INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer

Allgemeine Relativitätstheorie SS 2023

8. Übungsblatt Abgabe: keine Abgabe, Besprechung: 29. Juni 2023

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

20. Konstanten der Bewegung

In einem beliebigen Koordinatensystem ist die Bewegungsgleichung eines Teilchens mit den Koordinaten ξ^i durch

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} = -\Gamma^i_{jk} u^j u^k \tag{1}$$

gegeben, wobei $u^i = \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}\tau}$. Zeigen Sie auf drei verschiedenen Wegen, dass $u^i u_i$ eine Erhaltungsgröße ist:

(a) Betrachten Sie u^i als Vierer-Vektor in einem lokalen Inertialsystem und berechnen Sie explizit das Minkowski-Skalarprodukt $u^i u_i$.

(b) Nutzen Sie den Zusammenhang zwischen Gleichung (1) und dem kovarianten Differential aus und zeigen Sie damit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(u^i u_i\right) = 0.$$

(c) Zeigen Sie explizit mit Hilfe von Gleichung (1), dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(u^i u_i\right) = 0$$

in jedem Koordinatensystem erfüllt ist.

21. Isotrope Koordinaten

Überführen Sie die Schwarzschild-Metrik von den Standard-Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$ in isotrope Koordinaten $(\rho, \vartheta, \varphi, ct)$ mittels der Transformation

$$r = \left(1 + \frac{r_G}{4\rho}\right)^2 \rho \quad . \tag{2}$$

Bitte wenden→

22. **Exakte Differentialgleichungen**

Bestimmen Sie die Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung

$$\left(xy^2 + xye^x\right)\ \mathrm{d}x + \left(2x^2y + xe^x\right)\ \mathrm{d}y = 0. \tag{3}$$

Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Überprüfen Sie die Differentialgleichung auf Exaktheit.

(b) Bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor $\mu(x, y)$, sodass die Differentialgleichung exakt wird. Machen Sie dazu für $\mu(x, y)$ einen geeigneten Ansatz.

(c) Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialgleichung mit dem integrierenden Faktor und bestimmen Sie ein Potential $\Phi(x, y)$.

(d) Ermitteln Sie nun die Lösung $y(x)$ aus der Bedingung $\Phi(x, y) = \text{const}$.

Welche Problematik ergibt sich bei der Bestimmung eines integrierenden Faktors in höheren Dimensionen $n > 2$?