenhang

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\Theta_0 + mr^2}{D^*} \quad (32)$$

ergibt. Θ_0 gibt das Trägheitsmoment für Stangen und Klötze für $r = 0$ an und m die Summe der Massen beider Klötze. Es gilt demnach für die Steigung q die folgende Verknüpfung:

$$q = 4\pi^2 \frac{m}{D^*}. \quad (33)$$

- Erklären Sie, wie genau der Satz von Steiner im Rahmen dieses Teilversuchs angewendet wurde.

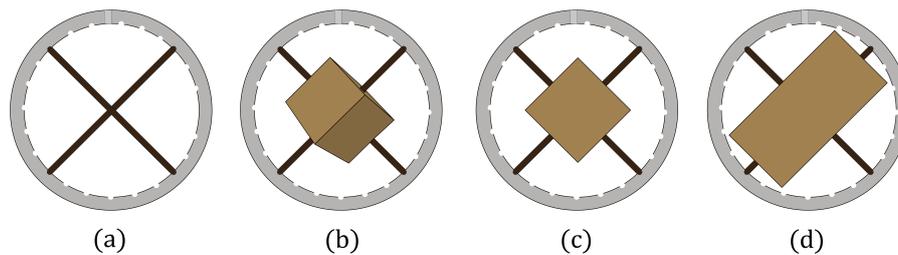


Abbildung 8: Übersicht über die zu vermessenen starren Körper.

1.2 Bestimmung des Trägheitsmoments verschiedener starrer Körper

Im Rahmen dieses Teilversuchs sollen analoge Messungen für verschiedene starre Körper durchgeführt werden. Abbildung 8 gibt hierbei eine Übersicht über die zu vermessenen Körper. Hierbei gilt zu beachten, dass die Messung des leeren Rings (Abb. 8 (a)) lediglich als Referenzmessung dient, um das Trägheitsmoment $\Theta_{0,\text{Ring}}$ der Aufhängevorrichtung zu messen. Dieser Wert soll für die spätere Korrektur der Messungen der zwei Würfel (Abb. 8 (b) und (c)) und des Quaders (Abb. 8 (d)) dienen, da während der Messungen natürlich immer zusätzlich zum zu bestimmenden Trägheitsmoment der Körper Θ_K auch das Trägheitsmoment der Aufhängevorrichtung, in der diese befestigt sind, mitgemessen wird.

Versuchsdurchführung

Für alle Messungen sind analog die folgenden Schritte zu wiederholen:

1. Hängen Sie einen Kreisring in die Torsionsdrähte ein und spannen Sie vorsichtig das Pendel.
2. Lenken Sie das Pendel geringfügig aus der Ruhelage aus und messen Sie die Periodendauer der Drehschwingung dreimal für jeweils 20 Perioden.
3. Entspannen Sie das Pendel und versetzen Sie die Halterungen um jeweils $\Delta\Phi = 15^\circ$. Achten Sie hierbei bitte darauf, dass die Halterungen vor dem erneuten Spannen des Pendels exakt gegenüberliegen (s. Abb. 4). **Diesen Schritt brauchen Sie nicht für den leeren Kreisring durchzuführen.**
4. Wiederholen Sie die Schritte 1. - 3. für alle Einkerbungen im Kreisring innerhalb eines Quadranten. Dies genügt aufgrund der Symmetrie der Würfel und des Quaders. **Diesen Schritt brauchen Sie nicht für den leeren Kreisring durchzuführen.**
5. Messen Sie mit Hilfe eines Messschiebers alle Kantenlängen des starren Körpers. Tauschen Sie den starren Körper aus und wiederholen Sie die Schritte 1. - 5.

Auswertungsaufgaben

Führen Sie die folgenden Auswertungsschritte analog für alle starren Körper durch.

- Bestimmen Sie aus den gemessenen Schwingungsdauern das zur entsprechenden Drehachse gehörende Trägheitsmoment $\Theta(\Phi)$. Verwenden Sie hierzu den Ausdruck

$$\Theta(\Phi) = \frac{DT^2}{4\pi^2} - \Theta_{0,\text{Ring}}, \quad (34)$$

wobei $\Theta_{0,\text{Ring}}$ das von Ihnen bestimmte Trägheitsmoment der Aufhängevorrichtung darstellt.

- Tragen Sie den Trägheitsradius $R(\Phi)$ über dem jeweiligen Winkel Φ in Polarkoordinaten auf. Diese Auftragung stellt den Schnitt des Trägheitsellipsoids mit der Ebene des Kreisrings der Aufhängung dar. Diskutieren Sie die Form des Trägheitsellipsoids und vergleichen Sie die starren Körper diesbezüglich untereinander.
- Berechnen Sie den Trägheitstensor der starren Körper und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den experimentell erhaltenen Ergebnissen. Verwenden Sie zur Berechnung die von Ihnen gemessenen Maße der Körper. Sie können die Masse eines Würfels als $m = 527\text{ g}$ und den Quader als zwei zusammengesetzte gleichartige Würfel annehmen. Die Darstellung erfolgt zweckmäßig bezüglich der Hauptträgheitsachsen des Koordinatensystems.

2.1 Kreiselbewegung - Veranschaulichung der Nutation und Präzession

Verwenden Sie für diesen Teilversuch den kleinen motorisierten Kreisel.

Versuchsdurchführung

Erhaltung des Drehimpulses im momentenfreien Fall

1. Kompensieren Sie das vom Motor verursachte Moment durch eine entsprechende Verschiebung des Gewichts. Erklären Sie, woran sie die unvollständige, vollständige und Überkompensation erkennen können.
2. Kippen Sie den Kreiselfuß geringfügig und vorsichtig an und beobachten Sie die Veränderung der Richtung des Drehimpulses. Notieren und erklären Sie Ihre Beobachtungen.
3. Bestimmen Sie für den momentenfreien Fall die Position des Gewichts von der Lagerung, bestimmen Sie die Masse m_{Gewicht} mit einer Digitalwaage und messen Sie die Maße des Gewichts mit einem Messschieber.

Nutation im momentenfreien Fall

4. Kompensieren Sie weiterhin das vom Motor verursachte Moment, sodass sich der momentenfreie Fall ergibt.
5. Erteilen Sie dem Kreiselssystem durch einen kurzen Stoß senkrecht zur Drehimpulsrichtung ein Moment.
6. Notieren Sie ihre Beobachtungen bezüglich der dadurch hervorgerufenen Veränderung der Kreiselbewegung.

Präzession

7. Verschieben Sie das Gewicht sowohl bis zum Lager hin als auch bis ans Ende des Balkens. Notieren Sie ihre Beobachtungen bezüglich der Veränderung der Kreiselbewegung.

Auswertungsaufgaben

- Bestimmen Sie das Motormoment $|\vec{M}_{\text{Motor}}|$ aus den Messdaten in Schritt 3 der Versuchsdurchführung dieses Teilversuchs.
- Erklären und diskutieren Sie alle von Ihnen aufgenommenen Beobachtungen.

2.2 Bestimmung des Motormoments aus der Kreiselpräzession

Versuchsdurchführung

- Messen Sie die Winkelgeschwindigkeit $|\vec{\omega}_p|$ der Präzessionsbewegung als Funktion des am Kreisels angreifenden Moments für 10 verschiedene Momente. Das Motormoment $|\vec{M}_{\text{Motor}}|$ ist aus dem vorherigen Teilversuch bekannt und konstant, weshalb die Variation des angreifenden Gesamtmoments über die Veränderung des Gewichtabstands von der Lagerung erfolgt. Messen Sie diesen Abstand nach jeder Veränderung, um $|\vec{M}_{\text{Gewicht}}|$ bestimmen zu können.

Auswertungsaufgaben

- Tragen Sie das resultierende Drehmoment $|\vec{M}_{\text{result.}}| = |\vec{M}_{\text{Motor}}| - |\vec{M}_{\text{Gewicht}}|$ über der inversen Umlaufdauer der Präzession $1/T_P$ auf.
- Führen Sie einen linearen Fit durch und bestimmen Sie das Trägheitsmoment des Motors Θ_{Motor} aus der Steigung der resultierenden Gerade. Verwenden Sie dafür den folgenden Zusammenhang:
Der Kreisel kann als schneller Kreisel approximiert werden. Die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung lässt sich demnach formulieren als

$$|\vec{\omega}_p| = \frac{|\vec{M}_{\text{result.}}|}{|\vec{M}_{\text{Motor}}|} = \frac{|\vec{M}_{\text{Motor}}| - |\vec{M}_{\text{Gewicht}}|}{\Theta_{\text{Motor}} \cdot |\vec{\omega}_{\text{Motor}}|}. \quad (35)$$

$\Theta_{\text{Motor}} \cdot |\vec{\omega}_{\text{Motor}}|$ ist eine Konstante und es gilt $|\vec{\omega}_p| = 2\pi/T_P$, womit sich der Zusammenhang

$$\frac{1}{T_P} = \frac{|\vec{M}_{\text{Motor}}| - |\vec{M}_{\text{Gewicht}}|}{2\pi \cdot \Theta_{\text{Motor}} \cdot |\vec{\omega}_{\text{Motor}}|} \quad (36)$$

ergibt. Durch Umstellung der Gleichung kann Θ_{Motor} bestimmt werden.