

**INVARIANZPRINZIP UND LOKALER GRENZWERTSATZ
FÜR DAS RANDOM CONDUCTANCE MODEL**

Habilitationsschrift

vorgelegt von

Dr. rer. nat. Sebastian Andres

aus Berlin

für das Fach Mathematik an der

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT DER
RHEINISCHEN FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT BONN

Januar 2015

Diese kumulative Schrift gründet sich auf die folgenden Originalarbeiten:

- (1) S. Andres, M. T. Barlow, J.-D. Deuschel, B. M. Hambly, *Invariance Principle for the Random Conductance Model*, Probab. Theory Related Fields, 156, No. 3–4, 535–580 (2013).
- (2) S. Andres, J.-D. Deuschel, M. Slowik, *Invariance Principle for the Random Conductance Model in a degenerate ergodic Environment*, to appear in Ann. Probab., available at arXiv:1306.2521.
- (3) S. Andres, J.-D. Deuschel, M. Slowik, *Harnack inequalities on weighted graphs and some applications to the random conductance model*, Preprint, available at arXiv:1312.5473.
- (4) S. Andres, J.-D. Deuschel, M. Slowik, *Heat kernel estimates for random walks with degenerate weights*, Preprint, available at arXiv:1412.4338.
- (5) S. Andres, *Invariance Principle for the Random Conductance Model with dynamic bounded Conductances*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 50, no. 2, 352–374 (2014).

1. ALLGEMEINE VORBEMERKUNGEN

Irrfahrten in zufälliger Umgebung waren Gegenstand intensiver Forschungsaktivitäten in den letzten 30 Jahren. Obgleich diese Modelle vergleichsweise einfache mathematische Objekte sind, weisen sie eine Vielzahl von mathematisch interessanten Phänomenen auf, die zum Teil zu überraschenden Resultaten führen.

Hauptgegenstand dieser Schrift ist eine bestimmte Klasse von solchen Irrfahrten in zufälliger Umgebung, das sog. *Random Conductance Model* (RCM). Was diese Klasse im Vergleich zu anderen Modellen auszeichnet, ist die Tatsache, dass in diesem Modell die Irrfahrt eine reversible Markovkette ist. Dies mag einerseits etwas restriktiv erscheinen, es stellte sich aber heraus, dass dieses Modell eine Vielzahl von teilweise recht überraschenden Verbindungen zu anderen Gebieten aufweist. Zu erwähnen sind hier unter anderem zufällige elektrische Netzwerke, Perkolationstheorie, Fallenmodelle wie z.B. das Bouchaud-Modell und ihr Zusammenhang zum Aging-Phänomen, Gradientenmodelle (vgl. [18]), stochastische $\nabla\Phi$ -Interface-Modelle bzw. Ginzburg-Landau-Modelle [28], sowie Homogenisierungstheorie (vgl. [30]). Für weitere Details sei hier auf den Übersichtsartikel [15] verwiesen.

2. MODELL UND FRAGESTELLUNGEN

Bezeichne (\mathbb{Z}^d, E_d) das d -dimensionale Euklidische Gitter mit $d \geq 2$, d.h. den Graphen mit Knotenmenge \mathbb{Z}^d und Kantenmenge E_d gegeben durch die Menge aller ungerichteten Kanten zwischen nächsten Nachbarn, also $E_d := \{\{x, y\} : x, y \in \mathbb{Z}^d, |x - y| = 1\}$. Man betrachte weiterhin den messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F}) = ((0, \infty)^{E_d}, \mathcal{B}((0, \infty)^{\otimes E_d}))$ und statte den Graphen (\mathbb{Z}^d, E_d) mit positiven Gewichten $\omega = \{\omega(e) : e \in E_d\} \in \Omega$ aus. In Anlehnung an die Interpretation solcher Umgebungen als elektrische Netzwerke nennt man das Gewicht $\omega(e)$ auch Leitfähigkeit (engl. 'conductance') der Kante e . Zur Vereinfachung der Notation setzt man für $x, y \in \mathbb{Z}^d$,

$$\omega_{xy} = \omega_{yx} := \omega(\{x, y\}), \quad \forall \{x, y\} \in E_d, \quad \omega_{xy} := 0, \quad \forall \{x, y\} \notin E_d.$$

Sei nun \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, \mathcal{F}) und \mathbb{E} der zugehörige Erwartungswert, und sei $(\tau_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ die Familie von Verschiebungsoperatoren definiert durch

$$\tau_z : \Omega \rightarrow \Omega, \quad (\tau_z \omega)_{xy} := \omega_{x+z, y+z}, \quad \forall \{x, y\} \in E_d.$$

Im Folgenden wird stets vorausgesetzt, dass die Koordinaten $(\omega(e))_{e \in E_d}$ unter \mathbb{P} bzgl. $(\tau_z)_{z \in \mathbb{Z}^d}$ ergodisch sind, d.h. $\mathbb{P} \circ \tau_x^{-1} = \mathbb{P}$ für alle $x \in \mathbb{Z}^d$ und $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ für jede invariante Menge $A \in \mathcal{F}$ (d.h. $\tau_x(A) = A$ für alle $x \in \mathbb{Z}^d$).

Von Interesse sind nun Irrfahrten auf \mathbb{Z}^d in stetiger Zeit mit Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben durch $p^\omega(x, y) = \omega_{xy} / \mu_x^\omega$ mit $\mu_x^\omega := \sum_y \omega_{xy}$. Hierfür gibt es zwei kanonische Beispiele. Die erste Irrfahrt ist der sog. *constant speed random walk* (CSRW) $Y = (Y_t)_{t \geq 0}$, der an allen besuchten Knoten bis zum nächsten Sprung zufällige i.i.d. $\exp(1)$ -verteilte Wartezeiten verbringt, während die zweite Irrfahrt $X = (X_t)_{t \geq 0}$, der sog. *variable speed random walk* (VSRW), am Knoten x eine exponential-verteilte Wartezeit mit Erwartungswert $1/\mu_x^\omega$ verbringt, bevor sie zum

Knoten y mit Wahrscheinlichkeit $p^\omega(x, y)$ springt. Die zugehörigen Generatoren sind gegeben durch

$$(\mathcal{L}_C^\omega f)(x) = \frac{1}{\mu_x^\omega} \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \omega_{xy} (f(y) - f(x)) \quad \text{bzw.} \quad (\mathcal{L}_V^\omega f)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \omega_{xy} (f(y) - f(x)).$$

Der CSRW ist eine symmetrische Markovkette mit stationärem Maß μ^ω und der VSRW ist symmetrisch bzgl. des Zählmaßes. Man bezeichne nun mit

$$q^\omega(t, x, y) := \frac{\mathbb{P}_x^\omega[Y_t = y]}{\mu_y^\omega} \quad \text{bzw.} \quad p^\omega(t, x, y) := \mathbb{P}_x^\omega[X_t = y], \quad x, y \in \mathbb{Z}^d, t \geq 0,$$

den Wärmeleitungskern oder *heat kernel* von \mathcal{L}_C^ω bzw. \mathcal{L}_V^ω , also die Übergangswahrscheinlichkeiten des CSRW Y bzw. des VSRW X normalisiert durch das jeweilige symmetrisierende Maß.

Dieses Modell einer symmetrischen Irrfahrt in zufälliger Umgebung ist in der Literatur bekannt als *Random Conductance Model* (RCM). Von Interesse ist nun das Langzeitverhalten der Irrfahrt und des heat kernels, insbesondere ist man an einem \mathbb{P} -fast sicherem Invarianzprinzip oder funktionalem Grenzwertsatz (FCLT) für die Irrfahrt, sowie einem lokalen Grenzwertsatz und Gauß'schen Abschätzungen für den heat kernel interessiert. Mathematisch etwas genauer formuliert ist die Gültigkeit folgender Aussagen zu untersuchen:

- (A1) **Quenched Invarianzprinzip (QFCLT)** für Y : Sei $Y_t^{(n)} = \frac{1}{n} Y_{n^2 t}$ und W eine Brown'sche Bewegung auf \mathbb{R}^d . Für \mathbb{P} -f.a. ω gilt unter P_0^ω , dass

$$Y^{(n)} \Rightarrow \Sigma_C \cdot W$$

für $n \rightarrow \infty$. Hierbei ist Σ_C eine (nicht-degenerierte?) Diffusivitätsmatrix.

- (A2) **Lokaler Grenzwertsatz für $q_t^\omega(x, y)$** : Seien $0 < T_1 < T_2$ und $K > 0$ beliebig. Für \mathbb{P} -f.a. ω gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq K} \sup_{t \in [T_1, T_2]} \left| n^d q_{n^2 t}^\omega(0, \lfloor nx \rfloor) - a k_t^{\Sigma_C}(x) \right| = 0.$$

Hierbei ist $a = 1/\mathbb{E}[\mu^\omega(0)]$, $\lfloor x \rfloor = (\lfloor x_1 \rfloor, \dots, \lfloor x_d \rfloor)$ für ein $x \in \mathbb{R}^d$, und für eine Matrix Σ bezeichnet k_t^Σ den Übergangskern von $\Sigma \cdot W$, d.h.

$$k_t^\Sigma(x) := \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^d \det \Sigma^2}} \exp\left(-x \cdot (\Sigma^2)^{-1} x / 2t\right)$$

ist die Dichte der Normalverteilung mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $\Sigma^2 \cdot t$ mit $\Sigma^2 = \Sigma \cdot \Sigma^T$.

- (A3) **Gauß'sche Abschätzungen an $q_t^\omega(x, y)$** : Für \mathbb{P} -f.a. ω existieren Zufallsvariablen $N_x = N_x(\omega)$, $x \in \mathbb{Z}^d$, und positive Konstanten c_1 und c_2 , so dass

$$q_t^\omega(x, y) \leq c_1 t^{-d/2} e^{-c_2 |x-y|^2/t}, \quad \text{falls } t \geq |x-y| \vee N_x,$$

und es gelten ähnliche untere Schranken.

Analoge Fragestellungen ergeben sich für den VSRW X und $p^\omega(t, x, y)$, wobei beim lokalen Grenzwertsatz $a = 1$ zu wählen ist. Wie die unten dargestellten Resultate zeigen, sind diese Aussagen nicht immer erfüllt, insbesondere gibt es Fälle, in denen ein Invarianzprinzip vorliegt, aber ein lokaler Grenzwertsatz nicht gilt.

Die verbleibenden Abschnitte sind wie folgt gegliedert: In Abschnitt 3 wird der Fall von i.i.d. Gewichten behandelt. Nach einem kurzen Überblick über frühere Resultate wird dann das Invarianzprinzip für allgemeine i.i.d. Gewichte aus [3] formuliert. In Abschnitt 4 werden dann die Resultate für allgemeine ergodische Umgebungen dargestellt, und zwar das Invarianzprinzip aus [5], der lokale Grenzwertsatz aus [4] und die Harnack-Ungleichungen, auf denen dessen Beweis basiert, sowie die oberen Gauß'schen Abschätzungen aus [6]. In Abschnitt 5 werden dann erste Ergebnisse für das dynamische RCM zusammengefasst. Abschließend werden in Abschnitt 6 kurz einige offene Probleme als Ausblick aufgelistet.

3. DER I.I.D. FALL

In diesem Abschnitt sei vorausgesetzt, dass die Zufallsvariablen $(\omega(e))_{e \in E_d}$ i.i.d. sind und – im Gegensatz zu den anderen Abschnitten – mit positiver \mathbb{P} -Wahrscheinlichkeit den Wert 0 annehmen dürfen. Man beachte, dass im Fall $\omega_e = 0$ die Irrfahrten X und Y niemals entlang der Kante e springen können. Wenn insbesondere $p_+ = \mathbb{P}(\omega_e > 0)$ kleiner ist als $p_c = p_c(E_d)$, die kritische Wahrscheinlichkeit für Kantenperkolations auf \mathbb{Z}^d , dann können die Irrfahrten X und Y sich \mathbb{P} -f.s. nur innerhalb einer endlichen Menge bewegen, und in diesem Fall wird zum Beispiel die Frage nach einem Invarianzprinzip trivial. Um diese uninteressante Situation auszuschließen, sei im Folgenden angenommen, dass

$$\mathbb{P}(\omega_e > 0) > p_c.$$

Sei $\mathcal{O}_1 = \{e : \omega_e > 0\}$ die Menge der offenen Kanten, d.h. der Kanten mit positivem Gewicht, die X und Y potentiell durchlaufen können, und sei $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_1)$ der \mathbb{P} -fast sicher eindeutige, unendliche zusammenhängende Cluster von offenen Kanten aus \mathcal{O}_1 . Um ferner sicherzustellen, dass die im Ursprung startende Irrfahrt sich innerhalb dieses superkritischen Perkolationsclusters bewegt, werden die Aussagen (A1)–(A3) bzgl. des konditionierten Maßes

$$\mathbb{P}_1(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot | 0 \in \mathcal{C}_1)$$

betrachtet.

3.1. Frühere Resultate. Im i.i.d. Fall waren die Fragestellungen (A1)–(A3) für das RCM in den letzten zehn Jahren Gegenstand intensiver Forschung, wobei oft gewisse Einschränkungen an den Wertebereich der (ω_e) gemacht wurden. Hier ein kurzer Überblick:

(1) Falls $\omega_e \in \{0, 1\}$ (mit $p_+ > p_c$) stimmt Y mit der einfachen Irrfahrt auf einem (superkritischen) Perkolationscluster überein – siehe [8, 37] für heat kernel

Abschätzungen, [44, 13, 36] für ein Invarianzprinzip und [12] für einen lokalen Grenzwertsatz.

(2) Im gleichmäßig elliptischen Fall, d.h. $\mathbb{P}(c^{-1} \leq \omega_e \leq c) = 1$ für ein $c \geq 1$, folgen Gauß'sche Abschätzungen aus den allgemeineren Resultaten in [22]; ein Invarianzprinzip wurde in [44] gezeigt. Ein lokaler Grenzwertsatz ist in diesem Fall eine Konsequenz aus diesen Resultaten, siehe [12].

(3) Der Fall $\omega_e \in [0, 1]$ \mathbb{P} -f.s. (mit $p_+ > p_c$) wurde in [14, 17, 35] untersucht, wobei die Arbeiten [14, 17] eine entsprechende Irrfahrt in diskreter Zeit betrachten. Für den CSRW wurde in [17, 35] ein Invarianzprinzip mit nicht-degenerierter Kovarianzmatrix $\Sigma_C^2 = \sigma_C^2 I$ gezeigt. (Hier und im Folgenden bezeichnet I die Einheitsmatrix.)

Weiterhin wurde in [14] ein Beispiel in Dimension $d \geq 5$ konstruiert, für welches sub-Gauß'sches heat kernel Verhalten vorliegt, d.h. *Gauß'sche Abschätzungen und ein lokaler Grenzwertsatz gelten im Allgemeinen nicht* in diesem Fall (siehe auch [16] für $d = 4$).

(4) Im Fall $\omega_e \geq 1$ \mathbb{P} -f.s. wurden in [11] Gauß'sche Abschätzungen und ein lokaler Grenzwertsatz für den VSRW bewiesen, sowie ein Invarianzprinzip für VSRW und CSRW.

3.2. Invarianzprinzip im allgemeinen i.i.d. Fall. In [3] wurden die Techniken aus [11, 17, 35] kombiniert, um ein Invarianzprinzip für allgemeine i.i.d. Umgebungen zu zeigen:

Satz 3.1 ([3]). *Sei $d \geq 2$ und sei $(\omega_e, e \in E_d)$ i.i.d., $\omega_e \geq 0$ \mathbb{P} -f.s. und $\mathbb{P}(\omega_e > 0) > p_c$.*

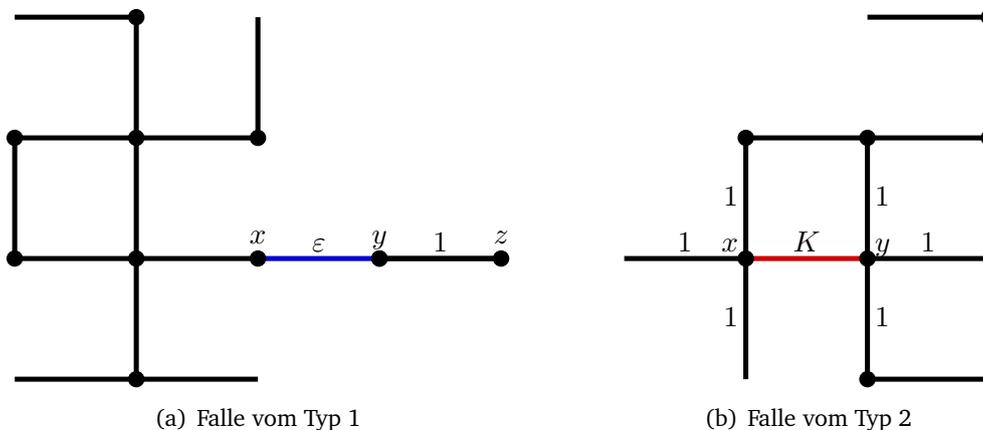
(i) *Sei X der VSRW mit $X_0 = 0$. Dann konvergiert \mathbb{P}_1 -f.s. $X^{(n)}$ in Verteilung (unter P_0^ω) gegen eine Brown'sche Bewegung auf \mathbb{R}^d mit Kovarianzmatrix $\Sigma_V^2 = \sigma_V^2 I$, wobei $\sigma_V > 0$ deterministisch ist.*

(ii) *Sei Y der CSRW mit $Y_0 = 0$. Dann konvergiert \mathbb{P}_1 -f.s. $Y^{(n)}$ in Verteilung (unter P_0^ω) gegen eine Brown'sche Bewegung auf \mathbb{R}^d mit Kovarianzmatrix $\Sigma_C^2 = \sigma_C^2 I$, wobei*

$$\sigma_C^2 = \begin{cases} \sigma_V^2 / (\mathbb{E}_1[\mu_0]), & \text{falls } \mathbb{E}[\omega_e] < \infty, \\ 0, & \text{falls } \mathbb{E}[\omega_e] = \infty. \end{cases}$$

Die wesentlichen Schwierigkeiten bei der Betrachtung des allgemeinen RCM – im Gegensatz zum Beispiel zu einfachen Irrfahrten auf Perkulationsclustern – werden durch 'Fallen' verursacht, die durch Kanten mit sehr hohem oder sehr niedrigem Kantengewicht entstehen.

Als ein Beispiel für eine Falle vom Typ 1 betrachte man Knoten x, y, z mit $0 < \varepsilon = \omega_{xy} \ll 1$ und $\omega_{yz} = O(1)$, so dass die einzige Verbindung der Kante $\{y, z\}$ zum Rest des Clusters \mathcal{C}_1 durch den Punkt x führt. Ausgehend vom Punkt y werden der CSRW wie auch der VSRW $O(\varepsilon^{-1})$ Zeiteinheiten an dieser Kante verbringen, bevor sie die Kante mit kleinem Gewicht ε kreuzen, x treffen und schließlich sich



zum Rest von \mathcal{C}_1 bewegen. In [14] wurde mit Hilfe solcher und ähnlicher Fallen vom Typ 1 ein Beispiel mit sub-Gauß'schem heat kernel Verhalten konstruiert, d.h. diese Fallen sind die Ursache dafür, dass Gauß'sche Abschätzungen bzw. ein lokaler Grenzwertsatz im Allgemeinen nicht gelten.

Eine Falle vom Typ 2 besteht aus einer Kante zwischen zwei Punkten $x, y \in \mathcal{C}_1$ mit $\omega_{xy} = K \gg 1$ und $\omega_e = O(1)$ für alle weiteren Kanten e mit einem Endpunkt in $\{x, y\}$. In einer solchen Konfiguration wird der CSRW $O(K)$ -mal von x nach y und zurück springen, bevor er diese Falle verlässt, er wird dort also $O(K)$ Zeiteinheiten verbringen. Der VSRW hingegen wird zwar genauso $O(K)$ -mal zwischen x und y hin- und herspringen, er wird aber bei jedem Besuch von x bzw. y dort nur eine erwartete Zeit von $1/\mu_x^\omega \approx 1/K$ bzw. $1/\mu_y^\omega \approx 1/K$ verbringen und somit die Falle in $O(1)$ Zeiteinheiten verlassen.

Solche Fallen vom Typ 2 erklären also das unterschiedliche Grenzverhalten von CSRW und VSRW im Fall $\mathbb{E}[\omega_e] = \infty$. Insbesondere verschwindet beim CRSW im Limes die Varianz. Um hingegen einen nicht-trivialen Skalenlimes für den CSRW zu erhalten, muss man die Skalierung leicht modifizieren. Falls nämlich $\mathbb{P}(\omega_e > t) \sim t^{-\alpha}$ konvergiert $n^{-\alpha} X_{n^2 t}$ zu einem Prozess FK(α), genannt 'fractional kinetic motion' mit Parameter α (siehe [10]).

3.3. Methode und Beweisideen. Der Beweis von Satz 3.1 basiert auf der etablierten Technik von Kipnis-Varadhan [33] mit dem Prozess der 'environment viewed from the particle' sowie der Korrekturmethode von Kozlov [34]. Um ein QFCLT für den VSRW zu zeigen, besteht die Hauptidee darin, sog. harmonische Koordinaten einzuführen. Man konstruiert einen sog. *Korrektor* $\chi: \Omega \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, so dass

$$\Phi(\omega, x) = x - \chi(\omega, x)$$

eine \mathcal{L}_V^ω -harmonische Funktion ist, d.h. für \mathbb{P} -f.a. ω und alle $x \in \mathbb{Z}^d$ gilt

$$\mathcal{L}_V^\omega \Phi(\omega, x) = \sum_y \omega_{xy} (\Phi(\omega, y) - \Phi(\omega, x)) = 0.$$

Darüber hinaus muss der Korrektor χ translationsinvariant sein in dem Sinne, dass er \mathbb{P} -f.s. der folgenden *Kozykel Bedingung* genügt:

$$\chi(\omega, x + y) - \chi(\omega, x) = \chi(\tau_x \omega, y), \quad x, y \in \mathbb{Z}^d.$$

Der Korrektor kann z.B. mit Hilfe einer einfachen Projektion des trivialen Kozykels $\Pi(\omega, x) = x$ in einem gewissen Hilbertraum konstruiert werden. Hierfür ist die Symmetrie des Operators \mathcal{L}_V^ω wesentlich. Aus der Harmonizität von Φ bzgl. \mathcal{L}_V^ω folgt nun, dass für \mathbb{P} -f.a. ω der Prozess

$$M_t = X_t - \chi(\omega, X_t)$$

ein Martingal unter \mathbb{P}_0^ω ist. Ein Invarianzprinzip für Martingale kann recht einfach mit Standardkriterien nachgewiesen werden (siehe z.B. [24, 32]). Ein QFCLT für X folgt somit, wenn man gezeigt hat, dass der Korrektor \mathbb{P} -fast sicher sublinear ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|x| \leq n} \frac{|\chi(\omega, x)|}{n} = 0. \quad (3.1)$$

Denn diese Kontrolle an den Korrektor impliziert, dass für jedes $T > 0$ und \mathbb{P} -f.a. ω ,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \frac{1}{n} \left| \chi(\omega, n X_t^{(n)}) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{in } \mathbb{P}_0^\omega\text{-Wahrscheinlichkeit.}$$

In Kombination mit dem QFCLT für den Martingalteil liefert dies ein Invarianzprinzip für den VSRW X . Ein Invarianzprinzip für den CSRW Y folgt dann aus der Tatsache, dass die Irrfahrt Y nach einer zufälligen Zeittransformation mit X übereinstimmt und diese Zeittransformation mit Hilfe des Ergodensatzes kontrolliert werden kann.

Die wesentliche Schwierigkeit im Beweis des Invarianzprinzips ist der Nachweis der Sublinearität in (3.1). Wegen der Kozykel-Eigenschaft und der Ergodizität der Umgebung kann man leicht verifizieren, dass der Korrektor entlang der Koordinatenachsen sublinear ist:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \chi(\omega, n e_i) = 0, \quad i = 1, \dots, d \quad \mathbb{P}\text{-a.s.}$$

In Dimension $d = 2$ genügt dies und die Harmonizität von Φ um (3.1) zeigen, siehe [13, 15]. In höheren Dimensionen $d \geq 3$ basieren die Beweise auf Abschätzungen an den heat kernel ([11, 13, 36, 44]). Wie aber bereits erwähnt gibt es im allgemeinen RCM Fälle, wo geeignete Abschätzungen nicht gelten, so dass die Argumente angepasst werden müssen.

Die Grundidee ist ähnlich zu der in [17] oder [35]. An Stelle der originalen Irrfahrt X auf dem Cluster $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_1)$ betrachtet man für ein fixiertes $K \gg 1$ einen Prozess Z^K , der sich nur auf dem kleineren Cluster $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_2)$ bewegt. Hierbei ist \mathcal{O}_2 gerade die Menge der offenen Kanten ausgenommen derjenigen, die potentiell Fallen erzeugen können, d.h. Kanten mit sehr hohem Kantengewicht ($e \in E_d$ mit $\omega_e < 1/K$) oder sehr niedrigem Kantengewicht ($e \in E_d$ mit $\omega_e > K$), sowie Kanten, die zu den vorherigen benachbart sind. Sofern K groß genug ist, existiert weiterhin ein unendlicher, zusammenhängender Cluster $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_2)$ aus Kanten in \mathcal{O}_2 .

Der Prozess Z^K ist dann eine Zeittransformation von Y auf die Menge $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_2)$, d.h. solange Y sich auf $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_2)$ bewegt, stimmen Z^K und Y überein, und wenn Y eines der Löcher (=zusammenhängende Komponenten von $\mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_1) \setminus \mathcal{C}_\infty(\mathcal{O}_2)$) besucht, springt Z^K direkt zu dem Knoten, an dem Y das Loch wieder verlässt.

Der Prozess Z^K ist wieder ein symmetrischer Prozess, aber im Gegensatz zu Y kann er nach Konstruktion nicht in Fallen geraten und hat nach oben und unten beschränkte Sprungraten. Insbesondere kann man Gauß'sche Abschätzungen an den heat kernel von Z^K zeigen und mit Hilfe der oben skizzierten Korrektormethode erhält man ein Invarianzprinzip für Z^K .

Aber Z^K springt über die Löcher, die durch das Löschen von Kanten mit sehr hohem und niedrigem Gewicht entstanden sind. Im i.i.d. Fall kann die Größe dieser Löcher mit Hilfe von Perkolationstheorie gut kontrolliert werden, so dass schließlich mit einem Vergleichsargument ein QFCLT für X aus dem für Z^K folgt.

Zusammengefasst liegt im RCM mit allgemeinen i.i.d. Gewichten die recht ungewöhnliche Situation vor, in der ein Invarianzprinzip also ein funktionaler Zentraler Grenzwertsatz gilt, aber ein entsprechender lokaler Grenzwertsatz im Allgemeinen nicht erfüllt ist. Dies mag auf den ersten Blick kontraintuitiv erscheinen, ist aber durchaus nachzuvollziehen. Eine Verteilungskonvergenz wie beim Invarianzprinzip ist eine Aussage über typisches Verhalten, während für den lokalen Grenzwertsatz – also die gleichmäßige Konvergenz der zugehörigen Übergangsdichten – auch seltene Ereignisse in Betracht gezogen werden müssen. Wie oben dargestellt können Fallen als solche 'seltene Ereignisse' die Gültigkeit eines lokalen Grenzwertsatzes verhindern, da man aber eine sehr gute Kontrolle über die Größe der Löcher im Perkulationscluster hat, auf denen diese Fallen auftreten, gilt das Invarianzprinzip für allgemeine nicht-negative i.i.d. Gewichte. Es sind hierfür auch keine Momentenbedingungen erforderlich im Gegensatz zur Situation von allgemeinen ergodischen Gewichten, die als nächstes behandelt werden.

4. DER ERGODISCHE FALL

In diesem Abschnitt werden die Aussagen (A1)–(A3) für allgemeine ergodische Umgebungen diskutiert.

Annahme 4.1. *Das Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} erfülle die folgenden Bedingungen:*

- (i) $\mathbb{P}[0 < \omega(e) < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[\omega(e)] < \infty$ für alle $e \in E_d$.
- (ii) \mathbb{P} ist ergodisch bzgl. der Verschiebungsoperatoren auf \mathbb{Z}^d , d.h. $\mathbb{P} \circ \tau_x^{-1} = \mathbb{P}$ für alle $x \in \mathbb{Z}^d$ und $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ für jedes $A \in \mathcal{F}$ mit $\tau_x(A) = A$ für alle $x \in \mathbb{Z}^d$.

Desweiteren wird die folgende Momentenbedingung eine zentrale Rolle spielen.

Annahme 4.2. *Es existieren $p, q \in (1, \infty]$ mit*

$$1/p + 1/q < 2/d,$$

so dass

$$\mathbb{E}[(\omega(e))^p] < \infty \quad \text{und} \quad \mathbb{E}[(1/\omega(e))^q] < \infty, \quad e \in E_d. \quad (4.1)$$

4.1. Invarianzprinzip. Für das RCM mit ergodischen und unbeschränkten Kantengewichten kann man kein Invarianzprinzip in der Allgemeinheit wie in Satz 3.1 für den i.i.d. Fall erwarten, siehe zum einen [11, Remark 6.6] für ein Beispiel für einen VSRW, der in endlicher Zeit explodiert. Zum anderen konstruierten Barlow, Burdzy und Timar [9] ein Beispiel auf \mathbb{Z}^2 , für das ein QFCLT nicht gilt (aber ein schwacher 'annealed' FCLT gilt). In diesem Beispiel gilt (4.1) für $p, q \in (0, 1)$, aber $\mathbb{E}[\omega(e)] = \infty$ und $\mathbb{E}[1/\omega(e)] = \infty$. Somit ist klar, dass im allgemeinen ergodischen Fall Momentenbedingungen erforderlich sind.

In [15] wurde von Biskup ein Invarianzprinzip für den Spezialfall $d = 2$ unter der Momentenbedingung (4.1) mit $p = q = 1$ gezeigt. Es wird vermutet, dass dies die optimale Bedingung allgemeine ergodische Umgebungen ist. Der Beweis in [15] funktioniert allerdings nur im Fall $d = 2$ und ist nicht erweiterbar auf höhere Dimensionen. Als ein weiteres Resultat sei hier noch kurz [41] erwähnt, wo ein Invarianzprinzip für die einfache Irrfahrt auf zufälligen Teilgraphen von \mathbb{Z}^d bewiesen wird, wobei zum Beispiel Korrelationen erzeugt durch 'random interlacements' oder die Niveaumengen eines Gauß'schen Freien Feldes zugelassen sind.

Ein Invarianzprinzip für das RCM mit ergodischen Kantengewichten in $d \geq 2$ unter der Momentenbedingung in Annahme 4.2 wurde [5] gezeigt.

Satz 4.3 ([5]). *Sei $d \geq 2$ und die Annahmen 4.1 und 4.2 seien erfüllt. Dann gilt ein QFCLT für den VSRW X und den CSRW Y mit deterministischen, nicht-degenerierten Kovarianzmatrizen Σ_V^2 und Σ_C^2 .*

Bemerkung 4.4. Falls die Verteilung \mathbb{P} der Kantengewichte invariant bzgl. der Symmetrien von \mathbb{Z}^d ist – wie zum Beispiel im i.i.d. Fall – dann ist auch die Kovarianzmatrix des Grenzobjekts invariant unter den Symmetrien, also eine Diagonalmatrix von der Form $\sigma^2 I$ für ein $\sigma > 0$.

Für den Beweis von Satz 4.3 benutzt man wieder die Korrektormethode, d.h. man konstruiert harmonische Koordinaten Φ bzw. den Korrektor χ wie in Abschnitt 3 dargestellt. Man beachte, dass Φ genau dann \mathcal{L}_V^ω -harmonisch ist, wenn der Korrektor χ die Poisson-Gleichung

$$\mathcal{L}_V^\omega u = \nabla^* V^\omega \quad (4.2)$$

löst, wobei $V^\omega : E_d \rightarrow \mathbb{R}^d$ definiert durch $V^\omega(x, y) := \omega_{xy}(y - x)$ die lokale Drift und ∇^* den Divergenzoperator zum diskreten Gradienten bezeichnet.

Wie in Abschnitt 3 erläutert, besteht nun die Hauptschwierigkeit im Nachweis der Sublinearität des Korrektors, wobei die existierenden Beweise aufgrund des Fehlens von Gauß'schen heat kernel Abschätzungen nicht ohne Weiteres funktionieren. Im i.i.d. Fall konnte man sich mit dem künstlich eingeführten Prozess Z^K behelfen, der über die 'Löcher von schlechten Kantenkonfigurationen' springt, da man die Größe

der Löcher mit Hilfe von Perkulationsabschätzungen kontrollieren kann. Dies könnte eventuell auch im ergodischen Fall funktionieren, wenn man zusätzliche Annahmen an das Mischverhalten der Kantengewichte macht, aber eine solche Kontrolle an die Löcher wird im allgemeinen ergodischen Fall wahrscheinlich nicht vorliegen.

Inspiziert durch die Methode in [26, 27], wo Diffusionen in Divergenzform in zufälliger Umgebung betrachtet werden, wird in [5] die Sublinearität des Korrektors mit Hilfe einer rein analytischen Technik, nämlich einer Moser-Iteration gezeigt. Eine Moser-Iteration, eingeführt von Moser in [38, 39] zum Beweis von Harnack-Ungleichungen für elliptische Operatoren in Divergenzform, basiert auf zwei Grundideen: eine Sobolev-Ungleichung, mit der man die ℓ^r -Norm einer Funktion auf \mathbb{Z}^d mit $r = r(d) = d/(d-2) > 1$ nach oben mit der Dirichlet Form abschätzen kann, und eine obere Abschätzung an die Dirichlet Form von Lösungen der Poisson-Gleichung (4.2). Im gleichmäßig elliptischen Fall folgt dies durch Standardargumente. Im vorliegenden Fall, wo die Kantengewichte unbeschränkt sind, arbeitet man mit einer dimensionsabhängigen gewichteten Sobolev-Ungleichung, die mit Hilfe der Hölder-Ungleichung hergeleitet wird. Das bedeutet, dass der Koeffizient $r(d)$ durch

$$r(d, p, q) = \frac{d - d/p}{(d - 2) + d/q} \quad (4.3)$$

ersetzt werden muss. Für the Moser-Iteration braucht man $r(d, p, q) > 1$, was äquivalent ist zur Bedingung $1/p + 1/q < 2/d$ in Annahme 4.2. Mit Hilfe der Moser-Iteration erhält man eine Maximalungleichung, d.h. eine Abschätzung des Maximums einer Lösung von (4.2) auf einer Kugel durch zum Beispiel ihre ℓ^1 -Norm über eine etwas größere Kugel. Letztere lässt sich mit ergodentheoretischen Argumenten aus [44] kontrollieren, so dass die Sublinearität des Korrektors folgt.

4.2. Lokaler Grenzwertsatz. Für das RCM mit ergodischer Umgebung wurde in [4] unter der Momentenbedingung in Annahme 4.2 ein lokaler Grenzwertsatz für den CSRW bewiesen. Unter einer etwas stärkeren Momentenbedingung gilt auch ein lokaler Grenzwertsatz für den VSRW.

Satz 4.5 ([4]). *Seien $T_2 > T_1 > 0$, $K > 0$ und $d \geq 2$ und es gelte Annahme 4.1.*

(i) *Unter der Momentenbedingung in Annahme 4.2 gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq K} \sup_{t \in [T_1, T_2]} \left| n^d q^\omega(n^2 t, 0, \lfloor nx \rfloor) - a k_t^{\Sigma^C}(x) \right| = 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.} \quad (4.4)$$

mit $a := 1/\mathbb{E}[\mu^\omega(0)]$.

(ii) *Falls (4.1) erfüllt ist für $p, q \in (1, \infty]$ mit $1/(p-1) + 1/q < 2/d$, dann gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{|x| \leq K} \sup_{t \in [T_1, T_2]} \left| n^d p^\omega(n^2 t, 0, \lfloor nx \rfloor) - k_t^{\Sigma^V}(x) \right| = 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

Im Gegensatz zum Invarianzprinzip ist die Momentenbedingung in Annahme 4.2 für den lokalen Grenzwertsatz für den CSRW optimal:

Satz 4.6 ([4]). Seien $d \geq 2$ und $p, q \in (1, \infty]$, so dass $1/p + 1/q > 2/d$. Dann existiert eine ergodische Verteilung \mathbb{P} auf (Ω, \mathcal{F}) mit $\mathbb{E}[(\omega(e))^p] < \infty$ und $\mathbb{E}[(1/\omega(e))^q] < \infty$, unter der (4.4) nicht gilt.

Der Beweis von Satz 4.5 folgt der Strategie in [12]. Hierzu werden ein QFCLT und sowie Hölder-Stetigkeit des heat kernel benötigt. Da der heat kernel eine Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung ist, folgt Letztere mit klassischen Argumenten aus einer parabolischen Harnack-Ungleichung. Daher besteht die wesentliche Arbeit in [4] darin, Harnack-Ungleichungen für nicht-elliptische Operatoren auf Graphen zu beweisen.

4.3. Harnack-Ungleichungen. Man betrachte den Differentialoperator L^a in Divergenzform,

$$(L^a f)(x) = \sum_{i,j=1}^d \partial_{x_i} \left(a_{ij}(\cdot) \partial_{x_j} f(\cdot) \right)(x),$$

der auf Funktionen auf \mathbb{R}^d wirkt, wobei die positiv definite Matrix $a = (a_{ij}(x))$ beschränkt, messbar und gleichmäßig elliptisch ist, d.h. für geeignete $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$ gilt

$$\lambda_1 |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda_2 |\xi|^2, \quad \forall x, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Dann besagt ein bekanntes Resultat von Moser [38], dass eine elliptische Harnack-Ungleichung (EHI) gilt, d.h. es existiert eine Konstante $C_{\text{EH}} \equiv C_{\text{EH}}(\lambda_1, \lambda_2) < \infty$, so dass für jede positive Funktion $u > 0$ mit $(L^a u)(x) = 0$ für alle $x \in B(x_0, r)$, die also L^a -harmonisch auf $B(x_0, r)$ ist,

$$\max_{B(x_0, r/2)} u \leq C_{\text{EH}} \min_{B(x_0, r/2)} u.$$

Ein paar Jahre später bewies Moser auch eine parabolische Harnack-Ungleichung (PHI) (siehe [39]), d.h. es existiert eine Konstante $C_{\text{PH}} \equiv C_{\text{PH}}(\lambda_1, \lambda_2) < \infty$, so dass für jede kalorische Funktion $u > 0$, also jede schwache Lösung der Wärmeleitungsgleichung $(\partial_t - L^a)u(t, x) = 0$ auf $[t_0, t_0 + r^2] \times B(x_0, r)$,

$$\max_{(t,x) \in Q_-} u(t, x) \leq C_{\text{PH}} \min_{(t,x) \in Q_+} u(t, x),$$

wobei $Q_- = [t_0 + \frac{1}{4}r^2, t_0 + \frac{1}{2}r^2] \times B(x_0, \frac{1}{2}r)$ und $Q_+ = [t_0 + \frac{3}{4}r^2, t_0 + r^2] \times B(x_0, \frac{1}{2}r)$.

Sowohl EHI als auch PHI hatten großen Einfluss auf die Differentialgeometrie und die Theorie partieller Differentialgleichungen. Eine wichtige Konsequenz von Harnack-Ungleichungen (vgl. Nash [40]) ist die Hölder-Stetigkeit von Lösungen elliptischer oder parabolischen Gleichungen. Zum Beispiel impliziert die PHI die Hölder-Stetigkeit der Fundamentallösung $p_t^a(x, y)$ der parabolischen Gleichung

$$(\partial_t - L^a)p_t^a(x, y) = 0, \quad p_0^a(x, y) = \delta_x(y).$$

Außerdem ist die PHI ein zentrales Element in Aronson's Beweis [7] für Gauß'sche Abschätzungen für $p_t^a(x, y)$. In diesem Zusammenhang ist es bemerkenswert, dass die Resultate lediglich auf der gleichmäßigen Elliptizität, aber nicht auf der Regularität der Matrix a basieren.

Im Folgenden wird eine diskrete Version des Operators L^a betrachtet, nämlich die Operatoren \mathcal{L}_C^ω bzw. \mathcal{L}_V^ω , die auf Funktionen auf dem Graphen (\mathbb{Z}^d, E_d) operieren. Im Fall von gleichmäßig beschränkten Gewichten, d.h. es gibt $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < \infty$, so dass

$$\lambda_1 \leq \omega(x, y) \leq \lambda_2,$$

wurden EHI und PHI im Fall von unendlichen, zusammenhängenden und lokal-endlichen Graphen von Delmotte in [21, 22] gezeigt, wobei die Harnack-Konstanten $C_{\text{EH}} = C_{\text{EH}}(\lambda_1, \lambda_2)$ bzw. $C_{\text{PH}} = C_{\text{PH}}(\lambda_1, \lambda_2)$ nur von λ_1 und λ_2 abhängen. Wenn man nun eine gegebene Kugel $B(x_0, n)$ betrachtet, können offenbar die Konstanten λ_1 und λ_2 durch

$$\max_{x, y \in B(x_0, n)} \frac{1}{\omega(x, y)} \quad \text{und} \quad \max_{x, y \in B(x_0, n)} \omega(x, y)$$

ersetzt werden. Die Hauptresultate in [4] zeigen nun, dass diese gleichmäßige obere bzw. untere Schranke durch L^p -Schranken ersetzt werden können. Setze hierzu

$$\mu^\omega(x) := \sum_{y \sim x} \omega_{xy}, \quad \nu^\omega(x) := \sum_{y \sim x} \frac{1}{\omega_{xy}},$$

und für eine beliebige, nichtleere, endliche Menge $A \subset \mathbb{Z}^d$ und $p \in [1, \infty)$ definiert man für eine Funktion $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ die Normen

$$\|f\|_{p, A} := \left(\frac{1}{|A|} \sum_{x \in A} |f(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{und} \quad \|f\|_{\infty, A} := \max_{x \in A} |f(x)|.$$

Satz 4.7 (Elliptische Harnack-Ungleichung [4]). *Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ und $n \geq 1$ sei $B(n) = B(x_0, n)$. Weiter sei $u > 0$ harmonisch bzgl. \mathcal{L}_C^ω auf $B(n)$, d.h. $\mathcal{L}_C^\omega u = 0$ auf $B(n)$. Dann existiert für beliebige $p, q \in (1, \infty)$ mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{2}{d}$$

eine Konstante $C_{\text{EH}} \equiv C_{\text{EH}}(\|\mu^\omega\|_{p, B(n)}, \|\nu^\omega\|_{q, B(n)})$, so dass

$$\max_{x \in B(n/2)} u(x) \leq C_{\text{EH}} \min_{x \in B(n/2)} u(x).$$

Die Konstante C_{EH} kann expliziter geschrieben werden als

$$C_{\text{EH}}(\|\mu^\omega\|_{p, B(n)}, \|\nu^\omega\|_{q, B(n)}) = c_1 \exp\left(c_2 \left(1 \vee \|\mu^\omega\|_{p, B(n)} \|\nu^\omega\|_{q, B(n)}\right)^\kappa\right)$$

mit positiven Konstanten $c_i = c_i(d, p, q)$ und $\kappa = \kappa(d, p, q)$.

Zur Abkürzung sei $M_{x_0, n}^\omega := 1 \vee \left(\|\mu^\omega\|_{1, B(n)} / \|\mu^\omega\|_{1, B(n/2)} \right)$.

Satz 4.8 (Parabolische Harnack-Ungleichung [4]). Für beliebiges $x_0 \in \mathbb{Z}^d$, $t_0 \geq 0$ und $n \geq 1$ sei $Q(n) = [t_0, t_0 + n^2] \times B(x_0, n)$. Sei weiter $u > 0$ kalorisch auf $Q(n)$ bzgl. \mathcal{L}_C^ω , d.h. $\partial_t u - \mathcal{L}_C^\omega u = 0$ auf $Q(n)$. Dann existiert für beliebige $p, q \in (1, \infty)$ mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{2}{d}$$

eine Konstante $C_{\text{PH}} = C_{\text{PH}}(M_{x_0, n}^\omega, \|\mu^\omega\|_{p, B(x_0, n)}, \|\nu^\omega\|_{q, B(x_0, n)})$, so dass

$$\max_{(t, x) \in Q_-} u(t, x) \leq C_{\text{PH}} \min_{(t, x) \in Q_+} u(t, x),$$

wobei $Q_- = [t_0 + \frac{1}{4}n^2, t_0 + \frac{1}{2}n^2] \times B(x_0, \frac{1}{2}n)$ und $Q_+ = [t_0 + \frac{3}{4}n^2, t_0 + n^2] \times B(x_0, \frac{1}{2}n)$. Die Konstante C_{PH} kann expliziter geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & C_{\text{PH}}(M_{x_0, n}^\omega, \|\mu^\omega\|_{p, B(x_0, n)}, \|\nu^\omega\|_{q, B(x_0, n)}) \\ &= c_1 \exp\left(c_2 \left(M_{x_0, n}^\omega (1 \vee \|\mu^\omega\|_{p, B(x_0, n)}) (1 \vee \|\nu^\omega\|_{q, B(x_0, n)})\right)^\kappa\right) \end{aligned}$$

mit positiven Konstanten $c_i = c_i(d, p, q)$ und $\kappa = \kappa(d, p, q)$.

Bemerkung 4.9. (i) Die Sätze 4.7 und 4.8 gelten allgemeiner auf lokal-endlichen Graphen mit regulärem Volumenwachstum der Ordnung d , für die eine relative isoperimetrische Ungleichung der Ordnung d gilt (siehe [4, Assumption 1.1]).

(ii) Für die Sätze 4.7 und 4.8 spielt es keine Rolle, dass die $(\omega_e)_{e \in E_d}$ ergodische Zufallsvariablen sind; die Resultate gelten für beliebige (deterministische) unbeschränkte Gewichte $\omega_e > 0$.

(iii) Die elliptische Harnack-Ungleichung in Satz 4.7 gilt auch für den Operator \mathcal{L}_V^ω , der den VSRW erzeugt. Für die parabolische Harnack-Ungleichung bzgl. \mathcal{L}_V^ω muss die Bedingung an p und q leicht modifiziert werden, nämlich durch $1/(p-1) + 1/q < 2/d$ ersetzt werden (vgl. Satz 4.5 (ii)).

Die Konstanten C_{EH} bzw. C_{PH} in Satz 4.7 bzw. Satz 4.8 hängen von der jeweiligen Kugel ab, und zwar sowohl von deren Mittelpunkt x_0 als auch von deren Radius n , so dass die Ergodizität der Gewichte erforderlich ist, um die Hölder-Stetigkeit von harmonischen bzw. kalorischen Funktionen abzuleiten. Denn unter den Annahmen 4.1 und 4.2 liefert eine Anwendung des Ergodensatzes, dass für beliebiges $x \in \mathbb{Z}^d$ und für \mathbb{P} -f.a. ω ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu^\omega\|_{p, B(x, n)}^p = \mathbb{E}[\mu^\omega(0)^p] < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\nu^\omega\|_{q, B(x, n)}^q = \mathbb{E}[\nu^\omega(0)^q] < \infty,$$

sowie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|\mu^\omega\|_{1, B(x, n)}}{\|\mu^\omega\|_{1, B(x, n/2)}} = 1.$$

Insbesondere existiert für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ ein zufälliges $N_x = N_x(\omega)$, so dass \mathbb{P} -f.s.

$$\sup_{n \geq N_x} \|\mu^\omega\|_{p, B(x, n)}^p \leq 2 \mathbb{E}[\mu^\omega(0)^p] =: \bar{\mu}_p, \quad \sup_{n \geq N_x} \|\nu^\omega\|_{q, B(x, n)}^q \leq 2 \mathbb{E}[\nu^\omega(0)^q] =: \bar{\nu}_q,$$

$$\sup_{n \geq N_x} \frac{\|\mu^\omega\|_{1,B(x,n)}}{\|\mu^\omega\|_{1,B(x,n/2)}} \leq 2.$$

Das bedeutet, dass für $n \geq N_{x_0}(\omega)$ die Harnack-Konstanten Satz 4.7 und Satz 4.8 durch die Konstanten $C_{\text{EH}}^* := C_{\text{EH}}(\bar{\mu}_p, \bar{\nu}_q) < \infty$ und $C_{\text{PH}}^* := C_{\text{PH}}(2, \bar{\mu}_p, \bar{\nu}_q) < \infty$, die nicht von x_0 und n abhängen, ersetzt werden können. Mit anderen Worten, die Ergebnisse in Satz 4.7 und Satz 4.8 sind Harnack-Ungleichungen, die in der Situation von Annahme 4.1 und Annahme 4.2 für Kugeln mit hinreichend großem Radius n effektiv werden. Dies ist aber ausreichend für die Hölder-Stetigkeit des heat kernel, die für den Beweis des lokalen Grenzwertsatzes in Satz 4.5 erforderlich ist.

Seit den Arbeiten [38, 39] ist die Moser-Iteration die bei weitem etablierteste Technik, um Harnack-Ungleichungen zu beweisen. Wie oben bereits dargestellt, basiert eine Moser-Iteration auf einer Sobolev-Ungleichung. Für den Beweis von Satz 4.7 bzw. Satz 4.8 benutzt man wieder die gewichtete Sobolev-Ungleichung aus [5] mit dem Koeffizienten $r(d, p, q)$ in (4.3). Wie im Beweis von Satz 4.3 braucht man wieder für die Moser-Iteration $r(d, p, q) > 1$, was äquivalent ist zur Bedingung $1/p + 1/q < 2/d$ in Satz 4.7 bzw. Satz 4.8. Als Ergebnis erhält man eine Maximalungleichung für u , d.h. man kann die ℓ^∞ -Norm von u nach oben mit der ℓ^α -Norm von u auf einer etwas größeren Kugel abschätzen für gewisse $\alpha > 0$. Eine analoge Abschätzung kann man für u^{-1} herleiten. Um schließlich die Harnack-Ungleichung zu erhalten, muss man also noch die ℓ^α -Norm mit der $\ell^{-\alpha}$ -Norm von u abschätzen. Im Fall von gleichmäßig elliptischen Gewichten (siehe [21]) kann dies unter Verwendung der John-Nirenberg-Ungleichung gezeigt werden, also die exponentielle Integrierbarkeit von sog. BMO-Funktionen. Aufgrund der fehlenden Elliptizität wird in [4] hingegen ein abstraktes Lemma von Bombieri und Giusti [19] benutzt. Um dieses Lemma anzuwenden, wird neben den bereits erwähnten Maximalungleichung auch eine gewichtete Poincaré-Ungleichung benötigt, die oft mit Hilfe des sog. Whitney-covering bewiesen wird (siehe z.B. [22, 8, 43]). In [4] wird das Whitney-covering vermieden, indem ein neueres Resultat von Dyda und Kassmann [25] benutzt wird.

4.4. Gauß'sche Abschätzungen. In vielen Situationen ist eine PHI äquivalent zu Gauß'schen Abschätzungen an den heat kernel. Dies ist zum Beispiel der Fall auf lokal endlichen Graphen mit gleichmäßig elliptischen Gewichten [22], auf Mannigfaltigkeiten [31, 42] oder auf lokalen Dirichlet-Räumen [45]. Im vorliegenden Fall eines nicht-elliptischen Operators lassen sich allerdings Gauß'sche Abschätzungen nicht direkt aus der parabolischen Harnack-Ungleichung in Satz 4.8 ableiten. Dies liegt an der speziellen Form der Harnack-Konstanten, insbesondere an ihrer Abhängigkeit von der jeweils betrachteten Kugel. Um nun effektive Gauß'sche Abschätzungen zu erhalten, müsste man die parabolische Harnack-Ungleichung auf eine Folge von Kugeln mit Radius n und einem Abstand der Ordnung n^2 anwenden.

Im Allgemeinen liefert der Ergodensatz aber nicht die erforderliche gleichmäßige Kontrolle an die Konvergenz der Durchschnitte von stationären Zufallsvariablen über solche Kugeln (siehe [1]). Allerdings kann man mit Hilfe einer Methode von Zhikov [46] zumindest obere Gauß'sche Abschätzungen erhalten, indem man Moser-Iteration mit der Perturbationsmethode von Davies kombiniert. Der Vorteil liegt darin, dass bei dieser Vorgehensweise der Ergodensatz nur auf Kugeln mit einem festen Mittelpunkt $x_0 \in \mathbb{Z}^d$ angewandt werden muss.

Zur Formulierung des Resultats sei daran erinnert, dass wie oben nach Ergodensatz unter den Annahmen 4.1 und 4.2 für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ ein zufälliges $N_x = N_x(\omega)$ existiert, so dass

$$\sup_{n \geq N_x} \|\mu^\omega\|_{p, B(x, n)}^p \leq 2 \mathbb{E}[\mu^\omega(0)^p] =: \bar{\mu}_p, \quad \sup_{n \geq N_x} \|\nu^\omega\|_{q, B(x, n)}^q \leq 2 \mathbb{E}[\nu^\omega(0)^q] =: \bar{\nu}_q.$$

Satz 4.10 ([6]). *Es seien die Annahmen 4.1 und 4.2 erfüllt. Dann existieren Konstanten $c_i = c_i(d, p, q, \bar{\mu}_p, \bar{\nu}_q)$, so dass für \mathbb{P} -f.a. ω und für gegebene t und x mit $\sqrt{t} \geq N_x(\omega)$ und alle $y \in \mathbb{Z}^d$ das Folgende gilt:*

(i) Falls $|x - y| \leq c_1 t$, dann gilt

$$q^\omega(t, x, y) \leq c_2 t^{-d/2} \exp(-c_3 |x - y|^2 / t).$$

(ii) Falls $|x - y| \geq c_1 t$, dann gilt

$$q^\omega(t, x, y) \leq c_2 t^{-d/2} \exp(-c_4 |x - y|(1 \vee \log(|x - y|/t))).$$

Bemerkung 4.11. (i) Ähnlich wie bei der parabolischen Harnack-Ungleichung gelten analoge Abschätzungen an den heat kernel $p^\omega(t, x, y)$ des VSRW unter der modifizierten Momentenbedingung mit $1/(p-1) + 1/q < 2/d$. Die Euklidische Metrik muss dabei durch eine zufällige Metrik, die sog. chemische Distanz, ersetzt werden (vgl. [11, Section 2]).

(ii) Auch in den Abschätzungen an den heat kernel in [11, Theorem 1.2] tritt eine Familie von Zufallsvariablen auf, die eine ähnliche Rolle wie $(N_x)_x$ spielt. In [11] haben diese Zufallsvariablen gestreckt-exponentielle tail-Wahrscheinlichkeiten. Um auch in Satz 4.10 Aussagen über die Größe der $(N_x)_x$ zu erhalten, benötigt man Informationen über die Konvergenzgeschwindigkeit im Ergodensatz, die aber im Allgemeinen nicht zur Verfügung stehen, sofern man nicht zusätzliche Annahmen an das Mischverhalten macht.

Im Folgenden wird die Idee von Davies' Methode kurz skizziert. Anstatt direkt die originale Übergangshalbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ der Irrfahrt Y zu betrachten, also

$$P_t f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} f(y) q^\omega(t, x, y) \mu^\omega(y),$$

schlägt Davies vor, für eine geeignete Klasse von Testfunktionen ψ zunächst die Halbgruppe $(P_t^\psi)_{t \geq 0}$ zu untersuchen, die gegeben ist durch

$$P_t^\psi f(x) = e^{\psi(x)} [P_t(e^{-\psi} f)](x),$$

mit zugehörigem Generator

$$\mathcal{L}^\psi f(x) = e^{\psi(x)} [\mathcal{L}^\omega(e^{-\psi} f)](x).$$

Diese Halbgruppe besitzt den Kern $e^{\psi(x)} q^\omega(t, x, y) e^{-\psi(y)}$, der die entsprechende Wärmeleitungsgleichung $\partial_t v - \mathcal{L}^\psi v = 0$ löst.

Im klassischen Fall einer symmetrischen Markov-Halbgruppe auf \mathbb{R}^d , deren Generator ein elliptischer Differentialoperator zweiter Ordnung ist, gelten eine Nash-Ungleichung und – äquivalent dazu – Gauß'sche Abschätzungen auf der Diagonalen. Davies benutzt dann die Leibniz-Regel, um daraus eine obere Schranke an den Kern von $(P_t^\psi)_{t \geq 0}$ von der Form

$$e^{\psi(x)} q^\omega(t, x, y) e^{-\psi(y)} \leq c e^{t\Gamma(\psi)} \iff q(t, x, y) \leq c t^{-d/2} e^{\psi(y) - \psi(x) + t\Gamma(\psi)}$$

abzuleiten, wobei c nicht von ψ abhängt und Γ den carré du champ Operator bezeichnet. Schließlich optimiert man über ψ , um den Exponenten so negativ wie möglich zu machen, und erhält daraus Gauß'sche Abschätzungen. Für weitere Details siehe zum Beispiel [20]. Die Methode wurde im Übrigen auch von Delmotte in [22] benutzt.

Im vorliegenden Fall, wo die Gewichte nicht gleichmäßig von Null weg beschränkt sind, steht eine Nash-Ungleichung nicht zur Verfügung, weshalb für den Beweis von Satz 4.10 Davies' Methode etwas modifiziert werden muss. Wie bereits erwähnt folgt man hier einer Idee von Zhikov [46], und zwar zeigt man wieder mit Hilfe von Moser-Iteration eine Maximal-Ungleichung für Lösungen von $\partial_t v - \mathcal{L}^\psi v = 0$, wobei die Argumente aus dem Beweis der Harnack-Ungleichung für die originale Wärmeleitungsgleichung aus Satz 4.8 leicht an die perturbierte Halbgruppe $(P_t^\psi)_{t \geq 0}$ angepasst werden können. Die Gauß'schen Abschätzungen folgen dann wieder durch Optimierung über ψ . Die technische Schwierigkeit besteht darin, dass – ähnlich wie in [20], wo Davies' Methode für Prozesse mit nicht-lokalen Dirichlet Formen benutzt wurde – auf diskreten Räumen wie Graphen keine Leibniz-Regel zur Verfügung steht.

5. DAS DYNAMISCHE RANDOM CONDUCTANCE MODEL

In diesem Abschnitt werden kurz erste Ergebnisse für das dynamische Random Conductance Model diskutiert. In diesem Modell sind die Gewichte zeitabhängig und induzieren somit eine zeit-inhomogene Markovkette. Bezeichne nun in diesem Abschnitt Ω die Menge aller messbaren Funktionen von \mathbb{R} nach $(0, \infty)^{E_d}$. Ferner sei Ω mit einer σ -Algebra \mathcal{F} und einem Wahrscheinlichkeitsmaß \mathbb{P} ausgestattet, so dass $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum wird. Die zufällige Umgebung ist gegeben durch die Koordinaten $\omega_e(t)$, $t \in \mathbb{R}, e \in E_d$. Zu Vereinfachung der Notation sei wieder $\omega_{xy}(t) = \omega_{\{x,y\}}(t) = \omega_{yx}(t)$ und $\omega_{xy}(t) = 0$ falls $\{x, y\} \notin E_d$, sowie

$$\mu_x^\omega(t) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} \omega_{xy}(t) = \sum_{y \sim x} \omega_{xy}(t).$$

Bezeichne $D(\mathbb{R}, \mathbb{Z}^d)$ den Raum der \mathbb{Z}^d -wertigen càdlàg Funktionen auf \mathbb{R} . Für ein gegebenes $\omega \in \Omega$ und für $s \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{Z}^d$ sei dann $P_{s,x}^\omega$ das Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem Pfadraum $D(\mathbb{R}, \mathbb{Z}^d)$, unter dem der Koordinatenprozess $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ eine zeit-stetige Markov-Kette auf \mathbb{Z}^d ist, die zum Zeitpunkt $t = s$ in x startet und deren zeitabhängiger Generator gegeben ist durch

$$\mathcal{L}_t^\omega f(x) = \sum_{y \sim x} \omega_{xy}(t) (f(y) - f(x)).$$

Mit anderen Worten, X ist ein VSRW mit zeitabhängigen Sprungraten, also ein zeit-inhomogener Markov-Prozess. Weiter bezeichne $p^\omega(s, x; t, y)$, $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $s \leq t$, die Übergangswahrscheinlichkeiten von X . Auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definieren wir Verschiebungsoperatoren $(\tau_{t,x})_{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}^d}$ via

$$\tau_{t,x} : \Omega \rightarrow \Omega \quad (\omega_e(s))_{s \in \mathbb{R}, e \in E_d} \mapsto (\omega_{x+e}(t+s))_{s \in \mathbb{R}, e \in E_d},$$

so dass offensichtlich $\tau_{s+t, x+y} = \tau_{s,x} \circ \tau_{t,y}$. Es sind nun die Aussagen (A1)–(A3) für das dynamische RCM zu untersuchen.

Annahme 5.1. (i) *Ergodizität:* Für alle $A \in \mathcal{F}$ gilt $\tau_{t,x}(A) \in \mathcal{F}$, und das Maß \mathbb{P} ist invariant und ergodisch bzgl. $(\tau_{t,x})$, d.h. $\mathbb{P}[A] \in \{0, 1\}$ für jede Menge A mit $\tau_{t,x}(A) = A$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{Z}^d$.

(ii) *Stochastische Stetigkeit:* Für jedes $\delta > 0$ und $f \in L^2(\mathbb{P})$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P} [|f(\tau_{h,0}\omega) - f(\omega)| \geq \delta] = 0.$$

(iii) *Elliptizität:* Es existieren positive Konstanten c_1 und c_2 , so dass

$$\mathbb{P}[c_1 \leq \omega_e(t) \leq c_2, \forall e \in E_d, t \in \mathbb{R}] = 1. \quad (5.1)$$

(iv) *Mischend in der Zeit:* Es existiert $p_1 > 1$, so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ das Folgende gilt: Für alle beschränkte Funktionen φ, ψ auf Ω von der Form $\varphi(\omega) = \tilde{\varphi}(\omega(t_1))$ bzw. $\psi(\omega) = \tilde{\psi}(\omega(t_2))$ mit $|t_1 - t_2| \geq 1$ für differenzierbare lokale Funktionen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ auf $(0, \infty)^{E_d}$, die von m Koordinaten abhängen, gilt

$$|\mathbb{E}[\varphi\psi] - \mathbb{E}[\varphi]\mathbb{E}[\psi]| \leq c_m |t_1 - t_2|^{-p_1} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{P})} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{P})}.$$

(v) *Mischend im Raum:* Im Fall $d \geq 3$ existiert $p_2 > 2d/(d-2)$, so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ und für jedes $x \in \mathbb{Z}^d$ das Folgende gilt: Für alle beschränkte Funktionen φ, ψ auf Ω von der Form $\varphi(\omega) = \tilde{\varphi}(\omega(t_0))$ und $\psi(\omega) = \tilde{\psi}(\omega(t_0))$ für differenzierbare lokale Funktionen $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}$ auf $(0, \infty)^{E_d}$, die von m Koordinaten abhängen, gilt

$$|\mathbb{E}[\varphi(\omega)\psi(\tau_{0,x}\omega)] - \mathbb{E}[\varphi]\mathbb{E}[\psi]| \leq c_m |x|^{-p_2} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{P})} \|\psi\|_{L^\infty(\mathbb{P})}.$$

Unter Annahme 5.1(iii) wurden in [23] Gauß'sche Abschätzungen an den heat kernel bewiesen (siehe auch [29, Appendix B] für ähnliche Abschätzungen). Ein annealed FCLT wurde in [2] unter Annahme 5.1 (i)–(iii) gezeigt. Für ein QFCLT sind hingegen zusätzliche die Annahmen an das Mischverhalten der Umgebung in Annahme 5.1 (iv)–(v) erforderlich

Satz 5.2 ([2]). Sei $d \geq 3$ und es gelte Annahme 5.1 (i)–(v). Dann konvergiert \mathbb{P} -f.s. $X^{(n)}$ (unter $P_{0,0}^\omega$) in Verteilung gegen eine Brown'sche Bewegung auf \mathbb{R}^d mit einer deterministischen, nicht-degenerierten Diffusivitätsmatrix Σ .

Unter den entsprechenden Annahmen gilt auch ein lokaler Grenzwertsatz (annealed bzw. quenched).

Satz 5.3 ([2]). Sei $T > 0$ beliebig.

(i) Unter Annahme 5.1 (i)–(iii) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{t \geq T} \left| n^d \mathbb{E}[p^\omega(0, 0; n^2 t, \lfloor nx \rfloor)] - k_t^\Sigma(x) \right| = 0.$$

(ii) Unter Annahme 5.1 (i)–(v) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{t \geq T} \left| n^d p^\omega(0, 0; n^2 t, \lfloor nx \rfloor) - k_t^\Sigma(x) \right| = 0, \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

In beliebigen Dimensionen $d \geq 1$ gelten die Aussagen von Satz 5.2 und Satz 5.3 unter leicht modifizierten Annahmen an das Mischverhalten. Die Resultate sind auch übertragbar auf den CSRW, der ja im elliptischen Fall keine wesentlichen Unterschiede zum VSRW aufweist.

Eine interessante Anwendung des lokalen Grenzwertsatzes in Satz 5.3 (i) ist ein Skalenlimes für Raum-Zeit-Korrelationen im Ginzburg-Landau $\nabla\Phi$ -Interface-Modell (vgl. [28]) mittels der sog. Helffer-Sjöstrand-Darstellung (siehe [2, Section 5] für Details).

6. OFFENE PROBLEME UND AUSBLICK

In diesem Abschnitt werden abschließend noch kurz einige offenen Fragen aufgelistet, für die zum Teil auch schon erste Ergebnisse vorliegen.

- (1) Ist $p = q = 1$ die optimale Momentenbedingung für das Invarianzprinzip im ergodischen Fall?
- (2) Unter welchen Bedingungen gelten im ergodischen Fall auch untere Gauß'sche Abschätzungen an den heat kernel? Kann man darüber hinaus auch ein Gesetz vom iterierten Logarithmus für die Irrfahrt zeigen?
- (3) Unter welchen Bedingungen gilt ein quantitatives Invarianzprinzip, ein sog. Berry-Esseen-Theorem, und welche Konvergenzgeschwindigkeit kann man dabei erreichen?
- (4) Gelten ähnliche Resultate für Irrfahrten auf Zufallsgraphen wie zum Beispiel die korrelierten Perkulationsmodelle in [41]? Die Methode mit der Moser-Iteration erfordert lediglich gewisse isoperimetrische Eigenschaften, die solche Zufallsgraphen auf hinreichend großen Kugeln aufweisen.
- (5) Kann man entsprechende Ergebnisse auch für Irrfahrten mit weiten Sprüngen zeigen?

(6) Es erscheint überaus möglich, dass die Moser-Iterationstechnik so robust ist, dass damit die Ergebnisse aus Abschnitt 5 für das dynamische RCM signifikant verbessert werden können, d.h. dass die Annahmen an die Elliptizität und an das Mischverhalten abgeschwächt und durch geeignete Momentenbedingungen ersetzt werden können. Eine Schwierigkeit ist hier allerdings, in der nicht-elliptischen Situation für eine nicht-reversible Irrfahrt den Korrektor zu konstruieren.

LITERATUR

- [1] M. A. Akcoglu and A. del Junco. Convergence of averages of point transformations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 49:265–266, 1975.
- [2] S. Andres. Invariance principle for the random conductance model with dynamic bounded conductances. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 50(2):352–374, 2014.
- [3] S. Andres, M. T. Barlow, J.-D. Deuschel, and B. M. Hambly. Invariance principle for the random conductance model. *Probab. Theory Related Fields*, 156(3-4):535–580, 2013.
- [4] S. Andres, J.-D. Deuschel, and M. Slowik. Harnack inequalities on weighted graphs and some applications to the random conductance model. *Preprint, available at arXiv:1312.5473*, 2013.
- [5] S. Andres, J.-D. Deuschel, and M. Slowik. Invariance principle for the random conductance model in a degenerate ergodic environment. *Preprint, to appear in Ann. Probab., available at arXiv:1306.2521*, 2013.
- [6] S. Andres, J.-D. Deuschel, and M. Slowik. Heat kernel estimates for random walks with degenerate weights. *Preprint, available at arXiv:1412.4338*, 2014.
- [7] D. G. Aronson. Bounds for the fundamental solution of a parabolic equation. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:890–896, 1967.
- [8] M. T. Barlow. Random walks on supercritical percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(4):3024–3084, 2004.
- [9] M. T. Barlow, K. Burdzy, and A. Timar. Comparison of quenched and annealed invariance principles for random conductance model. *Preprint, available at arXiv:1304.3498*, 2013.
- [10] M. T. Barlow and J. Černý. Convergence to fractional kinetics for random walks associated with unbounded conductances. *Probab. Theory Related Fields*, 149(3-4):639–673, 2011.
- [11] M. T. Barlow and J.-D. Deuschel. Invariance principle for the random conductance model with unbounded conductances. *Ann. Probab.*, 38(1):234–276, 2010.
- [12] M. T. Barlow and B. M. Hambly. Parabolic Harnack inequality and local limit theorem for percolation clusters. *Electron. J. Probab.*, 14:no. 1, 1–27, 2009.
- [13] N. Berger and M. Biskup. Quenched invariance principle for simple random walk on percolation clusters. *Probab. Theory Related Fields*, 137(1-2):83–120, 2007.
- [14] N. Berger, M. Biskup, C. E. Hoffman, and G. Kozma. Anomalous heat-kernel decay for random walk among bounded random conductances. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 44(2):374–392, 2008.
- [15] M. Biskup. Recent progress on the random conductance model. *Probab. Surv.*, 8:294–373, 2011.
- [16] M. Biskup and O. Boukhadra. Subdiffusive heat-kernel decay in four-dimensional i.i.d. random conductance models. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 86(2):455–481, 2012.
- [17] M. Biskup and T. M. Prescott. Functional CLT for random walk among bounded random conductances. *Electron. J. Probab.*, 12:no. 49, 1323–1348, 2007.
- [18] M. Biskup and H. Spohn. Scaling limit for a class of gradient fields with nonconvex potentials. *Ann. Probab.*, 39(1):224–251, 2011.
- [19] E. Bombieri and E. Giusti. Harnack’s inequality for elliptic differential equations on minimal surfaces. *Invent. Math.*, 15:24–46, 1972.

- [20] E. A. Carlen, S. Kusuoka, and D. W. Stroock. Upper bounds for symmetric Markov transition functions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 23(2, suppl.):245–287, 1987.
- [21] T. Delmotte. Inégalité de Harnack elliptique sur les graphes. *Colloq. Math.*, 72(1):19–37, 1997.
- [22] T. Delmotte. Parabolic Harnack inequality and estimates of Markov chains on graphs. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 15(1):181–232, 1999.
- [23] T. Delmotte and J.-D. Deuschel. On estimating the derivatives of symmetric diffusions in stationary random environment, with applications to $\nabla\phi$ interface model. *Probab. Theory Related Fields*, 133(3):358–390, 2005.
- [24] R. Durrett. *Probability: theory and examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, fourth edition, 2010.
- [25] B. Dyda and M. Kassmann. On weighted Poincaré inequalities. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 38(2):721–726, 2013.
- [26] A. Fannjiang and T. Komorowski. A martingale approach to homogenization of unbounded random flows. *Ann. Probab.*, 25(4):1872–1894, 1997.
- [27] A. Fannjiang and T. Komorowski. An invariance principle for diffusion in turbulence. *Ann. Probab.*, 27(2):751–781, 1999.
- [28] T. Funaki. *Lectures on probability theory and statistics*, volume 1869 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Lectures from the 33rd Probability Summer School held in Saint-Flour, July 6–23, 2003, Edited by Jean Picard.
- [29] G. Giacomin, S. Olla, and H. Spohn. Equilibrium fluctuations for $\nabla\phi$ interface model. *Ann. Probab.*, 29(3):1138–1172, 2001.
- [30] A. Gloria and F. Otto. An optimal variance estimate in stochastic homogenization of discrete elliptic equations. *Ann. Probab.*, 39(3):779–856, 2011.
- [31] A. A. Grigor’yan. The heat equation on noncompact Riemannian manifolds. *Mat. Sb.*, 182(1):55–87, 1991.
- [32] I. S. Helland. Central limit theorems for martingales with discrete or continuous time. *Scand. J. Statist.*, 9(2):79–94, 1982.
- [33] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan. Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions. *Comm. Math. Phys.*, 104(1):1–19, 1986.
- [34] S. M. Kozlov. The averaging method and walks in inhomogeneous environments. *Uspekhi Mat. Nauk*, 40(2(242)):61–120, 238, 1985.
- [35] P. Mathieu. Quenched invariance principles for random walks with random conductances. *J. Stat. Phys.*, 130(5):1025–1046, 2008.
- [36] P. Mathieu and A. Piatnitski. Quenched invariance principles for random walks on percolation clusters. *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 463(2085):2287–2307, 2007.
- [37] P. Mathieu and E. Remy. Isoperimetry and heat kernel decay on percolation clusters. *Ann. Probab.*, 32(1A):100–128, 2004.
- [38] J. Moser. On Harnack’s theorem for elliptic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 14:577–591, 1961.
- [39] J. Moser. A Harnack inequality for parabolic differential equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17:101–134, 1964. Correction in 20:231–236, 1967.
- [40] J. Nash. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.*, 80:931–954, 1958.
- [41] E. Procaccia, R. Rosenthal, and A. Sapozhnikov. Quenched invariance principle for simple random walk on clusters in correlated percolation models. *Preprint, available at arXiv:1310.4764*, 2013.
- [42] L. Saloff-Coste. A note on Poincaré, Sobolev, and Harnack inequalities. *Internat. Math. Res. Notices*, (2):27–38, 1992.
- [43] L. Saloff-Coste. *Aspects of Sobolev-type inequalities*, volume 289 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

- [44] V. Sidoravicius and A.-S. Sznitman. Quenched invariance principles for walks on clusters of percolation or among random conductances. *Probab. Theory Related Fields*, 129(2):219–244, 2004.
- [45] K. T. Sturm. Analysis on local Dirichlet spaces. III. The parabolic Harnack inequality. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 75(3):273–297, 1996.
- [46] V. V. Zhikov. Estimates of Nash-Aronson type for degenerate parabolic equations. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 190(1):66–79, 2013.

ZUSAMMENFASSUNG

Die vorliegende Habilitationsschrift befasst sich mit einer bestimmten Klasse von Irrfahrten in zufälliger Umgebung, dem sog. Random Conductance Model. Untersucht werden Fragen nach einem Invarianzprinzip für die Irrfahrt sowie nach einem lokalen Grenzwertsatz und Gauß'schen Abschätzungen an den heat kernel. Entsprechende Resultate werden zum einen für den Fall diskutiert, dass die Umgebung von nicht-negativen i.i.d. Zufallsvariablen erzeugt wird, zum anderen für allgemeine ergodische Umgebungen, die einer bestimmten Momentenbedingung genügen. Es werden außerdem elliptische und parabolische Harnack-Ungleichungen für nicht-elliptische Operatoren auf Graphen bewiesen. Diese werden im Beweis des lokalen Grenzwertsatzes benutzt. Schließlich werden im letzten Teil noch erste Ergebnisse für das dynamische Random Conductance Model diskutiert.

CURRICULUM VITAE SEBASTIAN ANDRES

- seit 2011 Akademischer Rat am Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn.
- 2009 – 2011 Postdoc an der University of British Columbia, Vancouver.
- Mai 2009 Promotion in Mathematik, Technische Universität Berlin, summa cum laude.
Titel der Dissertation: “Diffusion Processes with Reflection”.
- 2006 – 2009 Doktorand in Mathematik, Technische Universität Berlin.
Betreuer: Prof. J.-D. Deuschel.
Stipendium im DFG-Graduiertenkolleg IRTG “Stochastic Models of Complex Processes”.
- Mai 2006 Diplom in Wirtschaftsmathematik, mit Auszeichnung.
- 2000 – 2006 Student an der Technischen Universität Berlin.
Hauptfach: Wahrscheinlichkeitstheorie und Finanzmathematik.
- 1999 Abitur an humanistischem Gymnasium in Berlin.