INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer

Allgemeine Relativitätstheorie SS 2023

9. Übungsblatt Abgabe: keine Abgabe, Besprechung: 6. Juli 2023

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

23. Rotverschiebung

Vollziehen Sie die Rechnungen im Skript, Gleichungen (IV.160) bis (IV.176), nach.

24. Koordinatentransformation in differentieller Form

Bei der Herleitung der (äußeren) Schwarzschild-Lösung ist die Einführung einer neuen Zeitkoordinate $t = t(T, r)$ zielführend, wobei die Transformation in differentieller Form durch

$$\mathrm{d}ct = e^{-\frac{\nu(r,T)}{2}} \left(a\,\mathrm{d}r + b\,\mathrm{d}cT\right)$$

gegeben ist und $e^{-\frac{\nu(r,T)}{2}}$ einen integrierenden Faktor darstellt (vgl. Skript, Gl. IV.6). Im Folgenden soll das Auffinden einer expliziten Koordinatentransformation und die Interpretation der neuen Koordinaten anhand eines zweidimensionalen Beispiels veranschaulicht werden.

Wir betrachten die Transformation von kartesischen Koordinaten (x, y) zu Koordinaten (x', Φ') mit

$$x' = x, \quad \mathrm{d}\Phi' = \mu y\,\mathrm{d}x - \mu x\,\mathrm{d}y \quad ,$$

wobei $\mu \neq 0$ einen integrierenden Faktor beschreibt.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass

$$\mathrm{d}\tilde{\Phi}' = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$$

kein vollständiges Differential ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Differential $\mathrm{d}\Phi'$ für $\mu = \frac{1}{x^2}$ exakt (vollständig) ist.

(c) Berechnen Sie $\Phi'(x, y)$.

(d) Die neue Koordinate Φ' enthält eine Integrationskonstante C_1, welche die Skalierung der neuen Koordinatenlinien beeinflusst. Bestimmen und skizzieren Sie die x'- und Φ'-Koordinatenlinien für den Fall $C_1 = 0$.
Vorsicht: Die Koordinatenlinien x' stimmen **nicht** mit den Koordinatenlinien x überein. Erinnern Sie sich an die Definition einer Koordinatenlinie, z.B. Skript Abb. II.1