


25. Freier zentraler Fall in der Schwarzschild-Metrik

Der zentrale Fall eines massiven Körpers soll untersucht werden.

(a) Zeigen Sie zunächst

$$\frac{dr}{d\tau} = -\frac{c}{\sqrt{3}} \sqrt{3 \frac{r_G}{r} - 1} \quad (1)$$

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{c}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{r_G}{r}\right) \sqrt{3 \frac{r_G}{r} - 1} \quad , \quad (2)$$

wenn der zentrale Fall mit der Geschwindigkeit null bei $r(\tau = 0) = 3r_G$ beginnt.

- (b) Lösen Sie die Differentialgleichung (1). Skizzieren Sie $r(\tau)$. Wie lange benötigt der Körper für den Sturz ins Zentrum?
- (c) Lösen Sie die Differentialgleichung (2) bei $r \approx r_G$ indem Sie die rechte Seite bei $r = r_G$ in eine Taylor-Reihe bis zur linearen Ordnung entwickeln und dann die resultierende lineare Differentialgleichung lösen. Was beobachtet ein entfernter Beobachter mit der Zeit t bei Annäherung des Körpers an r_G ?

Bitte wenden →

26. Verhältnis von Umfang zu Durchmesser für die Erdbahn

Die Bahn der Erde um die Sonne sei eine Kreisbahn mit der radialen Koordinate $r = R$. Das Gravitationsfeld der Sonne werde im Bereich $r < R_\odot$ durch die innere Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G r^2}{R_\odot^3}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - \left\{ \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_G}{R_\odot}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_G r^2}{R_\odot^3}} \right\}^2 dt^2$$

und im Bereich $r \geq R_\odot$ durch die äußere Schwarzschildmetrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_G}{r}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) - \left(1 - \frac{r_G}{r} \right) dt^2$$

beschrieben. Die Dichte der Sonne sei homogen. Berechnen Sie das Verhältnis von Umfang U zu Durchmesser D der Erdbahn. Es sollte kleiner als π sein!

Die Parameter sind:

- Sonnenradius $R_\odot = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$
- Schwarzschildradius $r_G = 3 \text{ km}$
- Erdbahn $R = 1 \text{ AU} = 1.5 \cdot 10^8 \text{ km}$
- Dichte $\varrho_0 = 1.4 \text{ g cm}^{-3}$

Hinweis: Gehen Sie von der metrischen Fundamentalgleichung für die Schwarzschildmetrik aus. Der Umfang U ergibt sich aus

$$U = \int ds|_{r=R, \vartheta=\frac{\pi}{2}, \varphi=(0, 2\pi), t=\text{const}} \quad (3)$$

und der Durchmesser D

$$D = 2 \int ds|_{r=(0, R), \vartheta=\text{const}, \varphi=\text{const}, t=\text{const}} \quad (4)$$