

Höhere Analysis zur Elektrotechnik

Dirk Lorenz und Thomas Sonar

Wintersemester 2022

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	3
1 Differentialgleichungen - Einführung	6
2 Elementare Lösungsmethoden	11
3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen	16
4 (Lineare) Differentialgleichungen höherer Ordnung	21
5 Lösung von linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung	25
6 Die Laplace-Transformation	30
7 Lineare Systeme erster Ordnung	35
8 Randwertaufgaben	40
9 Holomorphe Funktionen einer komplexen Variablen	45
10 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen	49
11 Komplexe Integration	54
12 Der Cauchy-Integralsatz und Stammfunktionen	58
13 Die Cauchy-Integralformel	63
14 Funktionenfolgen und Potenzreihen	68
15 Identitätssatz, Maximumprinzip und Analytische Fortsetzung	72
16 Isolierte Singularitäten und Laurent-Reihen	76
17 Der Residuensatz	81

18 Einführung in Distributionen	86
19 Rechnen mit Distributionen	91
20 Distributionelle Lösung von partiellen Differentialgleichungen	97
21 Laplace-Transformation von Distributionen	102
22 Lösung von inhomogenen Anfangswertproblemen mit der Laplace-Transformation	107
23 Das Abtasttheorem	112
24 Der Alias-Effekt	117

Vorbemerkung

Dies ist das Skript zur Vorlesung „Höhere Analysis zur Elektrotechnik“, gehalten an der TU Braunschweig im Wintersemester 2022. Es erhebt keinerlei Anspruch, auch ohne Besuch der Vorlesung verständlich zu sein. Das Skript geht auf die Vorlesung von Thomas Sonar im Wintersemester 2021 zurück. Diese Version enthält mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zahlreiche Fehler; seien Sie also aufmerksam beim Lesen und melden Sie sich bei mir, wenn Sie Fehler gefunden haben, damit ich die Fehler korrigieren kann; alle, die nach Ihnen das Skript lesen, werden es Ihnen danken.

Die Themen in diesem Semester sind gewöhnliche Differentialgleichungen, die Laplace-Transformation, Funktionentheorie und die Theorie der Distributionen. Auch diese Themen sind in einigen Lehrbüchern zu höheren Mathematik für Ingenieurwesen beschrieben. Gewöhnliche Differentialgleichungen sind z.B. in [Neher \[2018\]](#); [Meyberg u. a. \[2001\]](#); [Burg u. a. \[2010\]](#), die Laplace-Transformation in [Meyberg u. a. \[2001\]](#); [Burg u. a. \[2010\]](#), Funktionentheorie in [Meyberg u. a. \[2001\]](#) und Distributionen in [Burg u. a. \[2010\]](#) behandelt.

Braunschweig, den 27. Februar 2023

Dirk Lorenz
d.lorenz@tu-braunschweig.de

-
- [Burg u. a. 2010] BURG, Klemens ; HAF, Herbert ; WILLE, Friedrich ; MEISTER, Andreas: *Höhere Mathematik für Ingenieure Band III: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Distributionen, Integraltransformationen*. Springer-Verlag, 2010. – URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-2334-2>
- [Meyberg u. a. 2001] MEYBERG, Kurt ; VACHENAUER, Peter u. a.: *Höhere Mathematik: Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Fourier-Analyse, Variationsrechnung*. Springer Berlin Heidelberg, 2001. – URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-97970-5>
- [Neher 2018] NEHER, Markus: *Anschauliche höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2*. Springer, 2018. – URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-19422-2>

1 Differentialgleichungen - Einführung

Viele natürliche Vorgänge werden mit Differentialgleichungen modelliert. Dies tritt immer dann auf, wenn sich die *Änderung* einer Größe einfacher beschreiben lässt, als der absolute Wert. Da die Änderung einer Größe deren Ableitung entspricht, ergeben sich Gleichungen, die sowohl den Wert, als auch die Ableitung des Wertes enthalten. Das einfachste Beispiel ist, wenn die Änderung der Größe y proportional zum Wert ist. In diesem Fall ergibt sich die Differentialgleichung

$$y' = ay$$

deren Lösungen wir kennen: Die Lösungen sind alle von der Form $y(t) = e^{at}y_0$ für $y_0 \in \mathbb{R}$.

Es ergeben sich auch oft Gleichungen, die höhere Ableitungen enthalten, wie zum Beispiel in Schaltkreisen: In einem Schaltkreis mit Widerstand R , einem Kondensator mit Kapazität C und einer Spule mit Induktivität L ergibt sich für die Stromstärke I in Abhängigkeit der Zeit die Gleichung

$$LCI'' + RC I' + I = 0,$$

also eine Gleichung zweiter Ordnung. Differentialgleichungen für Größen, die nur von einer Variable abhängen, nennt man *gewöhnliche Differentialgleichungen*. Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen wird die unabhängige Variable oft t genannt und als Zeit interpretiert (obwohl das nicht immer so sein muss).

Im Allgemeinen können gewöhnliche Differentialgleichungen beliebige Ableitungen enthalten, und eine sehr allgemeine Form ist

$$F(t, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

mit einer Funktion F . Die Größe y kann dabei auch vektorwertig sein!

Hier ein paar Begriffe:

- Als *Ordnung* einer Differentialgleichung, bezeichnet man die höchste Ableitung, die in der Gleichung auftaucht.
- Ist die Gleichung von der Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

so nennt man die Gleichung *explizit*, sonst *implizit*.

- Ist die Gleichung von der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t),$$

so haben wir eine *lineare* Differentialgleichung (auch, wenn die Funktionen a_k nicht linear sind).

- Gleichungen der Form

$$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

also solche, bei denen es keine explizite Abhängig von t gibt, nennt man *autonom* oder *zeitinvariant*.

- Ist eine Funktion gesucht, welche in den \mathbb{R}^d abbildet, so sind Gleichungen der Form

$$\vec{F}(t, \vec{y}, \vec{y}', \vec{y}'', \dots, \vec{y}^{(n)}) = 0$$

mit $\vec{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \times \dots \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ Gleichungen im \mathbb{R}^d und man spricht auch von *Differentialgleichungssystemen der Dimension d* . Hier werden also d Funktionen y_1, \dots, y_d gesucht. Ist $d = 1$, so spricht man von *skalaren* Differentialgleichungen

Beispiel 1.1. a) Die Gleichung

$$LCI'' + RCI' + I = 0,$$

ist also eine lineare, autonome Gleichung zweiter Ordnung. Wir haben sie hier zwar nicht so geschrieben, aber sie ist explizit, da wir sie einfach umschreiben können zu

$$I'' = -\frac{1}{LC}I - RI'.$$

b) Die Gleichung

$$y' = t^2 y$$

ist eine explizite lineare Gleichung erster Ordnung.

c) Die Gleichung

$$y' = \frac{t}{y}$$

ist eine explizite, nichtlineare Gleichung erster Ordnung.

d) Die Gleichungen

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha y_1 - \beta y_1 y_2 \\ y_2' &= \gamma y_1 y_2 - \delta y_2 \end{aligned}$$

ist eine autonome, nichtlineare Differentialgleichung in Dimension 2.

e) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ so ist die Gleichung

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{b}(t)$$

für eine unbekannte Funktion \vec{y} , welche in den \mathbb{R}^n abbildet ein *n -dimensionales, lineares Differentialgleichungssystem der Ordnung 1*.

Implizite Differentialgleichungen werden uns hier nicht beschäftigen.

Hängt eine Größe von mehreren Variablen ab, so gibt es mehrere partielle Ableitungen und der entsprechenden Gleichungen heißen *partielle Differentialgleichungen*. Diffusionsprozesse, Transportprozesse, elektromagnetische Zusammenhänge und Wellenausbreitung sind nur einige Beispiele von Prozessen, die mit partiellen Differentialgleichungen modelliert werden.

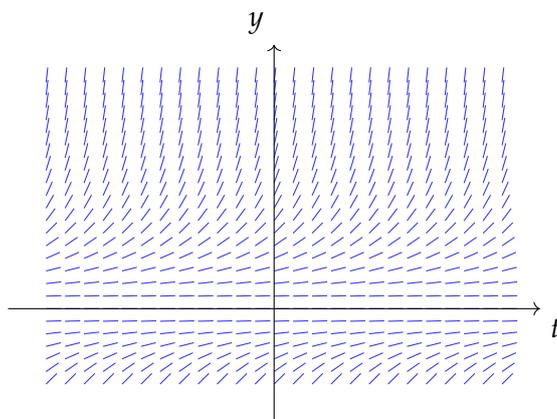
Obwohl das Lösen von Differentialgleichungen ein unglaublich weites Feld ist (auch, wenn man sich auf gewöhnliche beschränkt), gibt es für den Fall von eindimensionalen, gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung immerhin eine gute Methode, sich einen Eindruck über die möglichen Lösungen zu verschaffen: Das sogenannte *Richtungsfeld*.

In jedem Punkt (t, y) wird durch die Gleichung $y' = f(t, y)$ eine Steigung vorgegeben. Eine Lösung ist eine differenzierbare Funktion, dessen Graph in jedem Punkt die vorgegebene Steigung hat.

Beispiel 1.2. Wir betrachten die Gleichung

$$y' = y^2$$

Hier ist das Richtungsfeld dieser Gleichung:



Diese Gleichung ist von der Form $y' = f(y)$, d.h. die rechte Seite hängt nicht von t ab. Solche Gleichungen nennt man *autonom*.

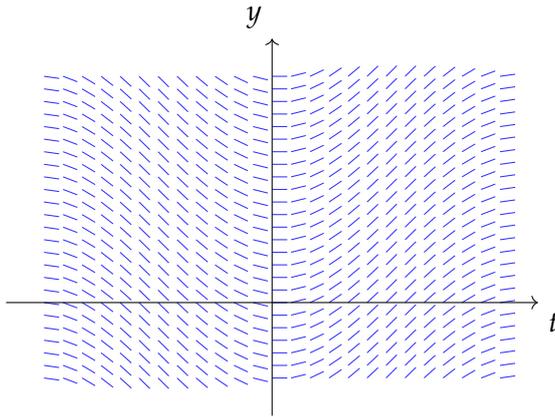
Da die rechte Seite nicht von t abhängt, ändert sich das Richtungsfeld bei Verschiebung in t -Richtung nicht. Auch für die Lösungen gilt: Ist $y(t)$ eine Lösung, so ist für jedes t_0 auch $y(t - t_0)$ eine Lösung. Bei dieser Gleichung haben die Lösungen die Form $\varphi(t) = \frac{1}{c-t}$ ($c \in \mathbb{R}$). Dies rechnet man einfach nach: Für solches φ gilt nämlich

$$\varphi'(t) = -\frac{-1}{(c-t)^2} = \frac{1}{(c-t)^2} = \varphi(t)^2.$$

Beispiel 1.3. Wir betrachten die Gleichung

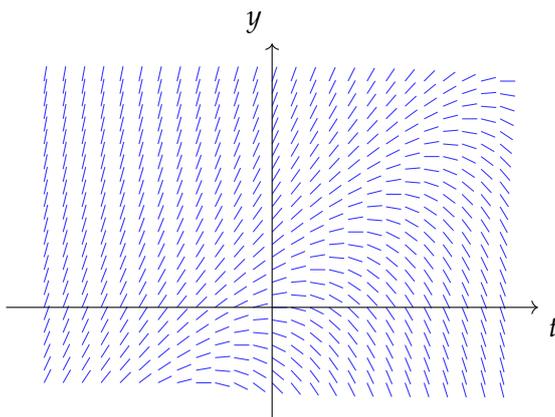
$$y' = \sin(t).$$

Hier ist das Richtungsfeld dieser Gleichung:



Hier hängt die rechte Seite nicht von y ab und daher lassen sich Lösungen entlang der y -Achse verschieben, d.h. ist $y(t)$ eine Lösung, so ist $y(t) + y_0$ ebenfalls eine Lösung. Gleichungen, bei denen die rechte Seite nicht von y abhängt, lassen sich einfach durch Integration der Funktion auf der rechten Seite lösen: Ist F eine Stammfunktion von f , so ist $F(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = f(t)$.

Beispiel 1.4. Für die Gleichung $y' = y - t$ sieht das Richtungsfeld wie folgt aus:

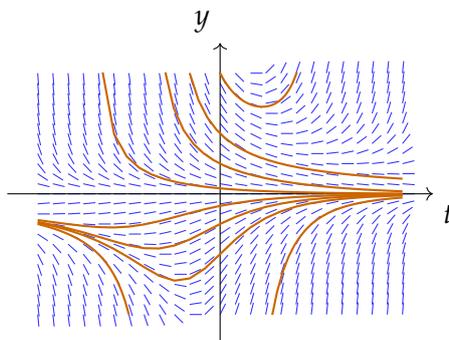


Man rechnet nach, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $\varphi(t) = t - a \exp(t) + 1$ eine Lösung ist.

Beispiel 1.5. Hier noch ein anderes Richtungsfeld. Wir betrachten die Gleichung

$$y' = ty^2 - y$$

und zeichnen ein paar Lösungen ein.



Dies ist ein Spezialfall der sogenannten *Bernoulli-Differentialgleichung* $y' = Q(t)y^n - P(t)y$ ($n \neq 0, 1$, Funktionen P und Q).

Bei dieser Differentialgleichung ist besonders auffällig, dass die verschiedenen Lösungen sehr unterschiedlich sind. Zum Beispiel gibt es Lösungen, welche für alle Zeiten t existieren und wieder andere, die nur für endliche Zeiten existieren (d.h. die nur auf einem beschränkten Intervall existieren).

In allen Beispielen sehen wir, dass es viele Funktionen gibt, die eine gegebene Differentialgleichung erfüllen. Allerdings sieht es auch so aus, als würden wir immer genau eine Lösung bekommen, wenn wir fordern, dass die Lösung durch einen vorgegebenen Punkt (t_0, y_0) geht (das stimmt allerdings nicht immer, wie wir später sehen werden). Dies ist auch von der Anwendung her sinnvoll: Eine Differentialgleichung beschreibt eine *Dynamik* eines Systems: Für einen gegebenen *Zeitpunkt* t_0 und einen *Zustand* y_0 , beschreibt $y' = f(t, y)$, wie sich das System weiterentwickelt. Für solche Probleme gibt es den Begriff des *Anfangswertproblems*:

Definition 1.6. Für $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, eine gegebene Funktion $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ und Werte $(t_0, y_0) \in G$ nennt man

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

das zugehörige *Anfangswertproblem*. Eine Funktion φ heißt *Lösung des Anfangswertproblems*, wenn sie auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ definiert ist, und gilt

- Für alle $t \in I$ gilt $(t, \varphi(t)) \in G$,
- es gilt $\varphi(t_0) = y_0$ und
- für alle $t \in I$ gilt $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

2 Elementare Lösungsmethoden

Für einige Spezialfälle lassen sich Lösungen von Differentialgleichungen tatsächlich mit Papier und Bleistift lösen.

Beispiel 2.1 (Trennung der Variablen). Wir betrachten skalare Differentialgleichungen der Form $y' = f(t)g(y)$ mit Anfangswert (t_0, y_0) . Wir definieren die beiden Funktionen

$$F(t) = \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau, \quad G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(\eta)} d\eta$$

(was geht, wenn f und g stetig sind und $g \neq 0$ gilt). Wir definieren dann

$$\varphi(t) = G^{-1}(F(t)). \quad (2.1)$$

Dies ist dann eine Lösung!

- **Anfangswert:** Es gilt $\varphi(t_0) = G^{-1}(F(t_0)) = G^{-1}(0)$ (da $F(t_0) = 0$). Das ist äquivalent zu $G(\varphi(t_0)) = 0$. Da $G(y_0) = 0$ gilt und G injektiv ist, folgt $\varphi(t_0) = y_0$, wie gefordert.
- **Dynamik:** Wir leiten φ ab (Kettenregel und Regel der Ableitung für die Umkehrfunktion!):

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (G^{-1})'(F(t))F'(t) = (G^{-1})'(F(t))f(t) \\ & \qquad \qquad \qquad (F' = f) \\ &= \frac{1}{G'(G^{-1}(F(t)))}f(t) \qquad ((G^{-1})' = 1/(G' \circ G)) \\ &= g(G^{-1}(F(t)))f(t) = f(t)g(\varphi(t)). \\ & \qquad \qquad \qquad (G' = 1/g) \end{aligned}$$

Die Methode ist in der Praxis einfach anzuwenden (wenn die Integrale einfach zu berechnen sind):

- Wir betrachten das Anfangswertproblem $y' = ty$, $y(0) = 1$, d.h. die beiden Funktionen sind $f(t) = t$ und $g(y) = y$ und es ist $t_0 = 0$, $y_0 = 1$. Wir berechnen

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t \tau d\tau = \frac{t^2}{2}. \\ G(y) &= \int_1^y \frac{1}{\eta} d\eta = \ln(y) - \ln(1) = \ln(y). \end{aligned}$$

Die Gleichung (2.1) ist äquivalent zu $G(\varphi(t)) = F(t)$, also in diesem Fall

$$\ln(\varphi(t)) = \frac{t^2}{2}$$

und es folgt $\varphi(t) = e^{t^2/2}$.

Da g stetig und nie null ist, kann g das Vorzeichen nicht wechseln. Das gleiche gilt für $1/g$ und daher ist G streng monoton woraus die Umkehrbarkeit folgt.

Da g nicht Null werden darf, müssen wir uns hier auf $y > 0$ beschränken!

- Man kann auch die Menge aller Lösungen berechnen. Hierzu kann man entweder den Anfangswert allgemein lassen oder mit unbestimmten Integralen und einer Integrationskonstante rechnen. Den Weg über unbestimmte Integrale schauen wir uns an einem Beispiel an:

Betrachten wir $y' = \frac{t}{y}$. Hier ist also $f(t) = t$ und $g(y) = \frac{1}{y}$. Wir berechnen also

$$\int f(t)dt = \int tdt = \frac{t^2}{2} + C_1, \quad \int \frac{1}{g(y)}dy = \int ydy = \frac{y^2}{2} + C_2.$$

Wir setzen beide Ergebnisse gleich und lösen nach y auf:

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{2} + C_2 &= \frac{t^2}{2} + C_1 \\ \iff y^2 &= t^2 + 2(C_1 - C_2) \\ \iff y &= \pm \sqrt{t^2 + 2(C_1 - C_2)}. \end{aligned}$$

Da C_1 und C_2 beliebige Konstanten sind, haben die Lösungen die Form $\varphi(t) = \pm\sqrt{t^2 + C}$ für ein $C \in \mathbb{R}$.

Eine weitere Klasse, für die es eine allgemeine Lösungsmethode gibt, sind skalare lineare Differentialgleichungen erster Ordnung

$$y' = a(t)y + b(t)$$

mit Funktionen $a(t)$ und $b(t)$. Ist $b \equiv 0$, so nennt man die Gleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Beispiel 2.2 (Variation der Konstanten). Es gibt ein allgemeines Lösungsprinzip für Gleichungen der Form $y' = a(t)y + b(t)$:

1. Bestimme y_h als Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(t)y$ (mit Trennung der Variablen)
2. Mache den Ansatz $y(t) = K(t)y_h(t)$ (also mit *variabler* Konstante, daher der Name) und bestimme $K(t)$ so, dass die inhomogene Gleichung $y' = a(t)y + b(t)$ gelöst wird.

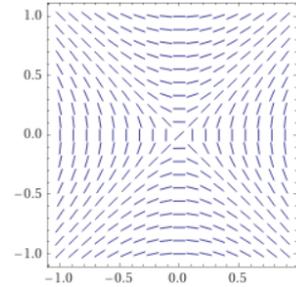
Hier an einem konkreten Beispiel: Wir betrachten $y' = -ty + t$ (also $a(t) = -t$ und $b(t) = t$)

1. Wir lösen $y' = -ty$ mit der Trennung der Variablen. Wir bestimmen die allgemeine Lösung durch

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}dy &= \int -tdt \\ \ln(|y|) &= -\frac{t^2}{2} + C \\ y &= \pm \exp\left(-\frac{t^2}{2} + C\right) = \pm e^C e^{-t^2/2} \\ &= Ke^{-t^2/2} \quad K \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

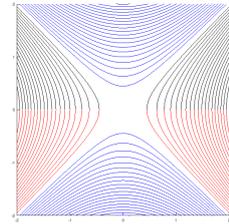
Wir haben also als allgemeine Lösung $y_h(t) = Ke^{-t^2/2}$ mit $K \in \mathbb{R}$.

Das Richtungsfeld sieht so aus:



Man beachte, dass die Lösungen hier sehr unterschiedliche „Existenzintervalle“ haben:

- Ist $C > 0$, so existieren die Lösungen auf ganz \mathbb{R} .
- Ist $C < 0$, so gibt es Lösungen mit Existenzintervall $]-\infty, -\sqrt{-C}]$ und welche mit Existenzintervall $[\sqrt{-C}, \infty[$.



2. Wir machen den Ansatz $y(t) = K(t)y_h(t) = K(t)e^{-t^2/2}$.
Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} y'(t) &= -ty(t) + t \\ \iff (K(t)e^{-t^2/2})' &= -tK(t)e^{-t^2/2} + t \\ \iff K'(t)e^{-t^2/2} + K(t)(-te^{-t^2/2}) &= -tK(t)e^{-t^2/2} + t \\ \iff K'(t)e^{-t^2/2} &= t \\ \iff K'(t) &= te^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass wir alle Möglichkeiten für $K(t)$ durch Integration erhalten:

$$K(t) = \int te^{t^2/2} dt = e^{t^2/2} + C.$$

Das gibt uns die allgemeine Lösung

$$y(t) = (e^{t^2/2} + C)e^{-t^2/2} = 1 + Ce^{-t^2/2}.$$

Die Methode der Variation der Konstanten funktioniert auch allgemein: Eine allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(t)y$ ist $y_h(t) = K \exp(A(t))$ wobei A eine Stammfunktion von a ist (einfach nachrechnen). Für die inhomogene Gleichung macht man den Ansatz $y_p(t) = K(t) \exp(A(t))$. Setzt man dies in die inhomogene Gleichung $y' = a(t)y + b(t)$ ein, so bekommt man

$$\begin{aligned} \left((K(t) \exp(A(t)))' \right) &= a(t)K(t) \exp(A(t)) + b(t) \\ \iff K'(t) \exp(A(t)) + K(t) \underbrace{\exp(A(t)) A'(t)}_{=a(t)} &= a(t)K(t) \exp(A(t)) + b(t) \\ \iff K'(t) \exp(A(t)) &= b(t). \end{aligned}$$

Die Funktion K muss also eine Stammfunktion von $\exp(-A(t))b(t)$ sein. Insgesamt bekommt man für das Anfangswertproblem $y' = a(t)y + b(t)$, $y(t_0) = y_0$ die Lösung

$$\varphi(t) = \exp(A(t)) \left[y_0 + \int_{t_0}^t b(\tau) \exp(-A(\tau)) d\tau \right], \quad \text{mit } A(t) = \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau.$$

Für lineare Differentialgleichungen gilt ein *Superpositionsprinzip*, d.h. man kann Lösung geeignet überlagern:

Satz 2.3 (Superpositionsprinzip). *Es sei y_h eine Lösung der homogenen Gleichung $y' = a(t)y$ und y_p eine Lösung der zugehörigen inhomogenen Gleichung $y' = a(t)y + b(t)$. Dann ist*

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t)$$

wieder eine Lösung der inhomogenen Gleichung.

Beweis.

Wir rechnen einfach nach

$$\begin{aligned} y'(t) &= y'_p(t) + y'_h(t) \\ &= a(t)y_p(t) + b(t) + a(t)y_h(t) \\ &= a(t)(y_p + y_h(t)) + b(t) = a(t)y(t) + b(t). \end{aligned}$$

□

Eine weitere elementare Methode, Differentialgleichungen zu behandeln, ist die Substitution. Wie schon bei Integralen, gibt es hier keine allgemeinen Rezepte. Hier zwei Beispiele:

Beispiel 2.4. Wir betrachten

$$y' = f\left(\frac{y}{t}\right)$$

mit einer stetigen Funktion f . Wir substituieren $u(t) = y(t)/t$. Dann ist $y(t) = tu(t)$ und daher ist nach der Produktregel

$$y'(t) = u(t) + tu'(t).$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} & y'(t) = f\left(\frac{y}{t}\right) \\ \iff & u + tu' = f(u) \\ \iff & u' = \frac{f(u) - u}{t}. \end{aligned}$$

Die Gleichung lässt sich per Trennung der Variablen lösen.

Zur konkreten Gleichung $y' = \frac{y}{t} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{t}\right)^2}$ kommt man durch diese Substitution auf

$$u' = -\frac{\sqrt{1+u^2}}{t}.$$

Trennung der Variablen führt auf die Integrale

$$\begin{aligned} G(u) &= \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du = \ln(u + \sqrt{1+u^2}) \\ F(t) &= -\int \frac{1}{t} dt = -\ln(|t|) + C \end{aligned}$$

und daher sind die Lösungen

$$u + \sqrt{1+u^2} = e^C \frac{1}{|t|}.$$

Substituieren wir zurück ($u = y/t$) ergibt sich

$$\frac{y}{t} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{t^2}} = e^C \frac{1}{|t|}$$

was sich nicht geschlossen nach y lösen lässt. Wir haben daher nur eine implizite Darstellung der Lösungen.

Beispiel 2.5 (Bernoulli'sche Differentialgleichung). Ein klassisches Beispiel für die Substitutionstechnik sind die Gleichungen der Form

$$y' = a(t)y + b(t)y^\alpha, \quad \alpha \notin \{0, 1\}.$$

In diesem Fall bietet sich die Substitution $u = y^{1-\alpha}$ an (d.h. $y = u^{1/(1-\alpha)}$), denn dann ist $u' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$ und es folgt $y' = u'y^\alpha/(1-\alpha) = u'u^{\alpha/(1-\alpha)}/(1-\alpha)$. Also ist die Differentialgleichung

$$u'u^{\alpha/(1-\alpha)}/(1-\alpha) = a(t)u^{1/(1-\alpha)} + b(t)u^{\alpha/(1-\alpha)}.$$

Nach etwas Aufräumen bekommen wir

$$u' = (1-\alpha)[a(t)u + b(t)],$$

also eine skalare lineare Differentialgleichung, welche man mit der Variation der Konstanten lösen kann.

3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen

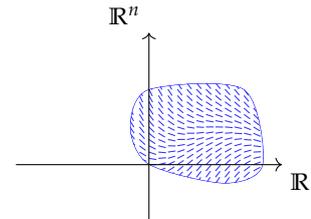
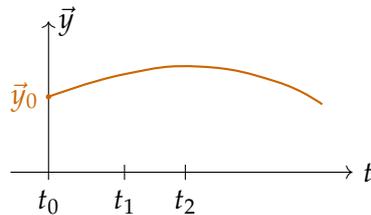
Die elementaren Lösungsverfahren aus dem vorigen Abschnitt haben nur begrenzten Anwendungsbereich. In der Praxis sind *numerische Lösungsmethoden* wesentlich wichtiger. Tatsächlich sind numerische Verfahren auch in der Theorie hilfreich, denn sie führen sogar auf allgemeine Ergebnisse, die Existenz von Lösungen sichern. Wir betrachten hier n -dimensionale Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned}\vec{y}' &= \vec{f}(t, \vec{y}) \\ \vec{y}(t_0) &= \vec{y}_0\end{aligned}\quad (3.1)$$

mit $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen mit $(t_0, \vec{y}_0) \in D$.

Satz 3.1 (Existenzsatz von Peano). *Ist \vec{f} stetig, so gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass das Anfangswertproblem (3.1) auf dem Intervall $I = [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ eine Lösung hat.*

Der Beweis läuft über ein numerisches Verfahren (das Polygonzugverfahren), welches wir jetzt skizzieren wollen: Wir stellen uns die (eindimensionale) Situation vor als



Eine wichtige Idee in der Untersuchung von Anfangswertproblemen ist die Feststellung, dass diese äquivalent zu Integralgleichungen sind: Aus den Fundamentalsatz der Differential und Integralrechnung folgt nämlich

$$\begin{aligned}\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}(t)), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 &\iff \int_{t_0}^t \vec{y}'(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \\ &\iff \vec{y}(t) - \vec{y}_0 = \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \\ &\iff \vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau.\end{aligned}\quad (3.2)$$

Um ein numerisches Verfahren zu erhalten, betrachten wir eine Unterteilung $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ und bekommen wie eben (mit t_i

statt t_0 und t_{i+1} statt t)

$$\vec{y}(t_{i+1}) = \vec{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt.$$

Würden wir das Integral rechts kennen, wüssten wir, wie wir aus dem Wert $\vec{y}(t_i)$ den Wert $\vec{y}(t_{i+1})$ berechnen könnten. Das Integral hängt aber wieder von der Lösung \vec{y} ab, welche wir ja gerade nicht kennen. Wir approximieren das Integral also indem wir den Integranden durch die Konstante $\vec{f}(t_i, \vec{y}(t_i))$ ersetzen. Es ergibt sich also

$$\begin{aligned} \vec{y}(t_{i+1}) &= \vec{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{f}(t, \vec{y}(t)) dt \\ &\approx \vec{y}(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \vec{f}(t_i, \vec{y}(t_i)) dt \\ &= \vec{y}(t_i) + (t_{i+1} - t_i) \vec{f}(t_i, \vec{y}(t_i)). \end{aligned}$$

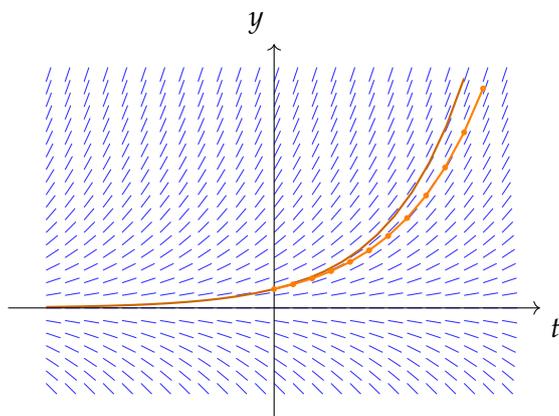
Kürzen wir ab $\vec{y}_i := \vec{y}(t_i)$ und $h_i = t_{i+1} - t_i$, so bekommen wir die kompakte Iteration

$$\vec{y}_{i+1} = \vec{y}_i + h_i \vec{f}(t_i, \vec{y}_i).$$

Beispiel 3.2 (Polygonzugverfahren für $y' = y$). Wir betrachten die sehr einfache Gleichung $y' = y$ (mit den bekannten Lösungen $\varphi(t) = Ke^t$).

Wir nehmen den Anfangswert $y(0) = y_0$ und die *Schrittweite* h . Dann ist $y(0) = y_0$ und

$$y_1 = y_0 + hy_0 = (1+h)y_0, \quad y_{i+1} = (1+h)y_i = (1+h)^{i+1}y_0.$$



Dieses Verfahren nennt man auch *explizites Eulerverfahren* oder auch *Eulersches Polygonzugverfahren*. Die Lösung wird hierbei nämlich durch eine stückweise lineare Funktion approximiert.

Beachte: Das Verfahren konvergiert in folgendem Sinne gegen die Lösung: Nehmen wir Zeitschritte $h = 1/n$ und schauen, wo das Verfahren zur Zeit t ist, so brauchen wir dafür $t/h = n$ Zeitschritte. Der Wert ist also $y_n = (1+h)^{tn} y_0 = (1 + \frac{1}{n})^{tn} y_0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^t y_0$. Dies konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen die wirkliche Lösung $y(t) = e^t y_0$.

Man kann tatsächlich zeigen, dass die stückweise lineare Funktion, die durch das Eulersche Polygonzugverfahren definiert wird für $h \rightarrow 0$ gegen eine Lösung des Anfangswertproblems konvergiert (jedenfalls auf einer kleinen Umgebung des Anfangswertes).

Damit ist die Existenz von Lösungen (jedenfalls für „kurze Zeiten“) geklärt. Allerdings reicht Stetigkeit von \vec{f} im allgemeinen *nicht* für Eindeutigkeit von Lösungen.

Beispiel 3.3 (Nicht-eindeutige Lösungen von Anfangswertproblemen). Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{|y|}, \quad y(0) = -1.$$

Wir lösen dies mit der Methode der Trennung der Variablen (mit $f(t) = 1, g(y) = \sqrt{|y|}$): Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t 1 d\tau = t, & G(y) &= \int_{-1}^y \frac{1}{\sqrt{|\eta|}} d\eta = \left[2 \operatorname{sign}(\eta) \sqrt{|\eta|} \right]_{\eta=-1}^y \\ & & &= 2 \operatorname{sign}(y) \sqrt{|y|} + 2. \end{aligned}$$

Wir wollen die Gleichung

$$2 \operatorname{sign}(y) \sqrt{|y|} + 2 = t$$

lösen. Für $y \leq 0$ ist dies $-2\sqrt{-y} + 2 = t$, also $y = -\frac{(2-t)^2}{4}$. Dies gilt für $y \leq 0$, also $t \leq 2$. Für $y > 0$ hingegen ist $2\sqrt{y} + 2 = t$, also $y = \frac{(t-2)^2}{4}$, was entsprechend für $t > 2$ gilt. Wir haben also insgesamt

$$\varphi(t) = \begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} & : t \leq 2 \\ \frac{(t-2)^2}{4} & : t > 2. \end{cases}$$

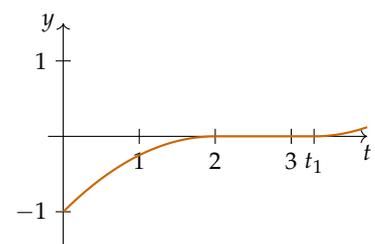
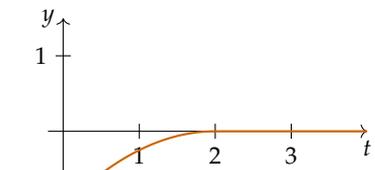
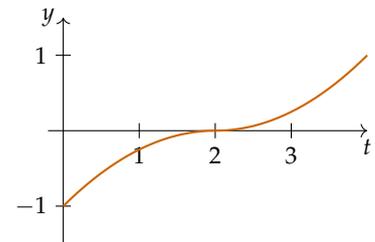
Diese Funktion ist tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems (Differenzierbarkeit in $t = 2$ ist erfüllt!).

Das ist allerdings nicht die einzige Lösung des Anfangswertproblems. Hier ist eine weitere Lösung:

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} & : t \leq 2 \\ 0 & : t > 2. \end{cases}$$

Auch hier prüft man einfach nach, dass $\tilde{\varphi}$ überall (insbesondere in $t = 2$) differenzierbar ist und die Gleichung erfüllt. Hier sind noch beliebig viele weitere Lösungen:

$$\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} -\frac{(t-2)^2}{4} & : t \leq 2 \\ 0 & : 2 < t < t_1 \\ \frac{(t-t_1)^2}{4} & : t > t_1 \end{cases}$$



mit $t_1 > 2$.

Salopp gesagt kann die Lösung nachdem sie bei $t = 2$ am Wert $y = 0$ angekommen ist zu jeder Zeit entscheiden, ob sie bei diesem Wert bleibt, oder entlang einer Parabel die Null verlässt.

Um Eindeutigkeit von Lösungen garantieren zu können, gibt es eine etwas stärkere Forderung an f als Stetigkeit:

Definition 3.4 (Lipschitz-Stetigkeit). Eine Funktion $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen) heißt *Lipschitz-stetig bezüglich \vec{y}* mit *Lipschitz-Konstante L* (oder auch *L -Lipschitz-stetig*), wenn gilt

$$\forall (t, \vec{z}), (t, \vec{y}) \in D : \|\vec{f}(t, \vec{z}) - \vec{f}(t, \vec{y})\| \leq L \|\vec{z} - \vec{y}\|$$

Eine Funktion ist L -Lipschitz-stetig, wenn alle Differenzenquotienten durch L beschränkt sind. Insbesondere müssen (im Falle eines differenzierbaren \vec{f}) alle partiellen Ableitungen von \vec{f} nach den Variablen y_1, \dots, y_n durch L beschränkt sein.

Beispiel 3.5. 1. Die nicht-differenzierbare Funktion $f(y) = |y|$ ist Lipschitz-stetig mit $L = 1$.

2. Die stetige und nicht differenzierbare Funktion $f(y) = \sqrt{|y|}$ ist *nicht* Lipschitz-stetig, denn die Quotienten

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{\sqrt{|y|}}{y} = \frac{\text{sign}(y)}{\sqrt{|y|}}$$

sind nicht beschränkt.

3. Die differenzierbare Funktion $f(y) = y^2$ ist, betrachtet man sie auf ganz \mathbb{R} ebenfalls nicht Lipschitz-stetig, aber auf jedem kompakten Intervall $[a, b]$ ist sie es (denn dann ist die Ableitung $f'(y) = 2y$ beschränkt).

Satz 3.6 (Picard-Lindelöf). Es sei $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, ($D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen) auf einem Quader der Form $Q = \{(t, \vec{y}) \mid |t - t_0| \leq a, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq b\} \subset D$ stetig und es gebe Konstanten $M, L > 0$, so dass

$$\begin{aligned} \forall (t, \vec{y}) \in Q : \|\vec{f}(t, \vec{y})\| &\leq M \\ \forall (t, \vec{y}), (t, \vec{z}) \in Q : \|\vec{f}(t, \vec{y}) - \vec{f}(t, \vec{z})\| &\leq L \|\vec{y} - \vec{z}\|. \end{aligned}$$

Das hat das Anfangswertproblem

$$\vec{y}' = \vec{f}(t, \vec{y}), \quad \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0, \quad (3.3)$$

genau eine Lösung \vec{y} , die mindestens auf einem Intervall $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ mit $\epsilon = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ existiert.

Auch dieser Satz wird bewiesen, indem man zeigt, dass ein Approximationsverfahren gegen die Lösung konvergiert. Wieder geht man von der Umformulierung des Anfangswertproblems (3.3)

wie in (3.2) aus, d.h. man betrachtet die äquivalente Integralgleichung

$$\vec{y}(t) = \vec{y}(t_0) + \int_{t_0}^t f(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau.$$

Die einfache Idee des Beweises, ist es, diese Gleichung als *Fixpunktgleichung für die gesuchte Funktion \vec{y} aufzufassen und zu iterieren*: Wir starten mit der konstanten Funktion

$$\vec{y}^{[0]}(t) := \vec{y}_0$$

und definieren iterativ für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\vec{y}^{[k+1]}(t) := \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{y}^{[k]}(\tau)) d\tau.$$

Das Verfahren wird an einem Beispiel klar:

Beispiel 3.7 (Exponentialfunktion als Grenzwert der Picard-Iteration). Für das Anfangswertproblem $y' = y$, $y(0) = 1$ ergeben sich die Iterierten

$$\begin{aligned} y^{[0]}(t) &\equiv 1 \\ y^{[1]}(t) &= 1 + \int_0^t y^{[0]}(\tau) d\tau \\ &= 1 + \int_0^t 1 d\tau = 1 + t \\ y^{[2]}(t) &= 1 + \int_0^t y^{[1]}(\tau) d\tau \\ &= 1 + \int_0^t (1 + \tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 \\ y^{[3]}(t) &= 1 + \int_0^t y^{[2]}(\tau) d\tau \\ &= 1 + \int_0^t (1 + \tau + \frac{1}{2}\tau^2) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3. \end{aligned}$$

Es gilt sogar $\lim_{k \rightarrow \infty} y^{[k]}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k = e^t$.

Diese Iteration kann auch als numerisches Verfahren benutzt werden (dafür müssen die entsprechenden Integrale diskretisiert und numerisch berechnet werden).

4 (Lineare) Differentialgleichungen höherer Ordnung

Allgemeine (explizite) skalare Differentialgleichungen der Ordnung n haben die Form

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \quad (4.1)$$

Um hier Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu untersuchen gibt es einen genialen Trick:

Reduktionstrick: Jede Differentialgleichung der Form (4.1) lässt sich äquivalent in ein System von n Differentialgleichungen erster Ordnung umformen!

Dies geht so: Wir definieren eine Funktion \vec{Y} mit Werten im \mathbb{R}^n durch

$$\vec{Y}_k(t) := y^{(k-1)}(t), \quad k = 1, \dots, n.$$

Diese Funktion erfüllt folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} Y'_n &= (y^{(n-1)})' = y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}). \\ Y'_{n-1} &= (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = Y_n \\ &\vdots \\ Y'_2 &= (y')' = y'' = Y_3 \\ Y'_1 &= y' = Y_2 \end{aligned}$$

Dies lässt sich zu einem System zusammenfassen:

$$\vec{Y}' = \begin{pmatrix} Y'_1 \\ Y'_2 \\ \vdots \\ Y'_{n-1} \\ Y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_n \\ f(t, Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \end{pmatrix} =: F(Y). \quad (4.2)$$

Es gilt: φ löst (4.1) genau dann, wenn $\Phi = (\varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)})$ die Gleichung (4.2) löst.

Aus dem Reduktionstrick bekommt man aus den vorigen Sätzen von Peano und Picard-Lindelöf Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Insbesondere sehen wir, dass wir Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von (4.1) aus Lipschitzstetigkeit von f in den Argumenten $y, \dots, y^{(n-1)}$ bekommen und weiterhin Anfangswerte für $\vec{Y} = (y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$ vorgeben müssen, was Anfangswerten für die erste $n - 1$ Ableitungen von y entspricht. Ein typisches Anfangswertproblem n -ter Ordnung ist also

$$\begin{aligned} y^{(n)} &= f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) &= y_0, \quad y'(t_0) = y_1, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Man kann auch die numerischen Methoden (Polygonzugverfahren und die Picard-Iteration) mit Hilfe des Reduktionstricks auf Gleichungen n -ter Ordnung anwenden.

Für den Spezialfall von linearen Gleichungen n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$$

mit stetigen Funktionen a_k und b gibt es spezielle Techniken, die ohne Reduktionstrick auskommen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von *Differentialoperatoren*

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_1(t)y' + a_0(t)y.$$

Ein Differentialoperator bekommt als Input eine *Funktion* und gibt auch wieder eine *Funktion* als Output. Man schreibt den Differentialoperator L auch als

$$L = \sum_{k=0}^n a_k(t) \frac{d^k}{dt^k}, \quad a_n = 1.$$

Betrachten wir zuerst den Fall $n = 2$.

Beispiel 4.1 (Lineare Dgl. 2-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten). Wir betrachten den Differentialoperator

$$L[y] := y'' + a_1 y' + a_0 y.$$

Da für lineare Differentialgleichungen das Superpositionsprinzip aus Satz 2.3 gilt, betrachten wir zuerst die homogene Gleichung

$$L[y] = 0.$$

Wir machen den Ansatz $y(t) = e^{\lambda t}$. Dann gilt

$$y'(t) = \lambda e^{\lambda t}, \quad y''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

und daher ist

$$\begin{aligned} L[y](t) &= 0 \\ \iff \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} &= 0 \\ \iff (\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda t} &= 0. \end{aligned}$$

Man nennt $p(\lambda) := \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0$ das *charakteristische Polynom* des Differentialoperators L . Wir unterscheiden nun Fälle nach den Nullstellen von p :

1. Es gibt zwei komplexe Nullstellen $\lambda = \alpha + j\beta$ und $\bar{\lambda} = \alpha - j\beta$.
2. Es gibt eine reelle Nullstelle λ 2-ter Ordnung.
3. Es gibt zwei verschiedene reelle Nullstellen $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

In jedem Fall haben wir zwei „linear unabhängige“ Lösungen:

Ein solches Objekt hatten wir schon einmal in der Analysis gesehen: Die Fouriertransformation \mathcal{F} hat ebenfalls Funktionen als Input und Output.

1. Hier hat man nach der Euler-Formel $e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos(y) + j \sin(y))$ und wir bekommen die komplexen Lösungen $e^{(\alpha+j\beta)t} = e^{\alpha t} (\cos(\beta t) + j \sin(\beta t))$. Real- und Imaginärteil davon sind reelle Lösungen:

$$y_1(t) = e^{\alpha t} \cos(\beta t)$$

$$y_2(t) = e^{\alpha t} \sin(\beta t).$$

2. In diesem Fall nennen wir die Nullstelle λ_0 und wissen, dass das charakteristische Polynom erfüllt $p(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2 = \lambda^2 - 2\lambda_0\lambda + \lambda_0^2$ und man rechnet einfach nach, dass es die beiden Lösungen

$$y_1(t) = e^{\lambda_0 t}$$

$$y_2(t) = t e^{\lambda_0 t}$$

gibt.

3. Hier haben wir einfach die beiden Lösungen

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$

$$y_2(t) = e^{\lambda_2 t}.$$

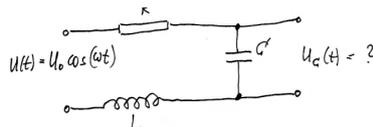
In jedem Fall liefert uns das Superpositionsprinzip die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Hat man Anfangswerte gegeben, so kann man die Koeffizienten C_1, C_2 an diese anpassen.

In inhomogenen Fall ($b \neq 0$) macht man typischerweise geeignete Ansätze. Das schauen wir uns im nächsten Beispiel an.

Beispiel 4.2 (Schwingkreis). Wir betrachten folgenden Schwingkreis:



Die Elektrotechnik lehrt uns, dass die Spannung U_c die Differentialgleichung

$$L U_c''(t) + R U_c'(t) + \frac{1}{C} U_c = \frac{U_0}{C} \cos(\omega t)$$

erfüllt. Wir dividieren durch L und betrachten die homogene Gleichung

$$y'' + \frac{R}{L} y' + \frac{1}{LC} y = 0.$$

Das charakteristische Polynom ist $p(\lambda) = \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC}$ und hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = \frac{1}{2L} \left(-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} \right).$$

Wir unterscheiden nach den drei Fällen des vorigen Beispiels:

1. $R^2 < 4L/C$: zwei komplexe Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \frac{1}{2L} \left(-R \pm j\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2} \right).$$

Wir führen die Abkürzungen ein

$$\begin{aligned} \omega_e &= \text{Im}(\lambda_1) = \frac{1}{2L} \sqrt{4\frac{L}{C} - R^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \\ \delta &= -\text{Re}(\lambda_1) = \frac{R}{2L}. \end{aligned}$$

Damit schreiben wir die allgemeine Lösung als

$$\begin{aligned} y(t) &= C_1 e^{-\delta t} \cos(\omega_e t) + C_2 e^{-\delta t} \sin(\omega_e t) \\ &= e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_e t) + C_2 \sin(\omega_e t)). \end{aligned}$$

Dies nennt man den *schwach gedämpften Fall*.

2. $R^2 = 4L/C$: eine doppelte reelle Nullstelle $\lambda_0 = -R/(2L)$.
Die allgemeine Lösung hat die Form

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\frac{R}{2L} t}.$$

Diesen Fall nennt man *aperiodischen Grenzfall*.

3. $R^2 > 4L/C$ (zwei verschiedene reelle Nullstellen):. Hier haben wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = C_1 e^{\frac{1}{2L} \left(-R + \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} \right) t} + C_2 e^{\frac{1}{2L} \left(-R - \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}} \right) t}$$

Dies nennt man den *aperiodischen Fall* oder auch den Fall von *starker Dämpfung*.

Den inhomogenen Fall betrachten wir im nächsten Abschnitt im allgemeinen Fall.

5 Lösung von linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung

Kommen wir zurück zu allgemeinen linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung, also Gleichungen der Form

$$L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = b(t).$$

Wir starten wieder mit dem homogenen Fall.

Definition 5.1. Ein Funktionensystem (y_1, \dots, y_n) heißt *Fundamentalsystem* der Differentialgleichung $L[y] = b$, wenn

- (a) die Funktionen y_k jeweils die homogenen Gleichung $L[y] = 0$ lösen und
- (b) die sogenannte *Wronski-Determinante*

$$W(t) = \det \left(\begin{pmatrix} y_1(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \right)$$

für mindestens eine $t_0 \in \mathbb{R}$ nicht null ist.

Satz 5.2 (Bestimmung eines Fundamentalsystems). a) Ist $W(t_0) \neq 0$ für ein t_0 , so gilt $W(t) \neq 0$ für alle t .

b) Es seien $y_k, k = 1, \dots, n$ Lösungen von $L[y] = 0$ welche die Anfangswerte

$$y_k^{(i)}(t_0) = \begin{cases} 0 & : i \neq k-1 \\ 1 & : i = k-1 \end{cases}, i = 0, 1, \dots, n-1$$

erfüllen. Dann ist (y_1, \dots, y_n) ein Fundamentalsystem zur Gleichung $L[y] = b$.

c) Die Menge aller Lösungen der homogenen Gleichung $L[y] = 0$ bildet einen n -dimensionalen Vektorraum.

Hat man ein Fundamentalsystem, so kann man Lösungen der inhomogenen Gleichung $L[y] = b$ mit der Technik der Variation der Konstanten bestimmen:

Beispiel 5.3 (Variation der Konstanten). Wir machen den Ansatz

$$y_p(t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i(t).$$

Versuchen wir nun die Ableitungen von y_p zu bestimmen um diese dann in die Differentialgleichung einzusetzen, so werden die Ausdrücke durch die wiederholte Anwendung der Produktregel schnell unübersichtlich.

Es folgt dann, dass $W(t) \neq 0$ für alle t gilt und übrigens auch, dass die Funktionen y_1, \dots, y_n linear unabhängig sind.

Die Bestimmung eines Fundamentalsystems ist im Allgemeinen nicht einfach, besonders im Fall von Koeffizienten, die von t abhängen. Für konstante Koeffizienten ist dies im Prinzip analog zum Fall $n = 2$ aus dem vorigen Abschnitt mit Hilfe des charakteristischen Polynoms möglich. Alternativ kann man in diesem Fall auch die Laplace-Transformation aus dem nächsten Abschnitt benutzen.

Die Sache wird wesentlich einfacher, wenn wir folgendes fordern:

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1(t) + \dots + C_n'(t)y_n(t) &= 0 \\ C_1'(t)y_1'(t) + \dots + C_n'(t)y_n'(t) &= 0 \\ &\vdots \\ C_1'(t)y_1^{(n-2)}(t) + \dots + C_n'(t)y_n^{(n-2)}(t) &= 0. \end{aligned}$$

Leiten wir nun y_p mehrfach ab, so bleiben die Ausdrücke einfach:

$$\begin{aligned} y_p'(t) &= \sum_{i=1}^n (C_i(t)y_i(t))' = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i(t)}_{=0} + \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i'(t) \\ &= \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i'(t) \\ y_p''(t) &= \sum_{i=1}^n (C_i(t)y_i'(t))' = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i'(t)}_{=0} + \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i''(t) \\ &= \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i''(t) \\ &\vdots \\ y_p^{(n-1)}(t) &= \sum_{i=1}^n (C_i(t)y_i^{(n-2)}(t))' = \underbrace{\sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i^{(n-2)}(t)}_{=0} + \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(n-1)}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(n-1)}(t). \end{aligned}$$

Für die n -te Ableitung bekommen wir

$$y_p^{(n)} = \sum_{i=1}^n (C_i(t)y_i^{(n-1)}(t))' = \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i^{(n-1)}(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(n)}(t)$$

Setzen wir all dies in die Differentialgleichung ein, so bekommen wir

$$\begin{aligned} L[y_p](t) &= \sum_{k=1}^n a_k(t)y_p^{(k)}(t) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k(t) \sum_{i=1}^n C_i(t)y_i^{(k)}(t) + \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i^{(n-1)}(t) \\ &= \sum_{i=1}^n C_i(t) \underbrace{\sum_{k=1}^n a_k(t)y_i^{(k)}(t)}_{=0 \text{ da Lsgen!}} + \sum_{i=1}^n C_i'(t)y_i^{(n-1)}(t) \stackrel{!}{=} b(t) \end{aligned}$$

Zusammengefasst: Die Koeffizientenfunktionen C_i müssen für jedes t folgendes Gleichungssystem erfüllen:

$$\begin{pmatrix} y_1(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & \cdots & y_n'(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \\ \vdots \\ C_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Dies Gleichungssystem hat eine Lösung, da wir ja schon gefordert hatten, dass die Wronski-Determinante nicht Null ist.

Das Verfahren aus dem obigem Beispiel ist meist mühselig und aufwändig. Im Fall von Gleichungen zweiter Ordnung, lässt es sich für bestimmte rechte Seiten b explizit bis zum Ende durchführen und führt auf das Verfahren des „Ansatzes vom Typ der rechten Seite“. Bevor wir das beschreiben, hier noch eine hilfreiche Technik für lineare Differentialgleichungen:

Komplexifizierung: Wie auch schon bei Eigenwerten und Polynomen, ist es auch bei linearen Differentialgleichungen oft hilfreich, im Komplexen zu rechnen. Es gilt nämlich: Die Funktion $y = u + jv$ löst genau dann die Differentialgleichung $L[y] = g(t) + jh(t)$, wenn die Funktionen u und v die Differentialgleichungen

$$L[u] = g \quad \text{und} \quad L[v] = h$$

lösen.

Beispiel 5.4 (Komplexifizierung). a) Die Differentialgleichung

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

hat die komplexe Lösung $y(t) = e^{j\omega t}$. Daher hat sie die reellen Lösungen

$$u(t) = \operatorname{Re}(y(t)) = \cos(\omega t), \quad \text{und} \quad v(t) = \operatorname{Im}(y(t)) = \sin(\omega t).$$

b) Wir komplexifizieren die Gleichung $y'' - 4y' + 13y = \cos(t)$ zu $y'' - 4y' + 13y = e^{jt}$ und machen den Ansatz $y(t) = Ce^{jt}$. Durch Einsetzen führt das auf

$$y(t) = \frac{1}{40}(3 + j)e^{jt}$$

und daher hat die reelle Gleichung die Lösung

$$u(t) = \operatorname{Re}(y(t)) = \frac{1}{40}(3 \cos(t) - \sin(t)).$$

Für spezielle rechte Seiten von linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung gibt es spezielle Ansätze:

Beispiel 5.5 (Ansatz vom Typ der rechten Seite). Wir beschränken uns auf den Fall von Gleichungen zweiter Ordnung und bestimmte rechte Seiten:

$$y'' + ay' + by = p_m(t)e^{wt},$$

eventuell nach Komplexifizierung, also mit Polynom $p_m(t) = a_0 + a_1t + \dots + a_mt^m$, $a_k \in \mathbb{C}$ und $w \in \mathbb{C}$. Hier macht man folgenden Ansatz:

Betrachte das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$ und setze

$$y_p(t) = \begin{cases} P_m(t)e^{wt} & : \text{ falls } p(w) \neq 0 \\ tP_m(t)e^{wt} & : \text{ falls } p(w) = 0, p'(w) \neq 0 \\ t^2P_m(t)e^{wt} & : \text{ falls } p(w) = 0, p'(w) = 0 \end{cases}$$

mit $P_m(t) = A_0 + A_1t + \dots + A_mt^m$, $A_i \in \mathbb{C}$.

Dieser Ansatz führt zum Ziel. Wir betrachten konkret

$$y'' + 4y = t^2 + 5 \cos(2t).$$

Nach dem Superpositionsprinzip können wir beide rechte Seiten getrennt voneinander betrachten:

1. Für $y'' + 4y = t^2$ ist das Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$ und unser Ansatz ist von der Form $y_1(t) = P_2(t)e^{0t} = P_2(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2$, da 0 keine Nullstelle von p ist. Wir setzen diesen Ansatz in die Gleichung ein und bekommen:

$$2A_2 + 4(A_0 + A_1t + A_2t^2) = t^2.$$

Wir vergleichen die Koeffizienten auf beiden Seiten und bekommen die Gleichungen $2A_2 + 4A_0 = 0$, $4A_1 = 0$ und $4A_2 = 1$. Das gibt

$$A_2 = \frac{1}{4}, \quad A_1 = 0, \quad A_0 = -\frac{1}{8}$$

und daher die Lösung

$$y_1(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2$$

2. Die Gleichung $y'' + 4y = 5 \cos(2t)$ komplexifizieren wir zu $y'' + 4y = 5e^{2jt}$. Hier ist $w = 2j$ und damit eine einfache Nullstelle von $p(\lambda) = \lambda^2 + 4$ (die andere Nullstelle ist $-2j$). Wir machen daher den Ansatz $y_2(t) = tA_0e^{2jt}$. Wir berechnen die Ableitungen

$$y_2'(t) = A_0(e^{2jt} + 2jte^{2jt}), \quad y_2''(t) = A_0(4je^{2jt} - 4te^{2jt})$$

und setzen in die Differentialgleichung ein:

$$A_0(4je^{2jt} - 4te^{2jt}) + 4A_0te^{2jt} = 5e^{2jt}$$

$$\iff 4jA_0 = 5 \implies A_0 = -\frac{5}{4}j.$$

Dies gibt uns die komplexe Lösung $y_2(t) = -\frac{5}{4}jte^{2jt} = -\frac{5}{4}t(-\sin(2t) + j\cos(2t))$ und also die reelle Lösung $u_2(t) = \frac{5}{4}t \sin(2t)$.

Das geht auch allgemein für Gleichungen n -ter Ordnung mit solchen rechten Seiten. Man macht dann den Ansatz $t^k P_m(t)e^{wt}$, wenn w eine k -fache Nullstelle des zugehörigen Polynoms ist.

Durch Superposition der beiden Lösungen bekommen wir die reelle partikuläre Lösung

$$y_p(t) = y_1(t) + u_2(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{4}t \sin(2t).$$

Bei dieser Gleichung sieht man einfach das Fundamentalsystem $\sin(2t)$, $\cos(2t)$ und damit ist die Allgemeine Lösung

$$y(t) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{4}t \sin(2t) + c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t).$$

6 Die Laplace-Transformation

Die Laplace-Transformation ist (wie die Fourier-Transformation) ein Integraltransformation. Hierbei wird eine Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zugeordnet.

Definition 6.1. Eine Funktion $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Laplace-transformierbar*, wenn das uneigentliche Integral

$$F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\}(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

für ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert. Die Funktion F heißt (*reelle*) *Laplace-Transformierte* von f . Man spricht auch von der *Bildfunktion* F und der *Urbildfunktion* f . Die Abbildung, die f auf F abbildet heißt *Laplace-Transformation*.

Ein paar Bemerkungen dazu:

- Konvergiert das uneigentliche Integral für ein s_0 , so auch für alle $s \geq s_0$.
- Eine hinreichende Bedingung für die Laplace-Transformierbarkeit von f ist, dass f von *exponentieller Ordnung* ist, d.h. dass es Konstanten C und s_0 und ein $T > 0$ gibt, so dass für alle $t \geq T$ gilt

$$|f(t)| \leq Ce^{s_0 t}.$$

- Man kann die Laplace-Transformierte auch für komplexes $s = \sigma + i\omega$ betrachten. Die Transformierte existiert dann immer in einer Halbebene $\operatorname{Re}(s) \geq \sigma_0$ mit einem $\sigma_0 \in \mathbb{R}$.
- Stetigkeit von f ist für Laplace-Transformierbarkeit nicht erforderlich, es muss nur das Integral existieren.

Beispiel 6.2. (a) Die Funktion $f \equiv 1$ hat die folgende Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{1\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-st} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{t=0}^T \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sT} + \frac{1}{s} \right] = \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

(b) Für $f(t) = e^{kt}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s-k)t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s-k} e^{-(s-k)t} \right]_{t=0}^T. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass dieser Grenzwert existiert, wenn $s - k > 0$ gilt, also für $s > k$. Es ergibt sich

$$F(s) = \frac{1}{s-k}.$$

(c) Für $f(s) = \cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ nutzen wir komplexe Rechnung: Wir nehmen im vorigen Punkt $k = j\omega$ und erhalten

$$\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}(s) = \frac{1}{s-j\omega}.$$

Da wir Integrale mit komplexen Integranden berechnen, indem wir Real- und Imaginärteil getrennt berechnen und es gilt $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$ folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega t)\}(s) &= \operatorname{Re} \left[\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}(s) \right] = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s-j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}. \\ \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\}(s) &= \operatorname{Im} \left[\mathcal{L}\{e^{j\omega t}\}(s) \right] = \operatorname{Im} \left(\frac{1}{s-j\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}. \end{aligned}$$

und jeweils existieren die Transformierten für $s > 0$.

Die Laplace-Transformierte bestimmt die Funktion:

Satz 6.3. Gilt für zwei Funktionen $f, g : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$

1. die Laplace-Transformierten F und G existieren und
2. überall da, wo beide existieren gilt $F(s) = G(s)$,

dann gilt $f(t) = g(t)$ in allen Punkten in denen f und g stetig sind.

Satz 6.4 (Rechenregeln für die Laplace-Transformation). Für die Laplace-Transformation gelten folgenden Rechenregeln:

(i) *Linearität*

$$\mathcal{L}\{\alpha f + \beta g\}(s) = \alpha \mathcal{L}\{f\}(s) + \beta \mathcal{L}\{g\}(s), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

(ii) *Streckung*

$$\mathcal{L}\{f(ct)\}(s) = \frac{1}{c} \mathcal{L}\{f\}\left(\frac{s}{c}\right), \quad c > 0,$$

(iii) *Ableitungen und Integral*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\}(s) &= s \mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) \\ \mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) &= s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\}(s) &= \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f\}(s). \end{aligned}$$

Beispiel 6.5 (Laplace-Transformation von Monomen). Aus Satz 6.4 (ii) bekommen wir

$$\mathcal{L}\{t^n\}(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Die Regel (iii) aus Satz 6.4 zur Laplace-Transformation von Ableitungen macht die Laplace-Transformation geeignet um lineare Anfangswertprobleme mit konstanten Koeffizienten lösen: Ableitungen werden in algebraische Operationen übersetzt und Anfangswerte werden automatisch berücksichtigt.

Satz 6.6. Es sei P ein Polynom vom Grad n . Für die Lösung der Differentialgleichung

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0$$

mit

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1$$

gilt

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{1}{P(s)}.$$

Beweis.

Auf Grund der Anfangswerte folgt für y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'\}(s) &= s\mathcal{L}\{y\}(s) \\ &\vdots \\ \mathcal{L}\{y^{(n-1)}\}(s) &= s^{n-1}\mathcal{L}\{y\}(s) \\ \mathcal{L}\{y^{(n)}\}(s) &= s^n\mathcal{L}\{y\}(s) - 1. \end{aligned}$$

Da y die Differentialgleichung erfüllt, folgt für $\mathcal{L}\{y\}(s)$:

$$s^n\mathcal{L}\{y\}(s) + a_{n-1}s^{n-1}\mathcal{L}\{y\}(s) + \dots + a_0\mathcal{L}\{y\}(s) = 1$$

Und daher muss $P(s)\mathcal{L}\{y\}(s) = 1$, was die Behauptung zeigt. \square

Für die inhomogene Differentialgleichung

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y(t) = f(t)$$

mit Anfangswerten $y(0) = c_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1}$ ergibt sich mit $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ für die Laplace-Transformierte der Lösung

$$\mathcal{L}\{y\}(s) = \frac{A(s)}{P(s)} + \frac{F(s)}{P(s)}$$

mit einem Polynom A vom Grade $\leq n - 1$ (welches von den Koeffizienten a_k und den Anfangswerten c_k abhängt und dessen Form wir hier nicht allgemein angeben).

Das allgemeine Verfahren ist wie folgt:

1. Wende die Laplace-Transformation auf beide Seiten der Differentialgleichung an.

2. Löse die erhaltene (algebraische) Gleichung nach $Y = \mathcal{L}\{y\}$ auf.
3. Bestimme die Rücktransformation $y = \mathcal{L}^{-1}\{Y\}$ (üblicherweise mit Hilfe von bekannten Transformaten, Rechenregeln und Tabellen).

Beispiel 6.7. 1. Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' + 4y = \sin(\omega t), \quad y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2.$$

(a) Transformiere beide Seiten:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + 4y\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} \\ \implies \mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} &= \mathcal{L}\{\sin(\omega t)\} \\ \implies s^2 Y(s) - \underbrace{s y(0)}_{=c_1} - \underbrace{y'(0)}_{=c_2} + 4Y(s) &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \implies (s^2 + 4)Y(s) - c_1 s - c_2 &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

(b) Auflösen nach Y :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{s^2 + 4} \left(\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + c_1 s + c_2 \right) \\ &= \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 4)} + c_1 \frac{s}{s^2 + 4} + c_2 \frac{1}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass der Fall $\omega = 2$ besonders ist: Der erste Summand enthält dann den Term $(s^2 + 4)^2$ im Nenner, hat also doppelte Nullstellen!

(c) Rücktransformation: In Tabellen kann man die Rücktransformaten der einzelnen Summanden nachschlagen (oder man bestimmt sie mit Hilfe von Software):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} \frac{\omega \sin(2t) - 2 \sin(\omega t)}{\omega^2 - 4}\right\}(s) &= \frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)(s^2 + 4)}, \quad \text{für } \omega \neq 2 \\ \mathcal{L}\left\{\frac{1}{8}(\sin(2t) - 2t \cos(2t))\right\}(s) &= \frac{2}{(s^2 + 4)^2} \\ \mathcal{L}\{\cos(2t)\}(s) &= \frac{s}{s^2 + 4} \\ \mathcal{L}\left\{\frac{1}{2} \sin(2t)\right\}(s) &= \frac{1}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

Es folgt also

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + \frac{c_2}{2} \sin(2t) + \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\omega \sin(2t) - 2 \sin(\omega t)}{\omega^2 - 4} & : \omega \neq 2 \\ \frac{1}{8}(\sin(2t) - 2t \cos(2t)) & : \omega = 2 \end{cases}.$$

2. Ein Beispiel höherer Ordnung ist

$$-y^{(4)} + y = t, \quad y(0) = c_1, \quad y'(0) = c_2, \quad y''(0) = c_3, \quad y^{(3)}(0) = c_4.$$

(a) Transformation von beiden Seiten gibt

$$-(s^4 \mathcal{L}\{y\}(s) - s^3 c_1 - s^2 c_2 - s c_3 - c_4) + \mathcal{L}\{y\}(s) = \mathcal{L}\{t\}(s).$$

Die rechte Seite ist

$$\mathcal{L}\{t\}(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[-\frac{e^{-st}(st+1)}{s^2} \right]_{t=0}^{\infty} = \frac{1}{s^2}.$$

(b) Auflösen nach $Y = \mathcal{L}\{y\}$:

$$Y(s) = \frac{1}{-s^4+1} \left(\frac{1}{s^2} - s^3 c_1 - s^2 c_2 - s c_3 - c_4 \right).$$

(c) Für die Rücktransformation beschränken wir uns auf den Fall $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. In diesem Fall findet man

$$\mathcal{L} \left\{ t + \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^t}{4} - \frac{\sin(t)}{2} \right\} (s) = \frac{1}{s^2(1-s^4)}.$$

Die Lösung ist also

$$y(t) = t + \frac{e^{-t}}{4} - \frac{e^t}{4} - \frac{\sin(t)}{2}.$$

7 Lineare Systeme erster Ordnung

Jede skalare lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung lässt sich in ein lineares Differentialgleichungssystem 1. Ordnung (und Dimension n) überführen. Wir kommen daher noch einmal auf Systeme

$$\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t), \quad A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, b(t) \in \mathbb{R}^n \quad (7.1)$$

zurück.

Das Superpositionsprinzip aus Satz 2.3 gilt entsprechend: Jede Lösung \vec{y} von (7.1) lässt sich schreiben als

$$\vec{y} = \vec{y}_p + \vec{y}_h,$$

wobei \vec{y}_p eine spezielle Lösung von (7.1) ist und \vec{y}_h die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ ist.

Betrachten wir zuerst das homogene System: Für $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$ lässt sich (analog zum Fall von linearen Differentialgleichungen n -ter Ordnung) wie folgt ein Fundamentalsystem finden:

- a) Wähle $t_0 \in \mathbb{R}$ und n linear unabhängige Anfangswerte \vec{v}^k , $k = 1, \dots, n$.
- b) Löse die n Anfangswertprobleme

$$\frac{d}{dt}\vec{y}^k = A(t)\vec{y}^k, \quad \vec{y}^k(t_0) = \vec{v}^k.$$

- c) Die Matrix

$$Y(t) := (\vec{y}^1(t) \quad \dots \quad \vec{y}^n(t)) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bildet dann ein Fundamentalsystem und wird auch *Fundamentalmatrix* genannt.

Nach Konstruktion ist $Y(t)$ Lösung des *Matrix-Anfangswertproblems*

$$Y' = A(t)Y, \quad Y(t_0) = (\vec{v}^1 \quad \dots \quad \vec{v}^n)$$

Satz 7.1. Es sei $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix zum homogenen System $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$. Dann gilt:

- a) Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$\vec{y}_h(t) = Y(t)\vec{c} = \sum_{k=1}^n c_k \vec{y}^k(t), \quad \vec{c} \in \mathbb{R}^n.$$

- b) $Y(t)$ ist für alle $t \in \mathbb{R}$ invertierbar.

Die Determinante $W(t) := \det(Y(t))$ wird wieder *Wronski-Determinante* genannt.

Um inhomogene Systeme zu lösen, kann man wieder die Variation der Konstanten aus Abschnitt 2 benutzen: Ist $Y(t)$ eine Fundamentalmatrix, so macht man zur Lösung von $\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ den Ansatz

$$\vec{y}_p(t) = Y(t)\vec{c}(t).$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\vec{y}'_p(t) &= Y'(t)\vec{c}(t) + Y(t)\vec{c}'(t) \\ &= A(t)Y(t)\vec{c}(t) + Y(t)\vec{c}'(t) \\ &= A(t)\vec{y}_p(t) + Y(t)\vec{c}'(t).\end{aligned}$$

Es muss also gelten

$$Y(t)\vec{c}'(t) = \vec{b}(t).$$

Die gilt, wenn $\vec{c}'(t) = Y(t)^{-1}\vec{b}(t)$, also, wenn

$$\vec{c}(t) = \vec{c}_0 + \int_{t_0}^t Y(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)d\tau.$$

Wir haben also gezeigt:

Satz 7.2 (Variation der Konstanten für Systeme). *Ist Y eine Fundamentalmatrix für $\vec{y}' = A(t)\vec{y}$, so ist die allgemeine Lösung von $\vec{y}' = A(t)\vec{y} + \vec{b}(t)$ gegeben durch*

$$\vec{y}(t) = Y(t) \left[\vec{c}_0 + \int_{t_0}^t Y(\tau)^{-1}\vec{b}(\tau)d\tau \right], \quad \vec{c}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Mit $\vec{c}_0 = Y(t_0)^{-1}\vec{y}_0$ erfüllt \vec{y} die Anfangsbedingung $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$.

Für konstante Koeffizienten, also für den Fall, dass A nicht von t abhängt lassen sich auf mehrere Arten Lösungen von $\vec{y}' = A\vec{y}$ explizit bestimmen.

Beispiel 7.3 (Lösung bei bekannten Eigenwerten/Eigenvektoren). Ist λ ein Eigenwert von A und \vec{v} ein zugehöriger Eigenvektor, so ist $\vec{y}(t) = e^{\lambda t}\vec{v}$ eine Lösung, denn es gilt

$$\vec{y}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\vec{v} = e^{\lambda t}\lambda\vec{v} = e^{\lambda t}A\vec{v} = A(e^{\lambda t}\vec{v}) = A\vec{y}(t).$$

Haben wir also eine Basis $\vec{v}^1, \dots, \vec{v}^n$ aus Eigenvektoren von A , so haben wir auch ein Fundamentalsystem von $\vec{y}' = A\vec{y}$, nämlich $\vec{y}^k(t) = e^{\lambda_k t}\vec{v}_k, k = 1, \dots, n$.

Hier ein Beispiel: Wir betrachten die lineare Differentialgleichung n -ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0.$$

Der Reduktionstrick aus Abschnitt 4 liefert das äquivalente n -dimensionale System erster Ordnung

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \\ -a_{n-1}y^n - \dots - a_1y_2 - a_0y_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A auf der rechten Seite hat das charakteristische Polynom $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ und heißt auch *Begleitmatrix* dieses Polynoms. Die Eigenwerte sind also die Nullstellen des Polynoms, und über die Bestimmung von Eigenvektoren lässt sich ein Fundamentalsystem angeben.

Beispiel 7.4 (Lösung mit der Laplace-Transformation). Wir betrachten die (komponentenweise) Laplace-Transformation der Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$. Da die Laplace-Transformation linear ist, gilt

$$\mathcal{L}\{\vec{y}'\}(s) = \mathcal{L}\{A\vec{y}\}(s) = A\mathcal{L}\{\vec{y}\}(s).$$

Nach den Rechenregeln der Laplace-Transformation (Satz 6.4 (iii)) gilt $\mathcal{L}\{\vec{y}'\}(s) = s\mathcal{L}\{\vec{y}\}(s) - \vec{y}(0)$ und daher gilt

$$s\mathcal{L}\{\vec{y}\}(s) - \vec{y}(0) = A\mathcal{L}\{\vec{y}\}(s).$$

Dies schreibt sich um zu

$$(sI_n - A)\mathcal{L}\{\vec{y}\}(s) = \vec{y}_0. \quad (*)$$

Um die Laplace-Transformierte der Lösung zu bestimmen müssen wir also „nur“ $sI_n - A$ invertieren. Danach bekommen wir die Lösung durch Rücktransformation.

Hier ein Beispiel dazu: Wir betrachten

$$\vec{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{y}, \quad \vec{y}(0) = \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix}.$$

Die Gleichung (*) ist dann

$$\begin{pmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix} \mathcal{L}\{\vec{y}\}(s) = \vec{y}^0.$$

Es gilt $\det(sI_3 - A) = (s-1)^3$ und daher ist die Matrix für $s \neq 1$ invertierbar. Die Inverse ist

$$\begin{pmatrix} s-1 & 0 & -1 \\ 0 & s-1 & -1 \\ 0 & 0 & s-1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s-1)^3} \begin{pmatrix} (s-1)^2 & 0 & s-1 \\ 0 & (s-1)^2 & s-1 \\ 0 & 0 & (s-1)^2 \end{pmatrix}$$

und es folgt

$$\mathcal{L}\{\vec{y}\}(s) = \begin{pmatrix} \frac{y_1^0}{s-1} + \frac{y_3^0}{(s-1)^2} \\ \frac{y_2^0}{s-1} + \frac{y_3^0}{(s-1)^2} \\ \frac{y_3^0}{s-1} \end{pmatrix}.$$

Für die Rücktransformation schauen wir in Tabellen und finden

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) &= e^t \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}(t) &= te^t \end{aligned}$$

und wir bekommen die Lösung

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1^0 e^t + y_3^0 t e^t \\ y_2^0 e^t + y_3^0 t e^t \\ y_3^0 e^t \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} y_1^0 + y_3^0 t \\ y_2^0 + y_3^0 t \\ y_3^0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 7.5 (Lösung mit der Matrix-Exponentialfunktion). Eine weitere Methode zur Bestimmung von Lösungen von $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist die Matrix-Exponentialfunktion: Für eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Es lässt sich zeigen, dass diese Reihe tatsächlich für jede Matrix konvergiert. Wir betrachten die Matrix-wertige Funktion $\Phi(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$ für $t \in \mathbb{R}$. Für diese gilt

$$\Phi'(t) = A \exp(tA)$$

und daher löst Φ die Matrix-Differentialgleichung $Y' = AY$. Das bedeutet aber, dass $\exp(tA)$ ein Fundamentalsystem für die Gleichung $\vec{y}' = A\vec{y}$ ist.

In machen Fällen lassen sich Matrix-Exponentialfunktionen explizit berechnen, nämlich dann, wenn man alle Potenzen von A explizit bilden kann. Wir schauen und das bei der uns schon

bekannten Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ an, denn hier ist

$$A^0 = I_3, \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dots \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir bekommen also als Fundamentalsystem die Matrix-Funktion

$$Y(t) = \exp(tA) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt^k}{k!} \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & te^t \\ 0 & e^t & te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Lassen sich die Potenzen von A nicht explizit bestimmen, so kann man die Matrix-Exponentialfunktion mit Hilfe der Jordanschen Normalform ausrechnen. Erinnerung, dass sich jede reelle Matrix A in eine Jordansche Normalform hat, sich also schreiben lässt als $A = SJS^{-1}$ mit einer invertierbaren Matrix S und einem J der Form

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_r \end{bmatrix}$$

mit *Jordan-Blöcke* der Form

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}.$$

Wir sind an $\exp(tA)$ interessiert. Es gilt dann für $k = 0, 1, 2, \dots$, dass $(tA)^k = (tSJS^{-1}) \cdots (tSJS^{-1}) = S(tJ)^k S^{-1}$ und

$$(tJ)^k = \begin{bmatrix} (tJ_1)^k & & \\ & \ddots & \\ & & (tJ_r)^k \end{bmatrix}$$

und daher ist

$$\exp(tA) = S \exp(tJ) S^{-1}$$

mit

$$\exp(tJ) = \begin{bmatrix} \exp(tJ_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(tJ_r) \end{bmatrix}$$

Wir müssen also „nur“ die Matrix-Exponentialfunktion eines Jordan-Blockes ausrechnen. Dafür bekommt man

$$\exp(tJ_j) = \exp(\lambda_j t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

8 Randwertaufgaben

Neben Anfangswertaufgaben, gibt es noch einen anderen Typ Differentialgleichung: *Randwertaufgaben*. Hier werden nicht nur Werte der Lösung und ihren Ableitungen zu einem Zeitpunkt t_0 , sondern zu verschiedenen Zeitpunkten vorgegeben.

Hier eine kleine Klassifikation:

a) *Dirichletsche Randwertaufgabe*:

$$\begin{aligned} f(t, y, y', y'') &= 0 \\ y(t_a) &= d_1 \\ y(t_b) &= d_2. \end{aligned}$$

b) *Sturmsche Randwertaufgabe*:

$$\begin{aligned} y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y &= b(t) \\ \alpha y(t_a) + \beta y'(t_a) &= d_1 \\ \gamma y(t_b) + \delta y'(t_b) &= d_2. \end{aligned}$$

c) *Lineare Randwertaufgabe*:

$$\begin{aligned} \vec{y}' &= A(t)\vec{y} + \vec{b}(t) & A(t), B_a, B_b &\in \mathbb{R}^{n \times n} \\ B_a \vec{y}(t_a) + B_b \vec{y}(t_b) &= \vec{d}, & \vec{b}(t), \vec{d} &\in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

d) *Allgemeine Zweipunkt-Randwertaufgabe*:

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \\ \vec{r}(\vec{y}(t_a), \vec{y}(t_b)) &= \vec{0}, \end{aligned}$$

mit $\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{r}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

e) *Allgemeine Mehrpunkt-Randwertaufgabe*:

$$\begin{aligned} \vec{y}'(t) &= \vec{f}(t, \vec{y}(t)) \\ \vec{r}(\vec{y}(t_1), \dots, \vec{y}(t_m)) &= \vec{0} \end{aligned}$$

mit $\vec{y}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\vec{r}: \mathbb{R}^{n \times m} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Anders als bei Anfangswertaufgaben ist die Existenz- und Eindeutigkeit bei Randwertaufgaben im Allgemeinen nicht garantiert.

Wir behandeln hier exemplarisch den Fall einer eindimensionalen linearen Randwertaufgabe zweiter Ordnung, also ein Problem der Form

$$\begin{aligned} L[y](t) &:= y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\ R_1[y] &:= \alpha_1 y(t_a) + \beta_1 y'(t_a) + \gamma_1 y(t_b) + \delta_1 y'(t_b) = d_1 \\ R_2[y] &:= \alpha_2 y(t_a) + \beta_2 y'(t_a) + \gamma_2 y(t_b) + \delta_2 y'(t_b) = d_2. \end{aligned}$$

Ein Problem ist, dass Lösungen, φ , die in zu einem bestimmten Zeitpunkt t_a existieren, im Punkt t_b nicht mehr existieren müssen.

Wir nehmen an, dass die zugehörige *homogene* Randwertaufgabe

$$L[y](t) = 0, R_1[y] = R_2[y] = 0$$

nur die Nulllösung hat.

Ein Lösungsverfahren sieht wie folgt aus:

- (1) *Reduktion auf homogene Randbedingungen:* Es sei y_0 eine C^2 -Funktion, welche die Randbedingungen $R_1[y_0] = d_1$ und $R_2[y_0] = d_2$ erfüllt. Denn setzen wir $y(t) := y_0(t) + z(t)$ und sehen

$$\begin{aligned} L[y](t) &= L[y_0](t) + L[z](t) = b(t) \\ \iff L[z](t) &= b(t) - L[y_0](t) =: \tilde{b}(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} R_k[y] &= R_k[y_0] + R_k[z] = d_k \\ \iff R_k[z] &= 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

Es reicht also, die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} L[z](t) &= \tilde{b}(t) \\ R_k[z] &= 0, \quad k = 1, 2 \end{aligned}$$

zu lösen.

- (2) *Konstruktion einer Greenschen Funktion:* Wir betrachten jetzt die homogene Randwertaufgabe (d.h. $d_1 = d_2 = 0$) und suchen eine Darstellung der Lösung als

$$y(t) = \int_{t_a}^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau. \quad (*)$$

Die gesuchte Funktion $G(t, \tau)$ (mit $t_a \leq t, \tau \leq t_b$) heißt in diesem Zusammenhang *Greensche Funktion* der Randwertaufgabe. Wir nehmen weiterhin erst einmal an, dass G außerhalb der Menge $\{(t, \tau) \in [t_a, t_b] \mid t = \tau\}$ differenzierbar ist, auf dieser Menge aber Sprungunstetigkeiten haben darf. Wir bilden nun die Ableitungen unseres Ansatzes (*):

$$\begin{aligned} y'(t) &= \frac{d}{dt} \left\{ \int_{t_a}^t G(t, \tau) b(\tau) d\tau + \int_t^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau \right\} \\ &= \lim_{\tau \nearrow t} G(t, \tau) b(\tau) + \int_{t_a}^t \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) b(\tau) d\tau - \lim_{\tau \searrow t} G(t, \tau) b(\tau) + \int_t^{t_b} \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) b(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) b(\tau) d\tau + [G(t, t^-) - G(t, t^+)] b(t), \end{aligned}$$

wobei $G(t, t^-) = \lim_{\tau \nearrow t} G(t, \tau)$ und $G(t, t^+) = \lim_{\tau \searrow t} G(t, \tau)$.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } \frac{d}{dt} \left\{ \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} f(t, \tau) d\tau \right\} &= \\ \psi'(t) f(t, \psi(t)) - \varphi'(t) f(t, \varphi(t)) + & \\ \int_{\varphi(t)}^{\psi(t)} \frac{\partial}{\partial t} f(t, \tau) d\tau. & \end{aligned}$$

Haben wir zusätzlich auch Stetigkeit von G in $t = \tau$ (d.h. $G(t, t^-) - G(t, t^+) = 0$) und leiten noch einmal ab (beachte, dass der Sprungterm hier wieder auftaucht, da wir nur die Stetigkeit von G , aber nicht die Stetigkeit der Ableitungen von G in $t = \tau$ angenommen haben):

$$y''(t) = \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, \tau) b(\tau) d\tau + \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, t^-) - \frac{\partial}{\partial t} G(t, t^+) \right] b(t).$$

Unsere Ergebnisse setzen wir in die Differentialgleichung $y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0$ ein und bekommen

$$\begin{aligned} L[y](t) &= \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, \tau) b(\tau) d\tau + \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, t^-) - \frac{\partial}{\partial t} G(t, t^+) \right] b(t) \\ &\quad + a_1(t) \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) b(\tau) d\tau + a_0(t) \int_{t_a}^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t, \tau) + a_1(t) \frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) + a_0(t) G(t, \tau) \right\} b(\tau) d\tau \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, t^-) - \frac{\partial}{\partial t} G(t, t^+) \right] b(t). \end{aligned}$$

Der Term in der geschweiften Klammer ist genau der Differentialoperator L angewendet auf die Funktion $t \mapsto G(t, \tau)$. Wir schreiben ihn als $L[G(\cdot, \tau)](t)$ und bekommen daher

$$L[y](t) = \int_{t_a}^{t_b} L[G(\cdot, \tau)](t) b(\tau) d\tau + \left[\frac{\partial}{\partial t} G(t, t^-) - \frac{\partial}{\partial t} G(t, t^+) \right] b(t).$$

Analog bekommt man für die Randbedingungen

$$R_k[y] = \int_{t_a}^{t_b} R_k[G(\cdot, \tau)](t) b(\tau) d\tau, \quad k = 1, 2.$$

Wir haben damit gezeigt:

Satz 8.1. Die Funktion $G : [t_a, t_b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ habe die Eigenschaften

- (a) G ist stetig auf $[t_a, t_b]^2$ und C^2 außerhalb der Diagonalen (t, t) ,
- (b) $G(\cdot, \tau)$ erfüllt für jedes τ die homogene Differentialgleichung $L[G(\cdot, \tau)] = 0$ jeweils für $t \in [t_a, t]$ und $t \in [t, t_b]$ sowie die Randbedingungen $R_k[G(\cdot, \tau)](t) = 0$, $k = 1, 2$
- (c) $\frac{\partial}{\partial t} G(t, t^-) - \frac{\partial}{\partial t} G(t, t^+) = 1$.

Dann ist G eine Greensche Funktion für die Randwertaufgabe und die Lösung dieser Randwertaufgabe lautet

$$y(t) = \int_{t_a}^{t_b} G(t, \tau) b(\tau) d\tau.$$

Wir zeigen noch wie man eine Greensche Funktion bestimmen kann.

1. Man bestimme ein Fundamentalsystem y_1, y_2 der homogenen Differentialgleichung $L[y] = 0$ und mache den Ansatz

$$G(t, \tau) := \begin{cases} \sum_{i=1}^2 (\alpha_i(\tau) + \beta_i(\tau)) y_i(t) & : \tau \leq t \\ \sum_{i=1}^2 (\alpha_i(\tau) - \beta_i(\tau)) y_i(t) & : t \leq \tau \end{cases}$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$.

2. Die geforderte Stetigkeit $G(t, t^-) = G(t, t^+)$ gibt die Gleichung

$$(\alpha_1(t) + \beta_1(t)) y_1(t) + (\alpha_2(t) + \beta_2(t)) y_2(t) = (\alpha_1(t) - \beta_1(t)) y_1(t) + (\alpha_2(t) - \beta_2(t)) y_2(t)$$

also

$$\beta_1(t) y_1(t) + \beta_2(t) y_2(t) = 0.$$

Die Sprungbedingung führt analog auf

$$\beta_1(t) y_1'(t) + \beta_2(t) y_2'(t) = \frac{1}{2}.$$

Beide Gleichungen zusammen geben ein lineares Gleichungssystem für die Funktionen β_1 und β_2 (dies System ist für alle t lösbar, da die Koeffizienten aus der Fundamentalmatrix kommen, welche immer regulär ist).

3. Setze den Ansatz aus Schritt 1 in die Randbedingungen ein. Dabei entsteht ein lösbares Gleichungssystem für die Funktionen α_1 und α_2 .

Beispiel 8.2. Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} y'' + y &= b(t) \\ y(0) - y(\pi) &= 0 \\ y'(0) - y'(\pi) &= 0. \end{aligned}$$

Ein Fundamentalsystem ist $y_1(t) = \cos(t), y_2(t) = \sin(t)$.

Der Ansatz aus Schritt 1 ist also

$$G(t, \tau) = \begin{cases} (\alpha_1(\tau) + \beta_1(\tau)) \cos(t) + (\alpha_2(\tau) + \beta_2(\tau)) \sin(t) & : \tau \leq t \\ (\alpha_1(\tau) - \beta_1(\tau)) \cos(t) + (\alpha_2(\tau) - \beta_2(\tau)) \sin(t) & : t \leq \tau. \end{cases}$$

Die Gleichungen aus Schritt 2 sind:

$$\begin{aligned}\beta_1(t) \cos(t) + \beta_2(t) \sin(t) &= 0 \\ -\beta_1(t) \sin(t) + \beta_2(t) \cos(t) &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Als Lösungen bekommt man hier einfach $\beta_1(t) = -\frac{1}{2} \sin(t)$ und $\beta_2(t) = \frac{1}{2} \cos(t)$.

Wir werten jetzt noch die Randbedingungen aus (und müssen dabei darauf achten, in welchem Fall in der Definition von G wir uns befinden):

$$\begin{aligned}G(0, \tau) - G(\pi, \tau) &= (\alpha_1(\tau) - \beta_1(\tau)) + (\alpha_1(\tau) + \beta_1(\tau)) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} G(0, \tau) - \frac{\partial}{\partial t} G(\pi, \tau) &= (\alpha_2(\tau) - \beta_2(\tau)) + (\alpha_2(\tau) + \beta_2(\tau)) = 0\end{aligned}$$

und es folgt $\alpha_1(\tau) = \alpha_2(\tau) = 0$.

Wir haben (mit Hilfe des Additionstheorems für den Sinus) als Greensche Funktion bekommen

$$\begin{aligned}G(t, \tau) &= \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{1}{2} \sin(\tau) \cos(t) + \frac{1}{2} \cos(\tau) \sin(t) & : \tau \leq t \\ \frac{1}{2} \sin(\tau) \cos(t) - \frac{1}{2} \cos(\tau) \sin(t) & : t \leq \tau \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : \tau \leq t \\ -\frac{1}{2} \sin(t - \tau) & : t \leq \tau. \end{array} \right.\end{aligned}$$

Damit haben wir als Lösung der Randwertaufgabe

$$y(t) = \frac{1}{2} \int_0^t \sin(t - \tau) b(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_t^\pi \sin(t - \tau) b(\tau) d\tau.$$

9 Holomorphe Funktionen einer komplexen Variablen

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Theorie von Funktionen, die Teilmengen von \mathbb{C} in \mathbb{C} abbilden, also Funktionen der Form

$$f : D \rightarrow \mathbb{C}, \quad D \subset \mathbb{C} \text{ offen.}$$

Elementare Beispiele dafür sind Polynome wie $f(z) = z^n + 2$ oder $f(z) = z^3 - jz^2 + (4 + j)z - j$ (jeweils auf $D = \mathbb{C}$) oder die Inversion $f(z) = 1/z$ (auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$).

Mit Hilfe von Potenzreihen können wir weitere elementare Funktionen definieren:

$$e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$$

$$\sin(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

$$\cos(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}.$$

Wie im Reellen gelten

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{jz} + e^{-jz}), \quad \sin(z) = \frac{1}{2j} (e^{jz} - e^{-jz}) \quad (*)$$

und

$$\begin{aligned} \cos(z)^2 + \sin(z)^2 &= 1, \\ \cos(-z) &= \cos(z), \\ \sin(-z) &= -\sin(z). \end{aligned}$$

Üblicherweise wird für die Werte einer solchen Funktion die Schreibweise $f(z) = u + jv$ benutzt. Man kann eine komplexe Funktion der Variable $z = x + jy$ natürlich auch als eine Funktion von den beiden reellen Variablen x, y auffassen, d.h. man hat immer die Darstellung

$$f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

mit reellwertigen Funktionen u und v die jeweils von zwei reellen Variablen abhängen.

Stetigkeit von f bedeutet dann nichts anderes als das u und v stetig in den beiden reellen Variablen sind.

Beispiel 9.1. Die komplexe Exponentialfunktion ist $e^z = e^{x+jy} = e^x e^{jy} = e^x (\cos(y) + j \sin(y))$ und da die Abbildungen $(x, y) \mapsto e^x \cos(y)$ und $(x, y) \mapsto e^x \sin(y)$ stetig sind, ist $z \mapsto e^z$ ebenfalls stetig.

Richtig interessant wird es bei Ableitungen von komplexen Funktionen. Wir übernehmen die Definition wortgleich aus dem reellen Fall:

Definition 9.2. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. D ist offen und zusammenhängend) und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

(a) f heißt *komplex differenzierbar* in $z_0 \in D$, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert. In diesem Fall schreiben wir $f'(z_0)$ oder $\frac{d}{dz}f(z_0)$ für den Grenzwert.

(b) f heißt *komplex differenzierbar in D* , falls f in jedem $z \in D$ komplex differenzierbar ist.

(c) f heißt *stetig differenzierbar in D* , falls f in D komplex differenzierbar und f' in D stetig ist.

Wir in \mathbb{R} gilt: Ist f komplex differenzierbar, so ist f stetig.

Der Begriff der komplexen Differenzierbarkeit birgt einige Überraschungen. Hier eine nicht differenzierbare Funktion:

Beispiel 9.3. Wir betrachte $f(z) = \bar{z}$, also mit $z = x + jy$ ist $f(z) = x - jy = u(x, y) + jv(x, y)$ mit $u(x, y) = x$ und $v(x, y) = -y$. Die Funktionen u und v sind überall reell nach x und y differenzierbar, aber trotzdem ist f nicht komplex differenzierbar!

Wir sehen dies ein, in dem wir auf zwei Arten versuchen, den Grenzwert des Differenzenquotienten zu berechnen:

- Wir betrachten $z_0 = x_0 + jy_0$ und $z = x_0 + h + jy_0$ mit $h \in \mathbb{R}$. Wegen $z - z_0 = h$ ist

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \frac{h}{h} = 1$$

und daher gilt in diesem Fall auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1.$$

- Betrachten wir hingegen $z_0 = x_0 + jy_0$ und $z = x_0 + j(y_0 + h)$ mit $h \in \mathbb{R}$. Wegen $z - z_0 = jh$ ist

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = \frac{-jh}{jh} = -1$$

und daher gilt in diesem Fall auch

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = -1.$$

Wir bekommen also unterschiedliche Ergebnisse und daher existiert der Grenzwert überhaupt nicht!

Definition 9.4. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$.

(a) f heißt *holomorph in D* , falls f in D stetig komplex differenzierbar ist.

Wir benutzen hier \bar{z} für die komplex konjugierte Zahl.

(b) f heißt *holomorph* in z_0 , falls f einer Umgebung von z_0 stetig komplex differenzierbar ist.

Da die Definition für komplexe Differenzierbarkeit wortwörtlich die gleiche ist, wie im Reellen, sind auch die Rechenregeln exakt die gleichen: Es gilt

$$\begin{aligned}(f + g)' &= f' + g' \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g' \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \\ (f \circ g)'(z) &= f'(g(z)) \cdot g'(z).\end{aligned}$$

Hier eine erste erstaunliche Konsequenz von komplexer Differenzierbarkeit:

Satz 9.5 (Cauchy-Riemann Differentialgleichungen). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ und $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ komplex differenzierbar in $z_0 = x_0 + jy_0$. Dann sind u und v reell differenzierbar in (x_0, y_0) und die partiellen Ableitungen u_x, u_y, v_x und v_y erfüllen die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen*

$$\begin{aligned}u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Wir verwenden hier die Kurzschreibweise u_x für die partielle Ableitung von u nach x (usw.).

Die Ableitung von f ist in diesem Fall

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + jv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - ju_y(x_0, y_0).$$

Beweis.

Wir berechnen den Grenzwert des Differenzenquotienten auf zwei Arten (wie wir es bei Betrachtung der Nicht-Differenzierbarkeit der Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ getan haben:

(i) Wir betrachten $z = x_0 + h + jy_0$:

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x_0 + h, y_0) + jv(x_0 + h, y_0) - (u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0))}{h} \\ &= \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + j \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} u_x(x_0, y_0) + jv_x(x_0, y_0).\end{aligned}$$

(ii) Nehmen wir $z = x_0 + j(y_0 + h)$ gilt:

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \frac{u(x_0, y_0 + h) + jv(x_0, y_0 + h) - (u(x_0, y_0) + jv(x_0, y_0))}{jh} \\ &= \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{jh} + j \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{jh} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} -ju_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0).\end{aligned}$$

Hier haben wir aber, dass der Grenzwert $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert und daher unabhängig davon ist, wie z gegen z_0 geht, d.h. die Grenzwerte in (i) und (ii) sind gleich, also $u_x(x_0, y_0) +$

$ju_x(x_0, y_0) = -ju_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$. Die Behauptung folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. Die Formeln für $f'(z_0)$ haben wir ebenfalls schon gezeigt. \square

Beispiel 9.6. Die Funktion $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ ist nicht komplex differenzierbar, was wir an den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen sehen können: Es gilt $f(z) = x^2 + y^2 + j0$, also $u(x, y) = x^2 + y^2$ und $v(x, y) = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= 2x, & u_y(x, y) &= 2y \\ v_x(x, y) &= 0, & v_y(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

Die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen sind also nur in 0 erfüllt und damit ist f für kein $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ komplex differenzierbar.

Ebenso einfach kann man auch die Nicht-Differenzierbarkeit von $z \mapsto \bar{z}$ mit den Cauchy-Riemann Differentialgleichungen zeigen.

Es gilt sogar folgende Umkehrung des obigen Satzes:

Satz 9.7. Sind u und v in einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ stetig partiell (reell) differenzierbar und erfüllen die partiellen Ableitungen von u und v in ganz D die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen, so ist $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ in D holomorph.

Wir haben also, dass die Holomorphie von f in einem Gebiet D durch die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen charakterisiert wird.

Beispiel 9.8. Wir betrachten $f(z) = e^z = e^x(\cos(y) + j \sin(y))$, also $u(x, y) = e^x \cos(y)$ und $v(x, y) = e^x \sin(y)$. Es gilt

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= e^x \cos(y), & u_y(x, y) &= -e^x \sin(y) \\ v_x(x, y) &= e^x \sin(y), & v_y(x, y) &= e^x \cos(y). \end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen überall existieren und stetig sind und die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen überall erfüllt sind, folgt die Holomorphie von f in ganz \mathbb{C} .

Die Ableitung ist

$$f'(z) = u_x(x, y) + jv_x(x, y) = e^x \cos(y) + j(e^x \sin(y)) = e^x(\cos(y) + j \sin(y)) = e^z.$$

Aus den Identitäten (*) bekommen wir

$$\sin'(z) = \cos(z), \quad \cos'(z) = -\sin(z).$$

Satz 9.9 (Lokale Umkehrbarkeit und Ableitung der Umkehrfunktion). Ist f holomorph in z_0 und gilt $f'(z_0) \neq 0$, so bildet f eine Umgebung von z_0 bijektiv auf eine Umgebung von $w_0 := f(z_0)$ ab. Die dort definierte Umkehrfunktion f^{-1} ist holomorph in w_0 und es gilt

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(w_0))}.$$

10 Potenzen, Wurzeln, Logarithmen

Wir betrachten die elementaren komplexen Funktionen genauer:

Quadrat und Quadratwurzel: Wir betrachten $f(z) = z^2$ und schauen uns die Funktion in Polarkoordinaten an. Wir schreiben $z = re^{j\varphi}$. Dann ist

$$w = z^2 = r^2 e^{j2\varphi}.$$

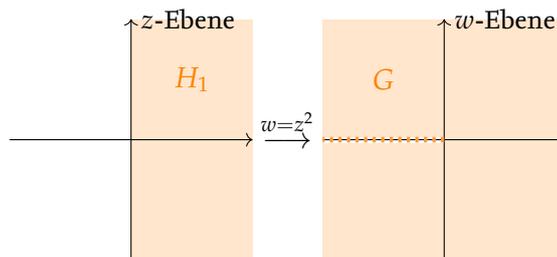
D.h. der Betrag wird quadriert und der Winkel verdoppelt.
Die offene rechte Halbebene

$$H_1 := \left\{ z = re^{j\varphi} \mid -\pi/2 < \varphi < \pi/2, r > 0 \right\}$$

wird durch f auf

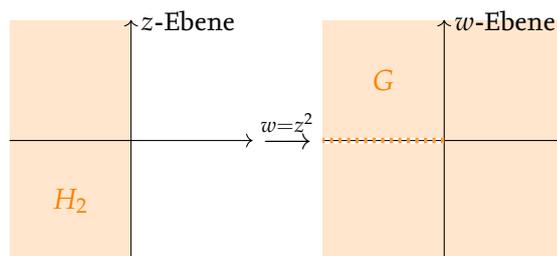
$$G := \mathbb{C} \setminus \{x \mid x < 0\}$$

abgebildet.



Das Gleiche gilt aber auch für die linke Halbebene

$$H_2 := \left\{ z = re^{j\varphi} \mid \pi/2 < \varphi < 3\pi/2, r > 0 \right\}.$$



Es gibt also zu jedem $w \in G$ genau zwei Urbilder z_1 und z_2 , nämlich jeweils eins in H_1 und eins in H_2 . Es gibt also keine globale Umkehrfunktion von $f(z) = z^2$. Durch Einschränkung des Definitionsbereiches können wir Umkehrbarkeit erreichen: Die Funktion

$$f_1 : H_1 \rightarrow G, z \mapsto w = z^2$$

wird von

$$h_1(w) = \sqrt{|w|} e^{j \operatorname{Arg}(w)/2}, \quad \operatorname{Arg}(w) \in]-\pi, \pi]$$

umgekehrt und

$$f_2 : H_2 \rightarrow G, z \mapsto w = z^2$$

wird von

$$h_2(w) = \sqrt{|w|} e^{j(\operatorname{Arg}(w)/2 + \pi)}, \quad \operatorname{Arg}(w) \in]-\pi, \pi]$$

umgekehrt.

Man nennt diese beiden Funktionen die *Zweige* der komplexen Quadratwurzel und die Funktion h_1 den *Hauptzweig der komplexen Quadratwurzel*.

Man kann das Abbildungsverhalten des Quadrats auch durch die Abbildung eines Gitters verstehen: Es gilt

$$u + jv = w = z^2 = (x + jy)^2 = x^2 - y^2 + j(2xy)$$

also

$$u = x^2 - y^2, \quad v = 2xy.$$

Es ist also $v^2 = 4x^2y^2$. Wir betrachten jetzt eine horizontale Gerade (x, y_0) für $y_0 \neq 0$ und bekommen

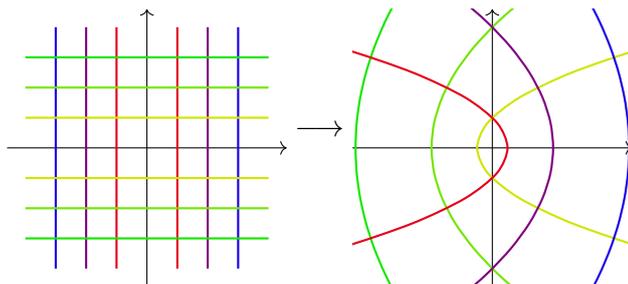
$$u = x^2 - y_0^2, \quad v^2 = 4x^2y_0^2.$$

Es folgt

$$x^2 = u + y_0^2, \quad \text{also } v^2 = 4(u + y_0^2)y_0^2.$$

Lösen wir dies nach u auf, erkennen wir, dass die Gerade $x \mapsto (x, y_0)$ auf den Graphen der Parabel $u = \frac{v^2}{4y_0^2} - y_0^2$ abgebildet wird. Ebenso sieht man, dass die vertikalen Geraden $y \mapsto (x_0, y)$ für $x_0 \neq 0$ auf die Parabeln $u = x_0^2 - \frac{v^2}{4x_0^2}$.

Bleiben noch die Spezialfälle: $y_0 = 0$ wird (nicht injektiv, sondern 2-zu-1) auf die Halbgerade $u = x^2$ und $v = 0$ abgebildet und x_0 landet (ebenfalls 2-zu-1) auf der Halbgeraden $u = -y^2, v = 0$.



Die Funktion Arg nennt man *Argumentfunktion*. Man nennt $\operatorname{Arg}(z)$ auch den *Winkel* von z oder die *Phase*. Allein durch die Forderung $z = |z|e^{j\operatorname{Arg}(z)}$ ist $\operatorname{Arg}(z)$ noch nicht eindeutig bestimmt und wir folgen der üblichen Konvention, dass $\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$ gilt, was $\operatorname{Arg}(z)$ wohldefiniert macht.

Höhere Potenzen und höhere Wurzeln: Zu $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir $w = f(z) = z^n$. Die Funktion ist in ganz \mathbb{C} holomorph mit Ableitung $f'(z) = nz^{n-1}$. Da $f'(z) \neq 0$ für $z \neq 0$, ist f in jedem $z \neq 0$ lokal umkehrbar. In Polarkoordinaten gilt

$$w = f(z) = f(re^{j\varphi}) = r^n e^{jn\varphi}.$$

Hier werden die Winkelbereiche

$$W_k := \left\{ z = e^{j\varphi} \mid \frac{2\pi(k-1)}{n} \leq \varphi < \frac{2\pi k}{n}, r > 0 \right\}, k = 1, \dots, n$$

alle auf G abgebildet und die Funktionen $f_k : W_k \rightarrow G$ $f_k(z) = z^n$ sind alle umkehrbar mit Umkehrfunktionen

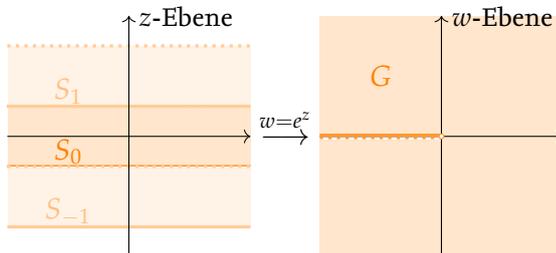
$$h_k(w) = \sqrt[n]{|w|} e^{j\left(\frac{\text{Arg}(w)}{n} + \frac{2\pi(k-1)}{n}\right)}, k = 1, \dots, n.$$

Exponentialfunktion und Logarithmus: Die Funktion $w = f(z) = e^z$ ist auf ganz \mathbb{C} holomorph und periodisch mit der Periode $2\pi j$ (was man an $e^z = e^x(\cos(y) + j \sin(y))$ sieht).

Hier werden die Streifen

$$S_k := \{z = x + jy \mid x \in \mathbb{R}, y \in](2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi]\}, k \in \mathbb{Z}$$

bijektiv auf $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abgebildet.



Um die verschiedenen Umkehrfunktionen für $\exp : S_k \rightarrow \mathbb{C}$ zu bestimmen schreiben wir für

$$e^z = w = |w| e^{j(\text{Arg}(w) + 2\pi k)}, k \in \mathbb{Z}.$$

Wegen $e^z = e^x e^{jy}$ folgt $|w| = e^x$ und $y = \text{Arg } w + 2\pi k$. Wir haben also für jedes $k \in \mathbb{Z}$ eine Umkehrfunktion

$$\log_k(w) = \ln(|w|) + j(\text{Arg}(w) + 2\pi k).$$

Die Funktion

$$\text{Log}(w) = \log_0(w) = \ln(|w|) + j \text{Arg}(w)$$

heißt *Hauptwert des Logarithmus* und ist auf $\mathbb{C} \setminus \{x \mid x \leq 0\}$ definiert.

Allgemeine Potenzen: Für $a \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{x \mid x \leq 0\}$ definiert man

$$z^a := e^{a \operatorname{Log}(z)}$$

(und man nimmt noch die Konventionen $0^a = 0$ für alle $a \neq 0$ und $0^0 = 1$ hinzu).

Man beachte, dass die Rechenregel $z^a z^b = z^{a+b}$ nicht immer gilt - sie ist richtig, wenn alle Logarithmen auf dem gleichen Zweig liegen!

Beispiel 10.1. Man bekommt zum Beispiel für den Hauptwert des Logarithmus

$$\operatorname{Log}(j) = \ln(|j|) + j \operatorname{Arg}(j) = \ln(1) + j \frac{\pi}{2} = j \frac{\pi}{2}.$$

Die anderen Logarithmen sind

$$\log_k(j) = j \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right).$$

Durch die Definition der allgemeinen Potenz über den Hauptzweig des Logarithmus haben wir auch

$$j^j = e^{j \operatorname{Log}(j)} = e^{j \cdot j \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.0279.$$

(Andere Möglichkeiten wären $e^{j \log_k(j)} = e^{j \cdot j (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)} = e^{-\pi/2 - 2\pi k}$ für $k \in \mathbb{Z}$.)

Wir wissen schon, dass Realteil u und Imaginärteil v eine holomorphe Funktion die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllen, als, dass gilt

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Leiten wir die erste Gleichung noch einmal nach x und die zweite noch einmal nach y ab bekommen wir

$$u_{xx} = v_{yx}, \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Da nach dem Satz von Schwarz $v_{xy} = v_{yx}$ gilt, bekommen wir aus der Addition der Gleichungen

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

überall da, wo u definiert ist. Analog bekommt man (erste Gleichung nach y und zweite nach x ableiten) auch

$$v_{xx} + v_{yy} = 0.$$

Wir halten fest:

Satz 10.2. Ist f in D holomorph, so erfüllen der Realteil u und der Imaginärteil v von f die Laplace-Gleichung, d.h. es gilt

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad \Delta v = 0.$$

Man nennt Funktionen mit $\Delta u = 0$ *harmonische Funktionen* und im Fall des obigen Satzes heißt v zu u *konjugiert harmonisch*.

Wir erinnern uns an den Gradienten

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$$

und bekommen für zwei Funktionen u und v , die die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen erfüllen

$$\langle \nabla u, \nabla v \rangle = u_x v_x + u_y v_y = u_x v_x + (-v_x) u_x = 0,$$

das heißt, die Kurvenscharen, welche durch $u(x, y) \equiv c_1$ und $v(x, y) \equiv c_2$ definiert sind schneiden sich immer rechtwinklig.

11 Komplexe Integration

Um ein Integral für Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$ über einen Weg $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ zu definieren, erinnern wir uns an Riemann-Summen: Für eine Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ bekommen wir eine Unterteilung des Weges, nämlich einen Polygonzug durch die Punkte $z_0 = \gamma(t_0) = \gamma(a)$, $z_k = \gamma(t_k)$, $z_n = \gamma(t_n) = \gamma(b)$ und wir betrachten analog zum reellen Fall die Summe

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(z_k)(z_k - z_{k-1}) &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n f(\gamma(t_k)) \frac{(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}))}{t_k - t_{k-1}} (t_k - t_{k-1}). \end{aligned}$$

Dies ist eine Riemannsumme für das Integral

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

und genau so definieren wir das *Wegintegral* für komplexe Funktionen.

Definition 11.1. Es $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig und $\gamma : [a, b] \rightarrow D$ eine stückweise differenzierbare Kurve. Dann ist das *Wegintegral* (oder auch *Kurvenintegral*) von f längs γ definiert als

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Ist γ geschlossen (also $\gamma(a) = \gamma(b)$), so schreibt man oft

$$\oint_{\gamma} f(z) dz$$

um dies gleich in der Notation deutlich zu machen.

Hier ein einfaches Beispiel, was aber zugleich sehr wichtig ist:

Beispiel 11.2 (Fundamentalintegral). Es sei $f(z) = (z - z_0)^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und γ sei die Kreislinie

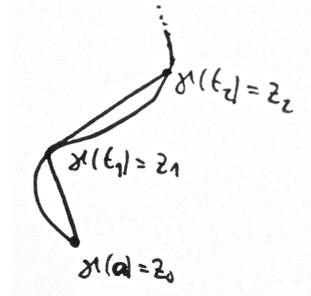
$$K_r(z_0) := \partial B_r(z_0) = \{z \mid |z - z_0| = r\}.$$

Wir parametrisieren die Kreislinie durch

$$\gamma(t) = z_0 + re^{jt} = z_0 + r \cos(t) + jr \sin(t), t \in [0, 2\pi[.$$

Dann ist

$$\gamma'(t) = jre^{jt}$$



und

$$f(\gamma(t)) = (\gamma(t) - z_0)^n = (re^{jt})^n = r^n e^{jnt}.$$

Also ist das Integral

$$\begin{aligned} \oint_{K_r(z_0)} f(z) dz &= \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} r^n e^{jnt} j r e^{jt} dt \\ &= j r^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{j(n+1)t} dt. \end{aligned}$$

Ist $n = -1$, so ist der Integrand $e^0 = 1$ und wir bekommen

$$\oint_{K_r(z_0)} (z - z_0)^{-1} dz = 2\pi j.$$

Ist $n \neq -1$, so hat der Integral die Stammfunktion $\frac{1}{j(n+1)} e^{j(n+1)t}$ und wir bekommen

$$\oint_{K_r(z_0)} (z - z_0) dz = j r^{n+1} \left[\frac{1}{j(n+1)} e^{j(n+1)t} \right]_{t=0}^{2\pi} = 0,$$

da die Exponentialfunktion 2π -periodisch ist.

Wir halten fest:

$$\oint_{K_r(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & : n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi j & : n = -1. \end{cases}$$

Beispiel 11.3. (a) Wir betrachten $f(z) = z$ und $\gamma(t) = e^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Das Integral von f längs γ ist ein Spezialfall des Fundamentalintegrals (mit $z_0 = 0$, $r = 1$ und $n = 1$ und daher gilt

$$\oint_{\partial B_1(0)} z dz = \oint_{K_1(0)} z dz = 0.$$

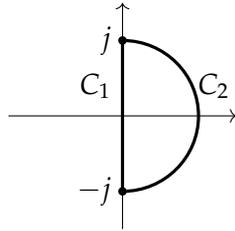
(b) Wir betrachten $f(z) = \bar{z}$ und $\gamma(t) = re^{jt}$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$. Wir berechnen

$$\oint_{\gamma} \bar{z} dz = \int_0^{2\pi} \overline{(re^{jt})} r j e^{jt} dt = j r^2 \int_0^{2\pi} e^{-jt+jt} dt = 2\pi j r^2.$$

(c) Für $f(z) = 1/z$ und $\gamma(t) = e^{jt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ist das Integral von f wieder ein Spezialfall des Fundamentalintegrals ($z_0 = 0$, $r = 1$ und $n = -1$), aber wir können auch unser Wissen aus (b) anwenden:

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \oint_{K_1(0)} \frac{1}{z} dz = \oint_{K_1(0)} \frac{\bar{z}}{|z|^2} dz \stackrel{|z|^2=1}{=} 2\pi j.$$

- (d) Wir betrachten $f(z) = z^2 + 5z$ und verschiedene Wege von $-j$ nach j :



Wir wählen folgende Parametrisierungen:

$$\begin{aligned} C_1 : \quad \gamma(t) &= jt, -1 \leq t \leq 1 & \gamma'(t) &= j \\ C_2 : \quad \gamma(t) &= e^{jt}, -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} & \gamma'(t) &= je^{jt} \end{aligned}$$

Wir bekommen für C_1 :

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(z) dz &= \int_{C_1} (z^2 + 5z) dz = \int_{-1}^1 ((jt)^2 + 5jt) j dt \\ &= \int_{-1}^1 (-jt^2 - 5t) dt = \left[-\frac{j}{3}t^3 - \frac{5}{2}t^2 \right]_{t=-1}^1 \\ &= -\frac{2}{3}j. \end{aligned}$$

Für C_2 bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{C_2} f(z) dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left((e^{jt})^2 + 5e^{jt} \right) je^{jt} dt \\ &= j \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (e^{3jt} + 5e^{2jt}) dt = j \left[\frac{1}{3j} e^{3jt} + \frac{5}{2j} e^{2jt} \right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \left[\frac{1}{3} \underbrace{(e^{3j\pi/2} - e^{-3j\pi/2})}_{=-j} + \frac{5}{2} \underbrace{(e^{2j\pi/2} - e^{-2j\pi/2})}_{=-1} \right] = -\frac{2}{3}j, \end{aligned}$$

also exakt das gleiche Ergebnis.

Das Wegintegral erfüllt folgende Rechenregeln:

Linearität. Es gilt

$$\int_{\gamma} af(z) + bg(z) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz.$$

Wegadditivität: Ist ein Weg γ aus den Teilwegen $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ zusammengesetzt, so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z) dz.$$

Umkehr der Laufrichtung: Zu einem Weg γ sei γ^- der umgekehrt durchlaufene Weg, d.h. für $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ist $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$. Dann gilt

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = - \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Standard-Abschätzung: Es gilt

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot L(\gamma)$$

Dies sieht man durch

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \\ &\leq \max_{a \leq t \leq b} |f(\gamma(t))| \int_a^b |\gamma'(t)| dt, \end{aligned}$$

da der letzte Term gerade die Länge des Weges γ ist.

Man kann das komplexe Wegintegral auch mit reellen Kurvenintegralen ausdrücken: Für $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ und $\gamma(t) = x(t) + jy(t)$, $t \in [a, b]$ ist mit $\vec{x} = (x, y)$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + jv(x(t), y(t))] [x'(t) + jy'(t)] dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &\quad + j \int_a^b [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt \\ &= \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ -v(\vec{x}) \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} + j \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v(\vec{x}) \\ u(\vec{x}) \end{pmatrix} \cdot d\vec{x}. \end{aligned}$$

Physikalisch lassen sich Real- und Imaginärteil des komplexen Wegintegrals wie folgt interpretieren: Der Realteil ist

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} u(\vec{x}) \\ -v(\vec{x}) \end{pmatrix} \cdot d\vec{x}, \quad \text{Zirkulation von } \vec{q} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \text{ längs } \gamma$$

und der Imaginärteil ist

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\gamma} f(z) dz \right) = \int_{\gamma} \begin{pmatrix} v(\vec{x}) \\ u(\vec{x}) \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} \quad \text{Fluss von } \vec{q} = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \text{ von durch } \gamma.$$

Erinnere, dass mit $L(\gamma)$ die Länge der Kurve γ (als Kurve im \mathbb{R}^2) bezeichnet wird.

Das Vektorfeld (v, u) entsteht aus dem Vektorfeld $(u, -v)$ durch Drehung um 90° nach links, daher ist das Integral über $(u, -v)$ der Fluss von $(u, -v)$ von rechts nach links durch γ .

12 Der Cauchy-Integralsatz und Stammfunktionen

Für die folgenden Aussagen kommt es auf die Form des Gebietes an, auf dem eine Funktion holomorph ist. Besonders wichtig ist der Begriff des *einfach zusammenhängenden Gebietes*. Dabei heißt ein Gebiet *zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten im Gebiet einen stetigen Weg von einem zum anderen gibt, der ganz im Gebiet verläuft. Ein Gebiet heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jeder geschlossenen Weg, der ganz innerhalb des Gebiets verläuft sich stetig auf einen Punkt zusammenziehen lässt. Anschaulich bedeutet das, dass ein Weg im Gebiet nicht um Punkte herumlaufen kann, die nicht im Gebiet liegen, also, dass das Gebiet keine Löcher hat.

So ist zum Beispiel die Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ zusammenhängend und auch einfach zusammenhängend. Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist zwar zusammenhängend aber nicht einfach zusammenhängend.

Satz 12.1 (Cauchy-Integralsatz). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f in D holomorph. Dann gilt für jede stückweise differenzierbare und geschlossene Kurve γ in D*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Der Satz folgt zum Beispiel aus dem Satz von Green aus der Analysis Vorlesung, da die Vektorfelder $(v(x, y), u(x, y))$ und $(u(x, y), -v(x, y))$ aufgrund der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen rotationsfrei sind.

Ohne die Voraussetzung, dass das Gebiet einfach zusammenhängend ist, ist die Aussage im Allgemeinen falsch: Die Funktion $f(z) = 1/z$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph, so gilt für das Integral $\oint_{K_1(0)} \frac{1}{z} dz = 2\pi j \neq 0!$

Korollar 12.2 (Wegunabhängigkeit). *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet, $z_1, z_2 \in D$ und f in D holomorph. Dann gilt für alle stückweise differenzierbaren Kurven γ_1, γ_2 in D welche jeweils in z_1 anfangen und in z_2 enden*

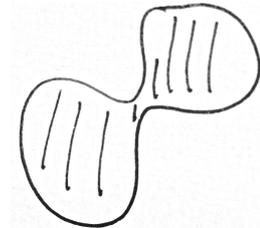
$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Wir definieren γ als den Weg, der entsteht, wenn wir erst γ_1 und dann γ_2^- durchlaufen. Dies ergibt einen geschlossenen Weg und nach dem Cauchy-Integralsatz gilt

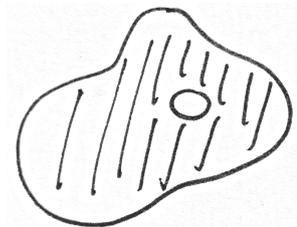
$$0 = \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2^-} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

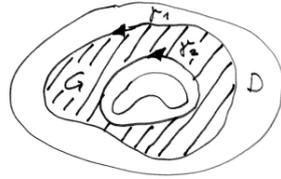
Wir betrachten die folgende Situation:

Einfach zusammenhängende Menge:

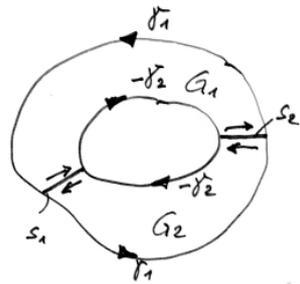


Nicht einfach zusammenhängende Menge:





Hier haben wir ein Gebiet D mit Loch und zwei Wege, die beide um das Loch herum laufen. Wir wollen mit Hilfe des Cauchy-Integralsatz zeigen, dass die beiden Integral über γ_1 und γ_2 den gleichen Wert haben. Dazu „schneiden wir das Gebiet G zwischen den Wegen auf“ um zwei einfach zusammenhängende Gebiete G_1 und G_2 zu erhalten:



Da f holomorph auf beiden Gebieten G_1 und G_2 ist, und diese nach Konstruktion einfach zusammenhängend sind, gilt

$$\oint_{\partial G_1} f(z) dz = \oint_{\partial G_2} f(z) dz = 0.$$

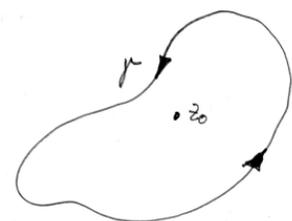
Die beiden Wegestücke S_1 und S_2 entlang der Schnitte werden jeweils zweimal in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen und heben sich daher weg. Wir bekommen (beachte die Laufrichtung von γ_2 !)

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial G_1} f(z) dz - \oint_{\partial G_2} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\bar{\gamma}_2} f(z) dz \\ &= \oint_{\gamma_1} f(z) dz - \oint_{\gamma_2} f(z) dz \end{aligned}$$

und schließen, dass beide Integrale über γ_1 und γ_2 gleich sind.

Wir halten fest: Ist eine Funktion auf einer Umgebung eines Gebietes, welches von zwei geschlossenen Kurven eingefasst wird holomorph, so sind die Wegintegrale der Funktion über die beiden Wege gleich.

Beispiel 12.3. Es sei γ irgendeine geschlossene, stückweise differenzierbare Kurve, die sich nicht selbst schneidet und welche den Punkt z_0 positiv orientiert umläuft. Wir fragen uns: Was ist das



Integral

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^2 dz?$$

Mit Hilfe der vorigen Ergebnisse können wir diese Frage beantworten, ohne viel über γ zu wissen! Das einzige, was wir benötigen ist, dass γ genau einmal links herum um z_0 herum läuft. Wir betrachten eine Kreislinie $K_r(z_0)$ um z_0 mit Radius $r > 0$, so dass γ im Inneren der Kreislinie liegt.

Wir wissen nämlich

$$\oint_{\gamma} (z - z_0)^n dz = \oint_{K_r(z_0)} (z - z_0)^n dz$$

und haben schon berechnet

$$\oint_{K_r(z_0)} (z - z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & : n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi j & : n = -1. \end{cases}$$

Analog könnten wir Integrale über Wege behandeln, die mehrere „Löcher“ im Definitionsgebiet umlaufen.

Satz 12.4. Es seien $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschlossene, stückweise stetig differenzierbare und positiv orientierte Kurven, die sich nicht selbst schneiden und die ganz in einem Gebiet D verlaufen. Weiterhin sollen alle Kurven γ_k ganz im Inneren einer weiteren Kurve γ liegen und jede Kurve γ_k im Äußeren jeder anderen Kurve γ_i ($i \neq k$). Weiterhin enthalte das Gebiet zwischen γ und den Kurven γ_k keine weiteren Löcher aus D . Dann gilt

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz.$$

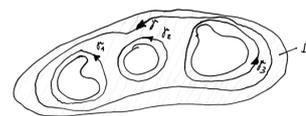
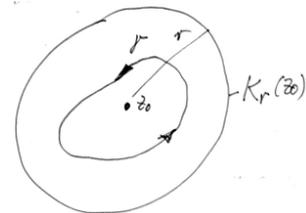
Wie in der reellen Analysis nennt man F eine *Stammfunktion* von f , wenn $F' = f$ gilt. Im komplexen Fall haben nicht alle stetigen Funktionen Stammfunktionen - es kommt auf das Definitionsgebiet an!

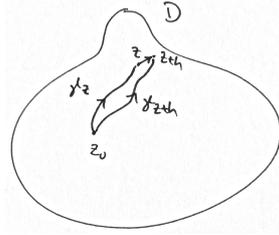
Satz 12.5. Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet, f in D holomorph und $z_0 \in D$. Dann ist durch

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

eine Stammfunktion von f in D definiert (dabei ist das Integral über irgendeine in D verlaufende Kurve, welche in z_0 beginnt und in z endet). Alle weiteren Stammfunktionen sind von der Form $F(z) + c$ für ein $c \in \mathbb{C}$.

Die Beweisidee dieses Satzes ist einfach: Wir betrachten $f(z+h)$ und $f(z)$ und die folgende Skizze:





Dann gilt $F(z+h) = \int_{\gamma_{z+h}} f(\zeta) d\zeta$ und $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$, aber nach dem Cauchy-Integralsatz gilt

$$F(z+h) - F(z) = \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta$$

wobei $[z, z+h]$ den Weg entlang der geraden Verbindungsstrecke zwischen z und $z+h$ bezeichnet. Also gilt für den Differenzenquotienten

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f(\zeta) d\zeta$$

und genaue Betrachtung zeigt, dass die rechte Seite für $h \rightarrow 0$ gegen $f(z)$ konvergiert.

Satz 12.6 (Wegunabhängigkeit des Integrals). *Es gelten die Voraussetzungen des Satzes 12.5. Dann gilt für $z_1, z_2 \in D$ und jeden Weg γ der von z_1 nach z_2 führt*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

wenn F eine Stammfunktion von f ist.

Beweis. Wir nehmen die Stammfunktion F die zum Punkt z_1 definiert ist (also $z_0 = z_1$ in Satz 12.5) und da alle anderen Stammfunktionen von der Form $F + c$ sind gilt

$$\int_{z_1}^z f(\zeta) d\zeta = F(z) + c$$

für jedes z . Setzen wir $z = z_1$, so bekommen wir $0 = F(z_1) + c$ und es folgt

$$\int_{z_1}^{z_2} f(\zeta) d\zeta = F(z_2) + c = F(z_2) - F(z_1).$$

□

Beispiel 12.7. Die auf der komplexen Ebene ohne den Nullpunkt, also auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, holomorphe Funktion $f(z) = 1/z$ hat auf diesem Gebiet keine Stammfunktion!

Betrachten wir sie aber zum Beispiel auf der rechten Halbebene $H_+ = \{z \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ so ist $\operatorname{Log}(z)$ eine Stammfunktion. Das kann man mit Hilfe der Formel $f'(z) = u_x(x, y) + jv_x(x, y)$ nachrechnen: In der rechten Halbebene ist

$$\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + j \operatorname{Arg}(z) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) + j \arctan\left(\frac{y}{x}\right),$$

d.h. wir haben $u(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ und $v(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Daher ist

$$u_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot 2x = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

und

$$v_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

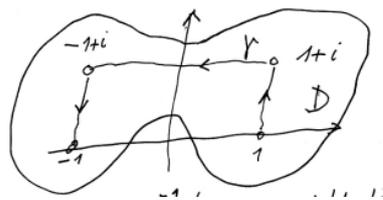
Es folgt also für $z \in H_+$

$$\operatorname{Log}'(z) = u_x(x, y) + jv_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

Beispiel 12.8. 1. Wir berechnen $\int_{\gamma} e^z dz$ für die Strecke von 1 nach j : Eine Stammfunktion ist $F(z) = e^z$ und daher ist

$$\int_{\gamma} e^z dz = F(j) - F(1) = e^j - e^1 = \cos(1) - e + j \sin(1).$$

2. Wollen wir $\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz$ für einen Weg berechnen, der von 1 nach -1 führt, so können wir das nicht für die gerade Verbindungsstrecke machen, da diese durch die Singularität in $z = 0$ läuft. Wir können aber folgenden Weg nehmen:



Die Funktion $1/z^2$ hat im skizzierten Gebiet eine Stammfunktion z.B. $-1/z$ und daher gilt

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{-1} + \frac{1}{1} = 2.$$

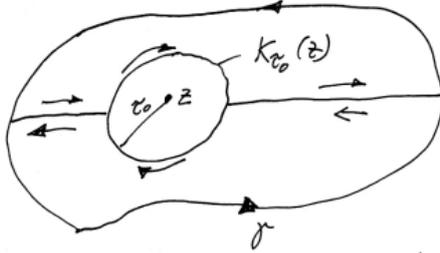
13 Die Cauchy-Integralformel

Satz 13.1 (Cauchy Integralformel). Es sei D einfach zusammenhängend, f holomorph in D und γ eine ganz in D verlaufende, geschlossene, stückweise stetig differenzierbare Kurve, die sich nicht selbst schneidet und welche positiv orientiert ist. Dann gilt für jedes z , welches von γ umlaufen wird

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Beweis.

Es sei z im Inneren von γ . Die Funktion $\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ ist in $D \setminus \{z\}$ holomorph. Wir wählen einen kleinen Radius r_0 , so dass der Kreis $K_{r_0}(z)$ noch ganz von γ umlaufen wird:



Dann gilt für alle $0 < r < r_0$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \int_{K_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \\ &= \int_{K_r(z)} \frac{f(z) + (f(\zeta) - f(z))}{\zeta - z} d\zeta \\ &= f(z) \int_{K_r(z)} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta + \int_{K_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta. \end{aligned}$$

Das erste Integral kennen wir; es hat den Wert $\frac{1}{2\pi j}$. Für das zweite Integral benutzen wir, dass f in D holomorph ist und daher in einer Umgebung von z beschränkt ist. Da der Grenzwert $\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \rightarrow f'(z)$ für $\zeta \rightarrow z$ existiert, ist der ganze Integrand beschränkt durch eine Konstante M , d.h. es gilt

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| \leq M$$

für alle ζ nahe bei z . Daher folgt nach der Standard-Abschätzung

$$\left| \int_{K_r(z)} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq M 2\pi r \rightarrow 0 \text{ für } r \rightarrow 0.$$

Zusammen haben wir gezeigt:

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) 2\pi j$$

Das bemerkenswerte an diesem Satz: Der Wert $f(z)$ wird bestimmt allein durch Werte $f(\zeta)$ entlang der Kurve, d.h. die Werte von f in Punkten z welche von der Kurve γ umlaufen werden, sind schon durch die Werte von f entlang von γ festgelegt!

wie behauptet. □

Wir betrachten den Spezialfall $\gamma = K_r(z)$ genauer: Wir parametrisieren die Kreislinie durch $\gamma(t) = z + re^{jt}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) und bekommen

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{K_r(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi j} \int_0^{2\pi} \frac{f(z + re^{jt})}{re^{jt}} r j e^{jt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{jt}) dt. \end{aligned}$$

Dies zeigt:

Satz 13.2 (Mittelwertformel). Ist f holomorph in Gebiet D und $z \in D$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{jt}) dt,$$

d.h. der Funktionswert $f(z)$ ist der Mittelwert von f entlang der Kreislinie.

Satz 13.3 (Cauchy Integralformel für Ableitungen). Unter den Voraussetzungen von Satz 13.1 gilt: f ist sogar beliebig oft komplex differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis.

Wir zeigen den Fall $n = 1$, die weiteren Fälle folgen dann per Induktion: Es sei z_0 in Inneren von γ und wir wählen h so, dass $z_0 + h$ noch innerhalb von γ liegt. Wir definieren

$$F_1(z_0) := \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta.$$

Wir benutzen

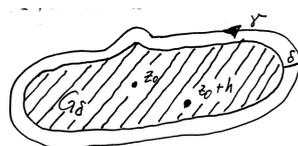
$$\frac{1}{\zeta - z_0 - h} - \frac{1}{\zeta - z_0} = \frac{h}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)}$$

und

Es folgt nach Satz 13.1

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - F_1(z_0) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{h} \left[\frac{1}{\zeta - z_0 - h} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right] - \frac{1}{(\zeta - z_0)^2} \right) f(\zeta) d\zeta \\ &= \frac{h}{2\pi j} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0 - h)(\zeta - z_0)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Jetzt betrachten wir die Menge $G_{\delta} := \{z \in \text{Inneres}(\gamma) \mid \forall \zeta \in \gamma : |z - \zeta| \geq \delta\}$:



Dabei wählen wir $\delta > 0$, sodass $z_0 \in G_\delta$, d.h. $|\zeta - z_0| \geq \delta$. Für h mit $|h| \leq \delta/2$, folgt $|\zeta - z_0 - h| \geq \delta/2$. Wir setzen $M := \max_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ und es folgt mit diesen Abschätzungen

$$\left| \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} - F_1(z_0) \right| \leq L(\gamma) \frac{|h|}{2\pi} \frac{2M}{\delta^3}.$$

Da die rechte Seite für $h \rightarrow 0$ gegen Null geht, ist f komplex differenzierbar in z_0 mit $f'(z_0) = F_1(z_0)$. \square

Wendet man die Standard-Abschätzung auf die Intergrale in der Cauchy-Integralformal mit $\gamma = K_r(z)$ an, bekommt man

Satz 13.4 (Cauchy-Ungleichungen). Sei f holomorph im Gebiet D , $z \in D$ und die Kreislinie $K_r(z)$ und ihr Inneres liegen ganz in D . Ist dann $|f(\zeta)| \leq M$ für alle $\zeta \in K_r(z)$, so gilt für alle n

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

Mit der Cauchy-Integralformel kann man manche Integrale direkt ablesen:

Beispiel 13.5. 1. Wir betrachten

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+2z} dz$$

Wir zerlegen

$$\frac{1}{z^2+2z} = \frac{1}{z(z+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+2}$$

und bekommen

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+2z} dz = \frac{1}{2} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z} dz - \frac{1}{2} \int_{|z|=3} \frac{e^z}{z+2} dz.$$

Im ersten Integral erkennen wir die Cauchy-Integralformel mit $f(\zeta) = e^\zeta$ und $z = 0$ im zweiten Integral ist $z = -2$. Daher ist

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z}{z^2+2z} dz = \pi j e^0 - \pi j e^{-2} = \pi(1 - e^{-2})j.$$

2. Wir betrachten das geschlossene Integral

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz.$$

Partialbruchzerlegung gibt

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{2j} \oint_{\gamma} \frac{1}{z-j} dz - \frac{1}{2j} \oint_{\gamma} \frac{1}{z+j} dz.$$

Das Ergebnis hängt nun davon ab, ob die Punkte j und $-j$ von γ umlaufen werden oder nicht. Es gilt

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = \begin{cases} 0 & : j \text{ und } -j \text{ liegen beide außerhalb von } \gamma \\ 0 & : j \text{ und } -j \text{ liegen im Inneren von } \gamma \\ \pi & : j \text{ liegt im Inneren von } \gamma, -j \text{ nicht} \\ -\pi & : -j \text{ liegt im Inneren von } \gamma, j \text{ nicht.} \end{cases}$$

Nun können wir die auch die „Umkehrung des Cauchy-Integral-satzes“ zeigen:

Satz 13.6 (Satz von Morera). *Es sei D ein einfach zusammenhängendes Gebiet und f in D stetig. Gilt dann für jeden in D verlaufenden stückweise stetig differenzierbaren und geschlossenen Weg γ*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0,$$

so ist f in D holomorph.

Beweis.

Wegen $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$ sind die Integrale $\int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta =: F(z)$ unabhängig vom Weg mit dem z_0 und z verbunden werden. Also ist F eine Stammfunktion von f , d.h. es gilt $F' = f$. Da f stetig ist, ist F also sogar stetig differenzierbar, also holomorph. Nach den Cauchy-Integralformeln für die Ableitungen ist F also beliebig oft differenzierbar, also gilt das gleiche für f . \square

Wir können mit Hilfe der Funktionentheorie den Fundamentalsatz der Algebra beweisen. Dazu zuerst ein Resultat, was auch für sich genommen interessant ist:

Satz 13.7 (Satz von Liouville). *Ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $|f|$ beschränkt, so ist f konstant.*

Beweis.

Es sei $M \geq |f|$. Dann gilt nach der Cauchy-Ungleichung für die Ableitung f' für einen Kreis mit Radius r um z

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{r}.$$

Dies gilt für alle $r > 0$ und mit $r \rightarrow \infty$ folgt $f'(z) = 0$. Dies gilt für jedes z und daher ist f konstant. \square

Funktionen, die auf ganz \mathbb{C} holomorph sind, nennt man *ganze Funktionen*; Beispiele sind alle Polynome und $e^z, \sin(z), \cos(z)$. Der Satz von Liouville sagt also, dass die einzigen beschränkten ganzen Funktionen die konstanten Funktionen sind.

Satz 13.8 (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + z^n$ mit komplexen Koeffizienten a_i und $n \geq 1$ hat mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} .*

Beweis.

Wäre $P_n(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so wäre

$$f(z) = \frac{1}{P_n(z)}$$

eine ganze Funktion. Es wäre aber auch

$$|P_n(z)| = |z^n| |1 + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n}|$$

und da der Ausdruck $|1 + a_{n-1} \frac{1}{z} + \dots + a_0 \frac{1}{z^n}|$ für $|z| \geq 1$ beschränkt ist, folgt $|P_n(z)| \rightarrow \infty$ für $|z| \rightarrow \infty$. Das bedeutet aber, dass $|f(z)| \rightarrow 0$ für $z \rightarrow \infty$ und daher wäre dann f eine beschränkte und ganze Funktion, nach dem Satz von Liouville also konstant. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme, dass f ein Polynom vom Grad größer gleich eins ist. \square

Korollar 13.9. Jedes Polynom $P_n(z)$ vom Grad $n \geq 1$ lässt sich in Linearfaktoren zerlegen, d.h. es gibt $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, so dass

$$P_n(z) = (z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

In diesem Sinne hat ein Polynom n -ten Grades genau n komplexe Nullstellen.

Beweis.

Für $n = 1$ ist $P_1(z) = z + a_0$ und daher ist die Aussage mit $z_1 = -a_0$ klar.

Ist $n > 1$ so hat P_n nach dem Hauptsatz der Algebra eine Nullstelle z_n und daher kann man P_n zerlegen als $P_n(z) = (z - z_n)P_{n-1}(z)$ mit einem Polynom P_{n-1} vom Grad $n - 1$. So arbeitet man sich rekursiv bis zum $n = 1$ herab. \square

14 Funktionenfolgen und Potenzreihen

Definition 14.1. Es sei $D \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *konvergent im Punkt* z_0 , falls die Folge $(f_n(z_0))_{n \in \mathbb{N}}$ als Folge von komplexen Zahlen konvergiert.

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt *punktweise konvergent in* D , wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $z \in D$ konvergiert. In diesem Fall heißt die durch

$$f(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z)$$

definierte Funktion der (punktweise) Grenzwert der Folge oder auch *Grenzfunktion*.

- (b) Die Folge (f_n) heißt *gleichmäßig konvergent in* D gegen f , wenn gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} |f_n(z) - f(z)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Satz 14.2. Gilt für eine eine Funktionenfolge (f_n) von Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall m, n \geq n_0 : \sup_{z \in D} |f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon,$$

so existiert eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, so dass (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert.

Satz 14.3. Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und (f_n) eine Folge von holomorphen Funktionen $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$. Ist (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge $G \subset D$ gleichmäßig konvergent gegen f , so gilt

- (i) Die Grenzfunktion f ist holomorph in D und
(ii) für jedes stückweise stetig differenzierbare Kurve γ in D gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz.$$

Beweis.

Wir zeigen zuerst (ii): Die Stetigkeit der Grenzfunktion f folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz von f_n gegen f . Also existiert das Integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ und mit der Standard-Abschätzung

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma} f_n(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \gamma} |f(z) - f_n(z)|.$$

Da γ eine kompakte Teilmenge ist, geht das Maximum auf der rechten Seite mit $n \rightarrow \infty$ gegen Null, was die Behauptung zeigt.

Zu (i): Ist $z_0 \in D$ und $r > 0$ so, dass $K_r(z_0) \subset D$. Dann gilt

Die gleichmäßige Konvergenz von f_n gegen f lässt sich auch schreiben als

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \forall z \in D : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon.$$

Der Unterschied zur punktweisen Konvergenz ist subtil: diese liest sich mit Quantoren als

$$\forall z \in D \forall \epsilon > 0 \exists n \forall n \geq n_0 : |f_n(z) - f(z)| < \epsilon,$$

der Unterschied ist also nur, dass das n_0 bei gleichmäßiger Konvergenz nur von ϵ abhängt (und damit für alle z gleichzeitig funktionieren muss, und bei punktweiser Konvergenz kann das n_0 auch noch für jedes z verschieden sein. Damit kann eine punktweise konvergente Folge in für mache z „langsamer konvergieren“ als für andere z .

Satz 14.2 ist nichts anderes als das Cauchy-Konvergenzkriterium in einem jedem Punkt z angewendet.

nach (ii) für jede stückweise glatte Kurve in $K_r(z_0)$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz$$

und die Integrale rechts sind wegen der Holomorphie der f_n alle gleich null. Daher ist auch $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ und nach dem Satz von Morera folgt die Holomorphie von f . \square

Ebenso wie Folgen von Funktionen können wir Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen betrachten. Besonders wichtig sind hierbei *Potenzreihen*, also Reihen der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

Wir im Reellen gilt:

Satz 14.4. Für eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ existiert ein Konvergenzradius $\rho > 0$, (welcher auch $+\infty$ sein darf) so dass

- die Potenzreihe für jedes z mit $|z - z_0| < \rho$ absolut konvergiert
- in jedem Gebiet $B_r(z_0)$ mit $0 \leq r < \rho$ gleichmäßig konvergiert und
- für jedes z mit $|z - z_0| > \rho$ divergiert.

Der Konvergenzradius lässt sich z.B. berechnen durch

$$\rho = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \right)^{-1}$$

falls der Grenzwert existiert, in jedem Fall aber durch

$$\rho = \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \right)^{-1}.$$

Satz 14.5. Hat die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ einen Konvergenzradius $\rho > 0$, so ist die durch sie auf $B_{\rho}(z_0)$ definierte Funktion holomorph.

Dies folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe und dem Satz 14.3.

Jede holomorphe Funktion lässt sich lokal in eine Potenzreihe entwickeln:

Satz 14.6. Es sei $\rho > 0$ und f in $B_{\rho}(z_0)$ holomorph. Dann lässt sich f in $B_{\rho}(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickeln, d.h. für $z \in B_{\rho}(z_0)$ gilt

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

und die Koeffizienten sind (für jedes $0 < r_0 < \rho$)

$$a_k = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_0}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Beweis.

Es sei $0 \leq r < r_0 < \rho$. Dann gilt für nach der Cauchy-Integralformel

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_0}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Wir formen den Faktor $\frac{1}{\zeta - z}$ wie folgt um:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}.$$

Es gilt $|\zeta - z_0| = r_0 > r := |z - z_0|$ und daher ist $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| < 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta - z} &= \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \\ &= \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k. \end{aligned}$$

Die Reihe ist eine geometrische Reihe, welche nach dem Majorantenkriterium gleichmäßig konvergiert. Für den Integranden in der Cauchy-Integralformel gilt

$$\begin{aligned} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} &= \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^k}{(\zeta - z_0)^{k+1}}. \end{aligned}$$

Dies setzen wir in die Cauchy-Integralformel ein und vertauschen die Reihenfolge von Integral und Reihe (gleichmäßige Konvergenz sichert, dass dies das richtige Ergebnis liefert) und bekommen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_0}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k,$$

was die Behauptung zeigt. \square

Schauen wir auf die Cauchy-Integralformel für Ableitungen, so sehen wir

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z_0) &= \frac{n!}{2\pi j} \int_{K_{r_0}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= n! a_n, \end{aligned}$$

d.h. es gilt

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

Die Koeffizienten der Potenzreihe sind also genau die aus der Taylor-Entwicklung bekannten Koeffizienten.

Insgesamt gilt:

Satz 14.7. *Es sei f in einem Gebiet D holomorph. Dann lässt sich f in jedem Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ entwickeln und diese Potenzreihe konvergiert in jeder Menge $B_r(z_0)$ welche ganz in D liegt.*

Beispiel 14.8. Wir betrachten die Funktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Nach der geometrischen Reihe ($\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$) gilt

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-z^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^{2k} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 \pm \dots$$

Diese Reihe hat den Konvergenzradius $\rho = 1$ und konvergiert daher auf der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$.

Im Reellen erscheint das etwas seltsam, da die Funktion $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ auf der ganzen reellen Achse definiert und beliebig oft differenzierbar ist. Im Komplexen ist das ganz natürlich. Das maximale Definitionsgebiet von $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ ist $D = \mathbb{C} \setminus \{j, -j\}$ und daher ist die größtmögliche Kreisscheibe um 0 in D die Kreisscheibe $B_1(0)$.

Abschließend noch eine Liste von äquivalenten Beschreibungen von Holomorphie:

Satz 14.9. *Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgenden Aussagen äquivalent:*

- (a) f ist holomorph in D
- (b) Ist $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$, dann sind u und v stetig differenzierbar und erfüllen

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

- (c) Ist $G \subset D$ einfach zusammenhängend und γ ein stückweise stetig differenzierbarer und geschlossener Weg in G , so gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

- (d) f lässt sich in jedem $z_0 \in D$ in eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickeln.

Anders gesagt: Die (lokalen) Potenzreihendarstellungen konvergieren im größtmöglichen Kreis, der ganz in D liegt.

15 Identitätssatz, Maximumprinzip und Analytische Fortsetzung

Die reelle Funktion $x \mapsto e^x$ hat eine natürliche Fortsetzung für komplexe Argumente: wir nehmen einfach die Potenzreihe als Definition und wir bekommen dadurch sogar eine holomorphe Funktion. Es stellt sich die Frage, ob es nicht auch andere holomorphe Fortsetzungen von dieser (und anderer glatter reeller Funktionen) gibt. Dies ist tatsächlich nicht der Fall, wie wir aus dem folgenden Satz folgern werden.

Satz 15.1 (Identitätssatz). *Es seien f, g in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorph. Ist dann (z_n) eine Folge in D welche einen Häufungspunkt $z_0 \in D$ hat und gilt $f(z_n) = g(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt schon $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$.*

Der Identitätssatz folgt aus folgender Aussage über „ w -Stellen“ von holomorphen Funktionen:

Satz 15.2. *Ist D ein Gebiet und $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant, so gilt für jedes $w \in \mathbb{C}$, dass das Urbild von w unter f , also die Menge*

$$f^{-1}(w) = \{z \in D \mid f(z) = w\}$$

keinen Häufungspunkt hat.

Wenden wir diesem Satz auf $f - g$ und $w = 0$ an, bekommen wir den Identitätssatz.

Beachte: Häuft sich die Folge z_n am Rand ∂D von D , so gilt die Aussage des Identitätssatzes nicht (denn dort ist gefordert, dass der Häufungspunkt in D liegt). Ein Beispiel dafür ist die Funktion $f(z) = \sin(\frac{1}{z})$ auf $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Diese Funktion hat die Nullstellen $z_n = 1/(\pi n)$ (und weitere, nämlich $-1/(\pi n)$), welche sich in $z_0 = 0 \in \partial D$ häufen. Die Funktion $g(z) \equiv 0$ stimmt in diesen z_n mit f überein, aber trotzdem sind f und g nicht gleich, obwohl beide Funktionen holomorph sind.

Satz 15.3. *Sind f und g holomorph in einem Gebiet D und gilt in einem $z_0 \in D$*

$$f^{(k)}(z_0) = g^{(k)}(z_0), \quad k \in \mathbb{N},$$

so gilt $f(z) = g(z)$ in ganz D .

Beweis.

Wir können f und g in Potenzreihen entwickeln von denen wir wissen, dass sie genau die Taylorreihen sind:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Beide Potenzreihen haben positiven Konvergenzradius und daher

Man sagt: Die w -Stellen einer holomorphen Funktion liegen diskret im Definitionsbereich.

stimmen f und g sogar einer Kreisscheibe $B_r(z_0)$ überein. Nach dem Identitätssatz sind sie also auf ganz D gleich. \square

Aus dem Identitätssatz folgt auch das Maximumsprinzip. Ist $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ holomorph in einem Gebiet D , so ist f insbesondere stetig in D und daher ist $z \mapsto |f(z)| = \sqrt{u(x, y)^2 + v(x, y)^2}$ stetig. Es gilt:

Satz 15.4. *Ist f in Gebiet D holomorph und hat die reellwertige Funktion $|f|$ ein lokales Maximum in der offenen Menge D , so ist f konstant*

Beweis.

Es sei z_0 ein lokales Maximum von $|f|$. Dann gilt nach der Mittelwerteigenschaft

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{jt}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{jt})| dt \leq |f(z_0)|$$

und daher muss überall Gleichheit gelten. Es folgt

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{jt})| - |f(z_0)| dz = 0$$

aber da z_0 ein lokales Maximum ist, ist der Integrand immer kleiner gleich Null, also gleich Null überall. Daher ist f auf der Kreislinie $K_r(z_0)$ konstant und nach dem Identitätssatz überall. \square

Andersherum ausgedrückt: Ist f in D holomorph und nicht konstant, so hat $|f|$ kein lokales Maximum in D . Und ist D beschränkt, so ist der Abschluss von D kompakt. Daher nimmt die stetige Funktion $|f|$ ihr Maximum im Abschluss von D an, und nach dem Vorigen muss dies auf dem Rand von D passieren.

Es folgt:

Satz 15.5 (Maximumsprinzip). *Ist D ein beschränktes Gebiet mit Rand ∂D und f in D holomorph und stetig fortsetzbar auf ∂D . Dann nimmt $|f|$ ihr Maximum auf dem Rand ∂D an, d.h. es gibt ein $z_0 \in \partial D$, so dass*

$$|f(z_0)| = \max_{z \in D \cup \partial D} |f(z)|.$$

Es folgt auch noch ein reelles Analogon:

Satz 15.6 (Maximumprinzip für harmonische Funktionen). *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Rand ∂D . Ist u in D eine harmonische Funktion (d.h. $\Delta u = 0$), und stetig auf ∂D fortsetzbar, so nimmt u ihr Maximum und ihr Minimum auf dem Rand ∂D an.*

Definition 15.7. Ist f in z_0 holomorph, so heißt z_0 eine Nullstelle m -ter Ordnung, wenn es eine in z_0 holomorphe Funktion g mit $g(z_0) \neq 0$ und

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

gibt.

Satz 15.8. Es gilt: Eine holomorphe Funktion f hat in z_0 genau dann eine Nullstelle m -ter Ordnung, wenn

$$f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad \text{und} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

gilt.

Beweis.

Sind die entsprechenden Ableitungen Null, so lautet die Potenzreihendarstellung von f in z_0

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^m \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+m} (z - z_0)^k}_{=:g(z)}$$

und da g eine Potenzreihe ist, ist g holomorph und da $a_m = f^{(m)}(z_0)/m! \neq 0$ gilt, ist $g(z_0) \neq 0$.

Umgekehrt habe f die Darstellung $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$. Dann ist $f(z_0) = 0$ und nach der Produktregel ist $f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$ und wir sehen $f'(z_0) = 0$. Wiederholtes Anwenden der Produktregel zeigt die Behauptung. \square

Satz 15.9 (Isolierte Nullstellen). Es sei f holomorph in $B_\rho(z_0)$, nicht konstant Null und erfülle $f(z_0) = 0$. Dann gilt:

- (a) Es gibt eine natürliche Zahl m , so dass z_0 eine m -fache Nullstelle von f ist (d.h. es können nicht alle Ableitungen von f in z_0 gleich Null sein).
- (b) Es gibt ein $r_0 < \rho$ so dass f in $K_{r_0}(z_0) \setminus \{z_0\}$ keine weitere Nullstelle hat.

Beweis.

- (a) Da f holomorph ist, lässt sich f in eine Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ entwickeln. Wären alle Ableitungen in z_0 gleich Null, so wären alle $a_k = 0$ und daher f konstant Null.
- (b) Nach dem Identitätssatz kann z_0 kein Häufungspunkt von Nullstellen sein, also muss es eine Umgebung von z_0 geben, welche keine Nullstellen enthält. \square

Kommen wir zurück auf die Ausgangsfrage des Abschnittes:

Definition 15.10. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Eine holomorphe Funktion $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ welche auf einem Gebiet D mit $I \subset D$ definiert ist und welche $F(x) = f(x)$ für $x \in I$ erfüllt heißt *holomorphe Fortsetzung* (oder *holomorphe Ergänzung*) von f auf D .

Da ein offenes Intervall I Häufungspunkte hat, folgt direkt aus dem Identitätssatz:

Die Behauptung (a) gilt nicht für reelle beliebig oft differenzierbare Funktionen, wie das Beispiel $f(x) = e^{-1/x^2}$ (in $x = 0$ durch $f(0) = 0$ fortgesetzt) zeigt.

Satz 15.11. *Es gibt höchstens eine holomorphe Fortsetzung F von f .*

Beispiel 15.12. Notwendigerweise muss eine reelle Funktion f beliebig oft differenzierbar sein, damit sie eine holomorphe Fortsetzung hat. Aber nicht jede beliebig oft differenzierbare reelle Funktion hat eine holomorphe Fortsetzung: Die Funktion $f(x) = \exp(-1/x^2)$ durch $f(0) = 0$ fortgesetzt ist auf der ganzen reellen Achse beliebig oft differenzierbar. Trotzdem hat sie keine holomorphe Fortsetzung in die komplexe Ebene. Diese müsste von der Form $f(z) = \exp(-1/z^2)$ sein. Diese Funktion ist nicht einmal beschränkt in der Nähe der Null: Wir rechnen

$$\frac{1}{z^2} = \frac{\bar{z}^2}{|z|^4} = \frac{x^2 - y^2 - j2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Wegen $|e^{x+jy}| = e^x$ folgt

$$\left| e^{-\frac{1}{z^2}} \right| = e^{\frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}}.$$

Für $x = 0$ und $y \neq 0$ folgt

$$f(0 + jy) = e^{\frac{1}{y^2}}$$

was für $y \rightarrow 0$ gegen ∞ geht.

Etwas allgemeiner gilt: Sind D_1, D_2 Gebiete mit $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ und ist f_1 auf D_1 holomorph und f_2 auf D_2 holomorph, und stimmen f_1 und f_2 in $D_1 \cap D_2$ überein, so heißt f_1 die analytische Fortsetzung von f_2 auf D_1 (und andersherum). Analytische Fortsetzungen sind nach dem Identitätssatz immer eindeutig bestimmt.

16 Isolierte Singularitäten und Laurent-Reihen

Definition 16.1 (Isolierte Singularität). Ist f in einer Menge

$$\{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$$

definiert und holomorph, so sagen wir, dass f in z_0 eine *isolierte Singularität* hat.

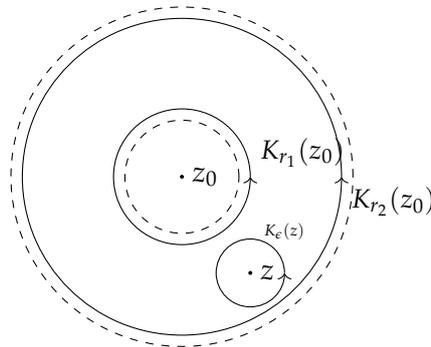
Isolierte Singularitäten werden wie folgt klassifiziert:

- (i) *hebbare Singularität*, wenn f in einer Umgebung von z_0 beschränkt ist,
- (ii) *Pol*, wenn $|f(z)| \rightarrow \infty$ wenn $z \rightarrow z_0$,
- (iii) *wesentliche Singularität*, in allen anderen Fällen.

Betrachten wir nun eine Funktion f , die in einem Ringgebiet

$$D_0 := \{z \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$

holomorph ist und wollen f in diesem Gebiet in eine Reihe von Potenzen von $|z - z_0|$ entwickeln (und uns nicht auf positive Exponenten beschränken). Wir wählen weitere Radien $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$ und für einen Punkt z mit $r_1 < |z - z_0| < r_2$ wählen wir einen Radius ϵ , so dass $K_\epsilon(z)$ ganz im Gebiet liegt, was durch $K_{r_1}(z_0)$ und $K_{r_2}(z_0)$ begrenzt ist:



Nach Satz 12.4 wissen wir

$$\int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{K_\epsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

und da f in z holomorph und daher stetig ist, gilt

$$\int_{K_\epsilon(z)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \rightarrow 2\pi j f(z), \quad \text{für } \epsilon \rightarrow 0.$$

Es folgt also

$$f(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (*)$$

In beiden Integralen entwickeln wir nun in geometrische Reihen, müssen dabei aber aufpassen, dass wir wirklich konvergente Reihen benutzen. Für das Integral über $K_{r_2}(z_0)$ benutzen wir

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k$$

und die Reihen konvergiert, wenn $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| < 1$ gilt, also insbesondere für $\zeta \in K_{r_2}(z_0)$, denn da ist $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| = \frac{|z - z_0|}{r_2} < 1$. Wir bekommen also

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < r_2.$$

Für das zweite Integral in (*) müssen wir anders vorgehen (denn hier ist $|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}| > 1$): Wir schreiben

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{z - \zeta} = \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right) = \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^k$$

und die Reihe konvergiert für $\zeta \in K_{r_1}(z_0)$ denn dann ist $|\zeta - z_0| = r_1 < |z - z_0|$. Das zweite Integral in (*) ist also

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)(\zeta - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] \\ &= \sum_{k=-1}^{-\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k \quad |z - z_0| > r_1, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt k durch $-k - 1$ ersetzt haben. Insgesamt bekommen wir also aus (*)

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_2}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k + \sum_{k=-1}^{-\infty} \left[\frac{1}{2\pi j} \int_{K_{r_1}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right] (z - z_0)^k.$$

Wir können $K_{r_1}(z_0)$ und $K_{r_2}(z_0)$ durch einen gemeinsamen Kreis $K = K_r(z_0)$ ersetzen und bekommen

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit

$$a_k = \frac{1}{2\pi j} \int_K \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \quad (**)$$

und haben gezeigt:

Satz 16.2. Ist f in einem Ringgebiet

$$D_0 = \{z \mid \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$$

holomorph, so lässt sich f in eine doppelt-unendliche Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit Koeffizienten a_k aus (**). Die Reihe konvergiert absolut in D_0 und gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von D_0 .

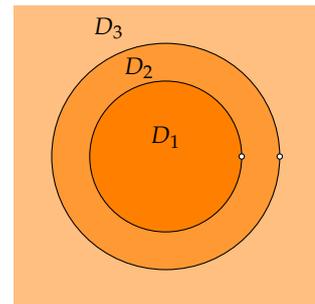
Definition 16.3. Die Reihe $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ heißt *Laurent-Reihe* von f (um den Entwicklungspunkt z_0). Der Teil $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ heißt *Nebenteil* der Reihe und der Teil $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z - z_0)^k$ heißt *Hauptteil* der Reihe.

Beispiel 16.4. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

welche in 2 und 3 isolierte Singularitäten hat. Wir können diese Funktion in folgenden drei verschiedenen Gebieten in Laurent-Reihen entwickeln:

- (1) für die Kreisscheibe $D_1 = B_2(0)$ (also $\rho_1 = 0, \rho_2 = 2$) liegt keine Singularität innerhalb des inneren Kreises,
- (2) für das Ringgebiet $D_2 = \{z \mid 2 < |z| < 3\}$ liegt die Singularität in 2 innerhalb des inneren Kreises und
- (3) für das Gebiet $D_3 = \{z \mid 3 < |z|\}$ liegen die Singularitäten in 2 und in 3 innerhalb des Kreises.



Um die Entwicklungen auszurechnen, machen wir zuerst die Partialbruchzerlegung

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-3)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

und bestimmen dann für beide Summanden jeweils zwei verschiedene konvergente Darstellungen:

1. Für $|z| < 2$ (also $\frac{|z|}{2} < 1$) ist

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k}$$

konvergent.

2. Für $|z| > 2$ (also $\frac{2}{|z|} < 1$) ist

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}.$$

3. Für $|z| < 3$ (also $\frac{|z|}{3} < 1$) ebenso

$$\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^k}.$$

4. Für $|z| > 3$ (also $\frac{3}{|z|} < 1$) ist

$$\frac{1}{z-3} = \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{z^k} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}.$$

Wir haben also für $|z| < 2$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^k} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{3^{k+1}} \right) z^k. \end{aligned}$$

Für $2 < |z| < 3$ bekommen wir

$$f(z) = -\frac{1}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^k} - \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}.$$

Schließlich gilt für $|z| > 3$

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}} - \sum_{k=-1}^{-\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=-1}^{-\infty} \left(\frac{1}{3^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} \right) z^k.$$

Mit Hilfe von Laurent-Reihen lässt sich die Klassifikation von isolierten Singularitäten neu formulieren: f mit Laurent-Reihe $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ hat in z_0

(i) eine hebbare Singularität, wenn $a_k = 0$ für $k < 0$, also wenn

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

(ii) einen Pol, wenn es ein $m \in \{1, 2, 3, \dots\}$ gibt, so dass $a_k = 0$ für $k < -m$, also wenn

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots,$$

und in diesem Fall sagen wir, dass f einen *Pol der Ordnung m* hat,

(iii) eine wesentliche Singularität, wenn $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$.

Wir sehen insbesondere: Ist z_0 eine hebbare Singularität von f , so ist f durch $f(z_0) = a_0$ holomorph in z_0 fortsetzbar.

Beispiel 16.5. (a) Wir betrachten

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z}$$

was in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf jeden Fall holomorph ist. Wegen $\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} \mp \dots$ ist

$$f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \mp \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$$

die Laurent-Entwicklung von f in $z = 0$ und wir sehen, dass f in $z = 0$ eine hebbare Singularität hat. Es gilt sogar, dass der Grenzwert $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 1$ existiert und die Funktion f so in Null fortgesetzt holomorph ist.

(b) Wir betrachten $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 7}{z - 2}$. Mit Hilfe von Polynomdivision bekommen wir

$$f(z) = z + \frac{7}{z-2}.$$

Dies können wir direkt in die Laurent-Reihe umschreiben:

$$f(z) = \frac{7}{z-2} + 2 + (z-2)$$

(d.h. es ist $a_{-1} = 7$, $a_0 = 2$ und $a_1 = 1$ und alle anderen a_k sind Null). Daher hat f in $z = 2$ einen Pol erster Ordnung.

(c) Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ ist in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Aus der Potenzreihe der Exponentialfunktion bekommen wir gleich

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{-\infty} \frac{1}{(-k)!} z^k.$$

Die Funktion hat also eine wesentliche Singularität in $z = 0$.

Wir halten noch zwei Fakten zu Singularitäten fest:

Satz 16.6. Eine Funktion f hat in z_0 genau dann einen Pol der Ordnung m , wenn die Funktion $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ in z_0 holomorph ist und $g(z_0) \neq 0$ erfüllt.

Satz 16.7. Die Funktion f hat genau dann in z_0 einen Pol der Ordnung m , wenn $h(z) = \frac{1}{f(z)}$ in z_0 eine Nullstelle der Ordnung m hat.

17 Der Residuensatz

Haben wir eine Funktion f in eine Laurent-Reihe

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

entwickelt, so können wir Integrale entlang von Wegen γ die z_0 und keine weiteren Singularität von f umlaufen einfach ausrechnen: Nach dem Fundamentalintegral (Beispiel 11.2) gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_{\gamma} (z - z_0)^k dz = 2\pi j a_{-1}.$$

Definition 17.1. Der Koeffizient a_{-1} der Laurent-Reihenentwicklung von f um z_0 heißt *Residuuum* von f in z_0 und wir schreiben

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := a_{-1}.$$

Nach der Formel aus Satz 16.2 für die Koeffizienten der Laurent-Reihe gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_r(z_0)} f(\zeta) d\zeta, \quad (*)$$

wenn der Kreis so klein ist, dass er keine Singularität (außer evtl. in z_0) umläuft.

Beispiel 17.2. (a) Die Funktion $f(z) = \frac{z^2 - 2z + 7}{z - 2}$ hat (um $z = 2$) die Laurent-Reihenentwicklung

$$f(z) = \frac{7}{z - 2} + 2 + (z - 2)$$

also ist

$$\operatorname{Res}_2 f = 7.$$

(b) Die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ hat (um $z = 0$) die Laurent-Reihe $f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots$ und daher ist

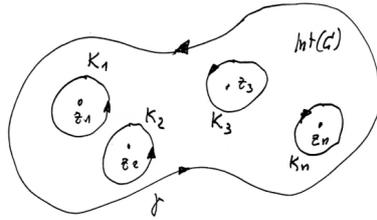
$$\operatorname{Res}_0 f = 1.$$

Satz 17.3 (Residuensatz). Es sei γ eine stückweise stetig differenzierbare, geschlossenene, positiv orientierte Kurve, die sich nicht selbst schneidet und f sei holomorph in einer Umgebung des Gebiets, welches von γ umlaufen wird mit Ausnahme von endlich vielen isolierten Singularitäten z_1, \dots, z_n . Dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f.$$

Beweis.

Der Beweis folgt im wesentlichen aus folgender Konstruktion:



Wir legen um jede Singularität einen kleinen Kreis K_k wie in der Skizze. Dann ist

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{K_k} f(z) dz$$

was nach (*) die Behauptung zeigt. \square

Neben den beiden Möglichkeiten

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi j} \int_{K_r(z_0)} f(z) dz = a_{-1}$$

(wobei a_{-1} der entsprechende Koeffizient in der Laurent-Reihe von f um z_0 ist) gibt es weitere Möglichkeiten, Residuen auszurechnen:

Lemma 17.4. (a) Hat f in z_0 einen Pol erster Ordnung, so gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

(b) Ist $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit zwei holomorphen Funktionen g und h , wobei h in z_0 eine einfache Nullstelle habe. Dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Beweis.

Zu (a): Hat f einen Pol erster Ordnung, so ist die Laurent-Reihe von f um z_0

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

Also ist $(z - z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z - z_0) + \dots$ und daher ist $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = a_{-1}$.

Zu (b): Wir benutzen (a). Es gilt (wegen $h(z_0) = 0$)

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

\square

Beispiel 17.5. Wir berechnen die Residuen von $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ in den beiden Polen j und $-j$.

Der Pol von f in $z_0 = j$ hat die Ordnung $m = 1$ und daher betrachten wir

$$h(z) = (z - j)f(z) = (z - j) \frac{1}{1+z^2} = (z - j) \frac{1}{(z-j)(z+j)} = \frac{1}{z+j}.$$

Es folgt also

$$\operatorname{Res}_j f = \lim_{z \rightarrow j} h(z) = h(j) = \frac{1}{j+j} = \frac{1}{2j}.$$

Für $z_0 = -j$ ist ebenfalls $m = 1$, aber hier ist

$$h(z) = (z + j)f(z) = \frac{1}{z-j}$$

und wir bekommen

$$\operatorname{Res}_{-j} f = \lim_{z \rightarrow -j} h(z) = h(-j) = \frac{1}{-j-j} = -\frac{1}{2j}.$$

Mit dem Residuensatz bekommen wir sofort das Integral $\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$, für einen Weg γ der den Pol j genau einmal positiv orientiert umläuft. Es gilt nämlich

$$\int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi j \operatorname{Res}_j f = 2\pi j \frac{1}{2j} = \pi.$$

Für Pole höherer Ordnung hat man entsprechend:

Lemma 17.6. Ist f holomorph mit einem Pol Ordnung m in z_0 , so gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(z_0),$$

wobei $h(z) = (z - z_0)^m f(z)$ ist (und in z_0 durch den Grenzwert $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$ fortgesetzt ist).

Beweis.

Wir benutzen die Darstellung $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^m}$ für $z \neq z_0$ und die Definition des Residuums

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_0} f &= \operatorname{Res}_{z_0} \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{K_r(z_0)} \frac{h(z)}{(z-z_0)^m} dz \end{aligned}$$

(wobei r so klein sein muss, dass $K_r(z_0)$ ganz im Holomorphiegebiet von h liegt). Auf der rechten Seite erkennen wir die Cauchy-Integralformel für die $(m-1)$ -te Ableitung (bis auf genau den richtigen Vorfaktor). \square

Beispiel 17.7. Wir betrachten $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)^3(z+1)}$. In $z = 1$ liegt ein Pol der Ordnung 3 vor. Es gilt $f(z) = \frac{h(z)}{(z-1)^3}$ mit $h(z) = \frac{z^2}{z+1}$. Wegen $h'(z) = \frac{z^2+2z}{(z+1)^2}$ und $h''(z) = \frac{(2z+2)(z+1)^2 - (z^2+2z)2(z+1)}{(z+1)^4}$ folgt

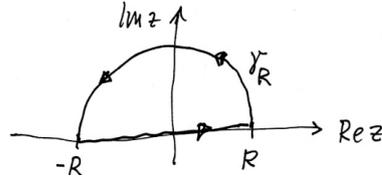
$$\operatorname{Res}_{z=1} f = \frac{1}{2!} h''(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Alternativ könnten wir auch $f(z) = g(z)/h(z)$ mit $g(z) = 1$ und $h(z) = 1+z^2$ schreiben und bekommen so ebenfalls (wegen $h'(z) = 2z$)

$$\operatorname{Res}_j f(z) = g(j)/h'(j) = 1/(2j).$$

Mit Hilfe des Residuensatzes kann man einige uneigentliche reelle Integrale berechnen, zum Beispiel einige Integrale der Form $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$. Dazu betrachtet man die Funktion f für komplexes Argument z (welche endlich viele Singularitäten z_1, \dots, z_n in der oberen Halbebene haben kann – Singularitäten auf der reellen Achse sind nicht erlaubt) und geht wie folgt vor:

1. Zu einem $R > 0$ betrachte folgenden Integrationsweg



Dabei sei γ_R der Halbkreisbogen, $[-R, R]$ der Abschnitt entlang der reellen Achse und γ der ganze Weg.

2. Zeige, dass $\int_{\gamma_R} f(z) dz \rightarrow 0$ für $R \rightarrow \infty$ (wenn das nicht stimmt, geht diese Methode nicht).
3. Berechne $\int_{\gamma} f(z) dz$ mit Hilfe des Residuensatzes. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z) dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{-R}^R f(z) dz + \int_{\gamma_R} f(z) dz \right] \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi j \sum_{\text{Im}(z_k) > 0} \text{Res}_{z_k} f. \end{aligned}$$

Beispiel 17.8. Wir berechnen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ (das Ergebnis kennen wir: es ist π , da \arctan eine Stammfunktion ist). Das Residuum von f in der einzigen Singularität von f in der oberen Halbebene (nämlich in j) haben wir schon in Beispiel 17.5 ausgerechnet und daher ist das Integral entlang γ (für $R > 1$)

$$\pi = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx.$$

Für das erste Integral gilt nach der Standardabschätzung

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq L(\gamma_R) \max_{z \in \gamma_R} \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \rightarrow 0 \text{ für } R \rightarrow \infty.$$

Es folgt (wie erwartet)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = 2\pi j \text{Res}_j f = 2\pi j \frac{1}{2j} = \pi.$$

Hier eine weitere Methode: Integrale vom Typ

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) d\varphi$$

mit einer rationalen Funktion R können wir wie folgt als komplexe Wegintegrale schreiben: mit $z(\varphi) = e^{j\varphi}$ ist $e^{-j\varphi} = \frac{1}{z(\varphi)}$ und daher ist

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad \sin(\varphi) = \frac{1}{2j} \left(z - \frac{1}{z} \right)$$

und formal ist „ $dz = jz d\varphi$.“ Daher ist

$$\int_0^{2\pi} R(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) d\varphi = \oint_{K_1(0)} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2j}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{1}{jz} dz.$$

Das Integral auf der rechten Seite lässt sich mit dem Residuensatz berechnen.

Beispiel 17.9. Es sei $0 < \epsilon < 1$ und wir betrachten

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(t)} dt.$$

Es gilt

$$R(x, y) = \frac{1}{1 + \epsilon x}$$

und daher ist

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(t)} dt &= \oint_{K_1(0)} \frac{1}{1 + \frac{\epsilon}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \frac{1}{jz} dz \\ &= \frac{2}{j\epsilon} \oint_{K_1(0)} \frac{1}{z^2 + \frac{2}{\epsilon}z + 1} dz. \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Nenners $h(z) = z^2 + \frac{2}{\epsilon}z + 1$ sind in

$$z_{1/2} = -\frac{1}{\epsilon} \pm \frac{1}{\epsilon} \sqrt{1 - \epsilon^2} = \frac{1}{\epsilon} \left(-1 \pm \sqrt{1 - \epsilon^2} \right)$$

wovon nur $z_1 = -\frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} \sqrt{1 - \epsilon^2}$ im Einheitskreis liegt. Da es nur zwei Nullstellen gibt, hat der Integrand in z_1 einen einfachen Pol und das Residuum ist nach Lemma 17.4

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z_1} \frac{1}{h(z)} &= \frac{1}{h'(z_1)} = \frac{1}{2z_1 + \frac{2}{\epsilon}} \\ &= \frac{1}{-\frac{2}{\epsilon} + \frac{2}{\epsilon} \sqrt{1 - \epsilon^2} + \frac{2}{\epsilon}} = \frac{\epsilon}{2\sqrt{1 - \epsilon^2}}. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \epsilon \cos(t)} dt = \frac{2}{j\epsilon} 2\pi j \operatorname{Res}_{z_1} \frac{1}{h(z)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \epsilon^2}}.$$

18 Einführung in Distributionen

Wenn wir uns bisher eine Funktion f auf einer Menge Ω (sei sie Teilmenge von \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 oder \mathbb{R}^3) betrachtet haben, so haben wir sie uns bisher immer so vorgestellt, dass wir sie in jedem Punkt $x \in \Omega$ auswerten können. Ist das überhaupt sinnvoll und realistisch? Stellt f eine physikalische Variable dar (also z.B. eine Temperatur, eine Dichte oder eine Konzentration), so stellt sich die Frage, ob das überhaupt realistisch ist. In der Praxis wird eine Messung durchgeführt, z.B. mit einem Thermometer, die immer einen Mittelwert über einen kleinen Bereich liefert. In mathematischer Schreibweise wird eine solche Messung dargestellt durch

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx,$$

wobei $\varphi(x)$ durch die Natur des Thermometers gegeben ist: φ hat die Werte da konzentriert, wo die Spitze des Thermometers sitzt. Damit diese Messung wirklich einen Mittelwert darstellt, sollte gelten

$$\begin{aligned}\varphi(x) &\geq 0 \text{ überall} \\ \int_{\Omega} \varphi(x)dx &= 1.\end{aligned}$$

Diese Bedingungen sind allerdings nicht übermäßig wichtig: Haben wir zwei Messungen mit zwei „Thermometern“ φ_1 und φ_2 , so können wir zum Beispiel

$$\int_{\Omega} f(x)\varphi_1(x)dx - \int_{\Omega} f(x)\varphi_2(x)dx = \int_{\Omega} f(x)(\varphi_1(x) - \varphi_2(x))dx$$

bilden und $\varphi_1 - \varphi_2$ ist dann nicht mehr nicht-negativ. Auch Skalierungen $\int_{\Omega} f(x)a\varphi_1(x)dx$ sind möglich, d.h auch die Integrale müssen nicht normiert sein.

Der Punkt hier ist, dass es sehr natürlich ist, von einer Funktion f Größen wie $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$ zu betrachten und nicht immer klar ist, ob Punkt-werte $f(x)$ sinnvoll sind. Wir schreiben ab nun

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx.$$

Die Funktionen φ heißen in diesem Zusammenhang *Testfunktionen*, da man mit ihnen die Funktion f „messen“, bzw. „testen“ kann.

Damit haben wir schon fast die Definition von „Distributionen“ oder „verallgemeinerten Funktionen“ gesehen. Es ist noch offen, was es bedeutet, dass eine „Messung“ mit einer Testfunktion „stetig“ ist.

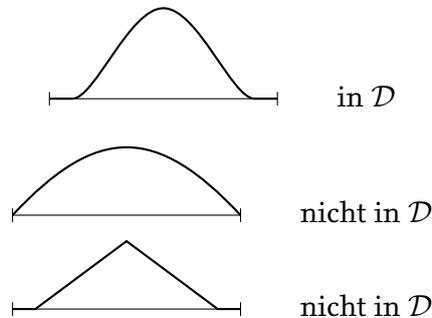
Beschreiben wir zuerst, was genau wir mit „Testfunktion“ meinen. Wir beschreiben den Raum \mathcal{D} als Testfunktionen in n Variablen: Dazu betrachten wir eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Dies ist die gleiche Schreibweise wie für Skalarprodukte - die Abbildung ist ja immerhin auch bilinear: Für zwei Funktionen φ_1 und φ_2 und skalare a_1 und a_2 gilt

$$\langle f, a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 \rangle = a_1\langle f, \varphi_1 \rangle + a_2\langle f, \varphi_2 \rangle.$$

Definition 18.1. Der Raum der *Testfunktionen* auf der offenen Menge Ω ist die Menge $\mathcal{D}(\Omega)$ von Funktionen $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, welche außerhalb einer abgeschlossenen Menge die einen positiven Abstand zum Rand von Ω hat verschwindet und für welche alle partiellen Ableitungen beliebig hoher Ordnung existieren und stetig sind.

Betrachten wir die Menge $\Omega =]0, 1[$, so ist zum Beispiel:



Im unteren Beispiel ist φ nicht differenzierbar und im mittleren Beispiel ist φ nicht schon vor dem Rand gleich Null.

Beispiel 18.2. Ein konkretes Beispiel einer Testfunktion bekommt man wie folgt: Wir definieren

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & : x > 0 \\ 0 & : x \leq 0. \end{cases}$$

Diese Funktion ist tatsächlich überall beliebig oft differenzierbar (auch im Nullpunkt, was man per Differenzenquotient nachrechnen kann).

Eine Testfunktion bekommt man dann mit

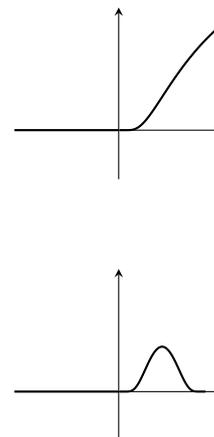
$$\varphi(x) = \psi(x)\psi(1-x) = \begin{cases} e^{-1/(x(1-x))} & : 0 < x < 1 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Funktion ist eine Testfunktion in $\Omega = \mathbb{R}$, also in $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ und auch in $\mathcal{D}(]a, b[)$, wenn $a < 0$ und $b > 1$.

Hat man erstmal eine Testfunktion, so kann man sich neue machen, z.B. wie folgt:

1. Verschiebung $\varphi(x + x_0)$
2. vertikale Skalierung $a\varphi(x)$
3. horizontale Skalierung $\varphi(ax)$
4. Linearkombination $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x)$ für $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}$
5. Produkte $\varphi(x)\psi(x)$ mit Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}$ und $\psi \in C^\infty$
6. Produkte der Form $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1)\varphi(x_2) \cdots \varphi(x_n)$ für Beispiele in höheren Dimensionen

Damit können wir nun die Menge der Distributionen schon fast rigoros definieren:



Definition 18.3 (informell). Die Menge der *Distributionen* $\mathcal{D}(\Omega)'$ auf einer Menge Ω ist die Menge aller stetigen linearen *Funktionale* auf $\mathcal{D}(\Omega)$, d.h. die Menge aller stetigen linearen Abbildungen von $\mathcal{D}(\Omega)$ in die reellen (oder komplexen) Zahlen.

Für ein solches Funktional $f \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ schreiben wir auch $\langle f, \varphi \rangle$ für den Wert den f der Testfunktion φ zuweist. Linearität von f bedeutet hier nichts weiter als

$$a_1 \langle f, \varphi_1 \rangle + a_2 \langle f, \varphi_2 \rangle = \langle f, a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 \rangle.$$

Stetigkeit bedeutet anschaulich, dass der Wert $\langle f, \varphi_1 \rangle$ nahe bei dem Wert $\langle f, \varphi_2 \rangle$ ist, wenn φ_1 nahe bei φ_2 ist (und wir müssen noch genauer klären, was das bedeuten soll).

Hier die ersten Beispiele für Distributionen:

Beispiel 18.4. (a) Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ induziert eine Distribution, nämlich über

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx$$

(jedenfalls dann, wenn das Integral für alle Testfunktionen erklärt ist). Dabei kann f selbst z.B. unstetig sein (solange das Integral erklärt ist), und kann auch in einzelnen Punkten gar nicht erklärt sein (was ja für das Integral keine Rolle spielt). So ist zum Beispiel das Integral $\int_{|\vec{x}| \leq R} |\vec{x}|^{-s} d\vec{x}$ für $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ erklärt wenn $s < n$ gilt (und existiert allerdings nicht, wenn $s \geq n$). Daher induziert die Funktion $\vec{x} \mapsto |\vec{x}|^{-s}$ für $s < n$ eine Distribution f über

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} |\vec{x}|^{-s} \varphi(\vec{x}) d\vec{x}.$$

(b) Die *Dirac-Distribution* (auch δ -Distribution) $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(\vec{0}).$$

Linearität sieht man einfach:

$$a_1 \langle \delta, \varphi_1 \rangle + a_2 \langle \delta, \varphi_2 \rangle = \langle \delta, a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 \rangle.$$

(c) Eine weitere auf den ersten Blick ungewöhnliche Distribution ist δ' (wobei wir uns hier auf $n = 1$ beschränken, also $\delta' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$), definiert durch

$$\langle \delta, \varphi \rangle = -\varphi'(0).$$

Die letzten beiden Beispiele schauen wir uns genauer an. Diese Distributionen werden beide von keiner Funktion induziert, aber wir können sie mit Funktionen approximieren. Dazu betrachten wir Funktionenfolgen (f_k) deren Folgenglieder folgende Eigenschaften haben:

Um dies einzusehen, benutzt man folgende Identität:

$$\int_{|\vec{x}| < R} f(|\vec{x}|) d\vec{x} = C_n \int_0^R f(r) r^{n-1} dr$$

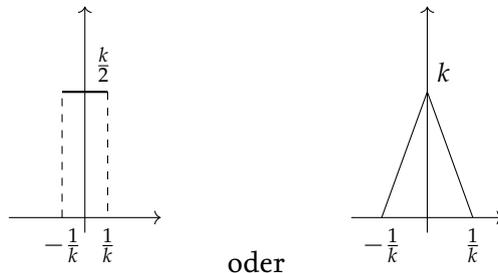
mit einer Konstante C_n (welche der Oberfläche der n -dimensionalen Einheitssphäre entspricht). Damit ist nämlich

$$\int_{|\vec{x}| < R} |\vec{x}|^{-s} d\vec{x} = C_n \int_0^R r^{-s} r^{n-1} dr$$

und das letzte Integral ist genau dann endlich, wenn $-s + n - 1 > -1$ ist, also genau für $n > s$.

1. $f_k(x) = 0$ für $|x| \geq \frac{1}{k}$
2. $\int_{-1/k}^{1/k} f_k(x) dx = 1.$

Das könnte z.B, so aussehen:

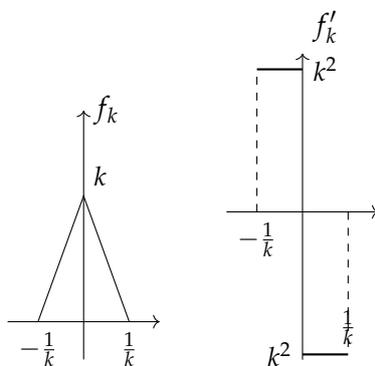


Dann ist das Integral

$$\langle f_k, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi(x) dx$$

in beiden Fällen ein Mittelwert von φ in der Nähe von Null, d.h., wenn φ im Intervall $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ nicht viel variiert, so ist der Wert des Integrals ungefähr $\varphi(0)$. In diesem Sinne, können wir uns δ als „ $\lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ “ vorstellen.

Leiten wir die rechte Funktion f_k ab (jedenfalls überall da, wo es geht) bekommen wir:



In diesem Fall ist das Integral $\int_{\mathbb{R}} f'_k(x) \varphi(x) dx$ etwas schwieriger zu interpretieren: Das Integral entspricht ungefähr der Differenz des k -fachen des Mittelwertes von φ in der Nähe von $-\frac{1}{2k}$ und des k -fachen des Mittelwertes von φ in der Nähe von $\frac{1}{2k}$, also

$$\langle f'_k, \varphi \rangle \approx \frac{\varphi(-\frac{1}{2k}) - \varphi(\frac{1}{2k})}{\frac{1}{k}}.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite konvergiert für $k \rightarrow \infty$ gegen $-\varphi'(0)$.

Das gleiche bekommen wir übrigens auch durch formale partielle Integration

Allerdings ist der punktweise Grenzwert

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq 0 \\ \infty & : x = 0, \end{cases}$$

was gar keine sinnvolle Funktion ergibt - das zeigt, dass die punktweise Denkweise hier nicht sinnvoll ist.

Bei der partiellen Integration tauchen keine Randterme auf, das φ ja außerhalb eines endlichen Intervalls Null ist.

$$\int_{\mathbb{R}} f'_k(x) \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}} f_k(x) \varphi'(x) dx = - \langle f_k, \varphi' \rangle \rightarrow -\varphi'(0).$$

In diesem Sinne können wir die Definition von δ' erklären, denn $f_k \rightarrow \delta$ und $f'_k \rightarrow \delta'$.

Zum Abschluss dieser Einführung noch ein Beispiel mit dem motiviert werden soll, warum Distributionen nützlich sind.

Beispiel 18.5 (Lösungen von partiellen Differentialgleichungen). Die Wellenausbreitung in einer Dimension (z.B. einen unendlichen gespannten Saite) wird durch die *Wellengleichung*

$$\partial_t^2 u(x, t) = k^2 \partial_x^2 u(x, t)$$

($k \in \mathbb{R}$) modelliert. Ist f zweimal differenzierbar, so ist jede Funktion $u(x, t) = f(x - kt)$ eine Lösung. Ist also zum Zeitpunkt $t = 0$ der Wert $u(x, 0) = f(x)$, so ist die Lösung zum Zeitpunkt t einfach $u(x, t) = f(x - kt)$, d.h. der Anfangswert f wird einfach um kt nach rechts verschoben (Verschiebung nach links ist auch eine mögliche Lösung). Bemerkenswert ist hier, dass die Formel für eine Lösung $u(x, t) = f(x - kt)$ überhaupt keine Annahmen an Differenzierbarkeit oder Stetigkeit von f benötigt. Sie ergibt sogar für unstetige Funktionen f Sinn. Da wir solche Lösungen nicht aus rein physikalischen Gründen ausschließen wollen, könnte man versuchen, Funktionen zu suchen, die die Differentialgleichung nur „fast überall“ erfüllen, also z.B. einige Punkte ausnehmen, in denen wir auf die Erfüllung der Differentialgleichung verzichten. Dass das leider nicht gut funktioniert zeigt ein anderes Beispiel:

Wir betrachten die Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$. Mit länglichen aber elementaren Rechnungen zeigt man, dass die Funktionen $u(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ und $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$ diese Gleichung (in zwei bzw. drei Raumdimensionen) lösen mit dem Ursprung als einzigem Ausnahmepunkt. Physikalisch ergeben diese Lösungen aber keinen Sinn, da Potentiale außerhalb von Ladungen stetig (sogar glatt) sein müssen, diese Funktionen aber Singularitäten haben.

Mit Distributionentheorie können wir beide Phänomene sauber erklären. Für die Funktion $u(x, t) = f(x - kt)$ kann man zeigen, dass sie die Wellengleichung „im distributionellen Sinne“ erfüllt. Für die Funktion $u(x_1, x_2) = \ln(x_1^2 + x_2^2)$ kann man zeigen, dass

$$\Delta u = c\delta$$

mit der Dirac-Distribution δ gilt (analog für $u(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1/2}$). Diese Beobachtungen sind nicht nur interessant, sondern auch extrem nützlich, wenn man die Poisson-Gleichung $\Delta u = f$ lösen will.

Man berechnet einfach beide Seiten der Gleichung: $\partial_t u(x, t) = -kf'(x - kt)$, also $\partial_t^2 u(x, t) = k^2 f''(x - kt)$ und $\partial_x u(x, t) = f'(x - kt)$ also $\partial_x^2 u(x, t) = f''(x - kt)$, was die Behauptung zeigt.

19 Rechnen mit Distributionen

Führen wir ein wenig mehr Notation ein:

Definition 19.1. Für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sagen wir dass f auf Ω *lokal integrierbar* ist und schreiben $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, wenn das Integral $\int_{\Omega} |f(x)\varphi(x)| dx$ für alle Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ existiert.

Beispiel 19.2. (a) Alle stetigen Funktionen f sind lokal integrierbar.

(b) Auch nicht stetige Funktionen können lokal integrierbar sein, z.B. die *Heaviside-Funktion*

$$H(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ 1 & : x \geq 0, \end{cases}$$

(anders geschrieben: $H(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{sign}(x))$), wobei wir uns nicht darum kümmern, was in dem einen Punkt $x = 0$ los ist).

(c) Die Funktion $f(x) = 1/x$ (ggf. in $x = 0$ mit irgendeinem Wert ergänzt) ist

(a) Auf $\Omega = \mathbb{R}$ weder integrierbar, noch lokal integrierbar.

(b) Auf $\Omega =]0, \infty[$ nicht integrierbar, aber lokal integrierbar.

Lokal integrierbare Funktionen induzieren Distributionen: Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so definiert

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x) dx$$

eine Distribution, die wir ebenfalls mit f bezeichnen. In diesem Sinne gilt $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

Testfunktionen sind insbesondere stetig, und daher gilt $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{D}(\Omega)'$. Wir werden nun gewisse Operationen, die wir mit Testfunktionen machen können, auf natürliche Weise auch für Distributionen erklären. Die Idee ist, dass wir Distributionen mit Testfunktionen approximieren. Dazu benötigen wir noch einen Konvergenzbegriff für Distributionen:

Definition 19.3. Wir sagen, dass eine Folge (f_k) von Distributionen $f_k \in \mathcal{D}(\Omega)'$ (*distributionell*) gegen eine Distribution f *konvergiert*, wenn für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\langle f_k, \varphi \rangle \rightarrow \langle f, \varphi \rangle.$$

Wir schreiben in diesem Fall $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ oder $\mathcal{D} - \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = f$.

Unsere Methode basiert auf folgenden Ergebnis, was wir nicht beweisen:

Satz 19.4. Zu jeder Distribution $f \in \mathcal{D}(\Omega)'$ existiert eine Folge (φ_k) von Testfunktionen, so dass $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} f$.

Eine äquivalente Bedingung: Es gilt $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, wenn das Integral $\int_B |f(x)| dx$ für alle abgeschlossenen Mengen B , die positiven Abstand vom Rand von Ω haben existiert.

Erinnere, dass A linear ist, wenn $A(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2) = a_1A(\varphi_1) + a_2A(\varphi_2)$ für alle Testfunktionen $\varphi_{1/2}$ und Skalare $a_{1/2}$ gilt.

Für diese Definition muss natürlich der Grenzwert unabhängig von φ_k sein, was er aber in allen Fällen sein wird.

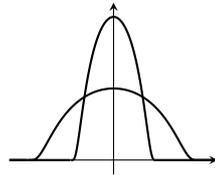
Haben wir nun irgendeine lineare Abbildung A , welche eine Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine Testfunktion $A\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ zuordnet, so können wir A wie folgt auch für Distributionen f definieren:

Gilt $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} f$, so definieren wir $Af = \mathcal{D} - \lim_{k \rightarrow \infty} A\varphi_k$.

Beispiel 19.5. (a) Verschiebung: Es sei A die Abbildung, die eine Testfunktion um \vec{y} verschiebt, also $A\varphi = \tau_{\vec{y}}\varphi$ definiert durch $\tau_{\vec{y}}\varphi(\vec{x}) := \varphi(\vec{x} + \vec{y})$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wie definieren wir $\tau_{\vec{y}}f$ für eine Distribution $f \in \mathcal{D}(\Omega)'$? Dazu müssen wir sagen, was $\langle \tau_{\vec{y}}f, \varphi \rangle$ für jedes φ ergibt. Wir approximieren f durch φ_k , also $\mathcal{D} - \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = f$. Dann muss also

$$\langle \tau_{\vec{y}}f, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \int \tau_{\vec{y}}\varphi_k(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x}$$

sein. Schauen wir uns das einmal für die Dirac-Distribution $f = \delta$ an: Diese approximieren wir mit Funktionen φ_k dieser Form:



Das heißt, die Funktionen $\varphi_k(\vec{x} + \vec{y})$ sind um $\vec{x} = -\vec{y}$ konzentriert und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(\vec{x} + \vec{y})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = \varphi(-\vec{y}).$$

Es gilt also

$$\langle \tau_{\vec{y}}\delta, \varphi \rangle = \varphi(-\vec{y})$$

und man nennt diese Distribution auch „Dirac Distribution in $-\vec{y}$ “ und schreibt $\delta_{-\vec{y}}$. Wir könnten das gleiche auch über eine Substitution $\vec{x} + \vec{y} = \vec{z}$ im Integral einsehen:

$$\begin{aligned} \langle \tau_{\vec{y}}f, \varphi \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(\vec{x} + \vec{y})\varphi(\vec{x})d\vec{x} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(\vec{z})\varphi(\vec{z} - \vec{y})d\vec{z} \\ &= \langle f, \varphi(\cdot - \vec{y}) \rangle = \langle f, \tau_{-\vec{y}}\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Salopp gesagt: Um eine Distribution um \vec{y} zu verschieben, verschiebe man die Testfunktion um $-\vec{y}$.

(b) **Ableitungen:** Es sei nun $n = 1$ und $A = \frac{d}{dx}$ (der Einfachheit halber - partielle Ableitungen würden auch gehen). Mit Hilfe der Verschiebung aus dem vorigen Punkt ist

$$\frac{d}{dx}f = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tau_y f - f}{y}.$$

Wir wissen $\langle \tau_y f, \varphi \rangle = \langle f, \tau_{-y} \varphi \rangle$ und es folgt

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} f, \varphi \right\rangle &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \langle \tau_y f - f, \varphi \rangle \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} [\langle \tau_y f, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle] \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y} \langle f, \tau_{-y} \varphi - \varphi \rangle \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \left\langle f, \frac{\varphi - \tau_{-y} \varphi}{y} \right\rangle \\ &= \left\langle f, -\frac{d}{dx} \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

denn es gilt $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)}{y} = -\frac{d}{dx} \varphi(x)$.

Auch diese Herleitung können wir direkt mit Integralen machen: Gilt $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} f$, so gilt $\frac{d}{dx} \varphi_k \rightarrow \frac{d}{dx} f$, also mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} f, \varphi \right\rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \frac{d}{dx} \varphi_k, \varphi \right\rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int \left(\frac{d}{dx} \varphi_k(x) \right) \varphi(x) dx \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int \varphi_k(x) \left(\frac{d}{dx} \varphi(x) \right) dx \\ &= - \left\langle f, \frac{d}{dx} \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Auch hier haben wir gezeigt

$$\left\langle \frac{d}{dx} f, \varphi \right\rangle = \left\langle f, -\frac{d}{dx} \varphi \right\rangle.$$

Ganz analog definiert man partielle Ableitungen: Für $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und $k \in \{1, \dots, n\}$ definiert man

$$\langle \partial_{x_k} f, \varphi \rangle := -\langle f, \partial_{x_k} \varphi \rangle$$

und entsprechend für höhere Ableitungen

$$\langle \partial_{x_k}^m f, \varphi \rangle := (-1)^m \langle f, \partial_{x_k}^m \varphi \rangle.$$

Hinter dem Vorgehen im Beispiel steckt ein allgemeines Prinzip, nämlich dass der „adjungierten Identitäten.“ Diese sehen so aus:

$$\int A\psi(x)\varphi(x)dx = \int \psi(x)S\varphi(x)dx$$

wobei A eine lineare Abbildung ist, die wir untersuchen wollen und S eine lineare Abbildung ist, die die Gleichung für alle $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ richtig macht. Haben wir zu einem A ein solches S gefunden, so können wir Af für eine Distribution f über $\langle Af, \varphi \rangle := \langle f, S\varphi \rangle$ definieren, denn es gilt

$$\langle Af, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle A\varphi_k, \varphi \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \varphi_k, S\varphi \rangle = \langle f, S\varphi \rangle.$$

Um dies als Definition für Af zu benutzen, müssen wir zu einem gegebenen A ein S finden, welches die adjungierte Identität erfüllt und insbesondere muss S erfüllen, dass zu $\varphi \in \mathcal{D}$ immer auch $S\varphi \in \mathcal{D}$ gilt.

Im Beispiel der Verschiebung hatten wir gezeigt

$$\int \tau_{\vec{y}}\psi(\vec{x})\varphi(\vec{x})d\vec{x} = \int \psi(\vec{x})\tau_{-\vec{y}}\varphi(\vec{x})d\vec{x}$$

und für die Ableitung gilt

$$\int \left(\frac{d}{dx}\psi(x)\right)\varphi(x)dx = -\int \psi(x)\left(\frac{d}{dx}\varphi(x)\right)dx.$$

Beispiel 19.6 (Multiplikation mit glatten Funktionen). Wir suchen eine adjungierte Identität für die Multiplikation mit einer Funktion, also für die Abbildung $A\varphi(\vec{x}) = m(\vec{x})\varphi(\vec{x})$. Das ist im Prinzip einfach, denn es gilt

$$\int (m(\vec{x})\psi(\vec{x}))\varphi(\vec{x})d\vec{x} = \int \psi(\vec{x})(m(\vec{x})\varphi(\vec{x}))d\vec{x}$$

Hierbei müssen wir allerdings berücksichtigen, dass wir $m(\vec{x})\varphi(\vec{x}) \in \mathcal{D}$ benötigen! Insbesondere muss das Produkt $m(x)\varphi(x)$ immer unendlich oft differenzierbar sein, d.h. wir brauchen $m \in C^\infty$ (über die Menge, auf der m nicht Null ist, müssen wir keine Annahmen machen). Wir haben also

$$\langle m \cdot f, \varphi \rangle = \langle f, m \cdot \varphi \rangle.$$

Das Produkt einer Distribution mit einer Funktion ist nicht immer offensichtlich: Was ist zum Beispiel $m \cdot \delta'$? Wir nutzen unsere Definitionen über die adjungierten Identitäten:

$$\begin{aligned} \langle m \cdot \left(\frac{d}{dx}\delta\right), \varphi \rangle &= \left\langle \frac{d}{dx}\delta, m \cdot \varphi \right\rangle \\ &= -\langle \delta, \frac{d}{dx}(m \cdot \varphi) \rangle \\ &= -\langle \delta, \left(\frac{d}{dx}m\right)\varphi \rangle - \langle \delta, m\left(\frac{d}{dx}\varphi\right) \rangle \\ &= -\frac{d}{dx}m(0)\varphi(0) - m(0)\frac{d}{dx}\varphi(0) \\ &= \left\langle -\left(\frac{d}{dx}m\right)(0)\delta + m(0)\frac{d}{dx}\delta, \varphi \right\rangle, \end{aligned}$$

also

$$m \cdot \left(\frac{d}{dx}\delta\right) = -\left(\frac{d}{dx}m\right)(0)\delta + m(0)\frac{d}{dx}\delta.$$

Diese Erweiterung von Ableitungen für Distributionen ermöglicht es uns, auch Ableitungen für beliebige Funktionen $f \in L_{\text{loc}}^1$ zu erklären! Ist $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$, so definieren wir die *distributionelle Ableitung* von f als $\frac{d}{dx}f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ durch

$$\left\langle \frac{d}{dx}f, \varphi \right\rangle = -\langle f, \frac{d}{dx}\varphi \rangle$$

Mit „nicht glatten“ Funktionen kann man Distributionen im Allgemeinen nicht multiplizieren. Ist m z.B. in $x = 0$ unstetig (also z.B. $m(x) = \text{sign}(x)$), gibt es keinen sinnvollen Weg, $m \cdot \delta$ zu definieren, denn was sollte $\langle m \cdot \delta, \varphi \rangle$ in diesem Fall sein? Es müsste $\varphi(0)m(0)$ sein, jedoch können wir $m(0)$ aufgrund der Unstetigkeit nicht konsistent definieren. Für stetige φ ist $\langle \delta, \varphi \rangle$ hingegen sinnvoll.

und wir können sogar beliebig oft distributionell ableiten:

$$\langle \frac{d^k}{dx^k} f, \varphi \rangle = (-1)^k \langle f, \frac{d^k}{dx^k} \varphi \rangle.$$

Beachte aber, dass die Ableitung einer lokal integrierbaren Funktion im Allgemeinen keine Funktion mehr sein muss, sondern eine Distribution sein kann.

Beispiel 19.7 (Distributionelle Ableitungen der Betragsfunktion). Wir betrachten die Funktion $f(x) = |x|$. Diese ist stetig und daher gilt $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. Sie ist aber nicht differenzierbar (jedenfalls nicht in $x = 0$). Berechnen wir die erste distributionelle Ableitung:

$$\begin{aligned} \langle \frac{d}{dx} f, \varphi \rangle &= -\langle f, \frac{d}{dx} \varphi \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\ &= -\int_{-\infty}^0 (-x) \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Hier benutzen wir nun partielle Integration, müssen aber berücksichtigen, dass $\varphi(0) \neq 0$ möglich ist, und wir daher jeweils einen Randterm in jedem Integral bekommen. Allerdings trifft dieser jeweils auf einen Faktor $x = 0$, so dass er doch verschwindet:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 x \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} x \cdot \frac{d}{dx} \varphi(x) dx &= -\int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Insgesamt bekommen wir also

$$\langle \frac{d}{dx} f, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x) \varphi(x) dx = \langle \text{sign}, \varphi \rangle,$$

d.h. die distributionelle Ableitung der Betragsfunktion $|x|$ ist die Vorzeichenfunktion $\text{sign}(x)$.

Leiten wir noch ein weiteres Mal ab!

$$\begin{aligned} \langle \frac{d^2}{dx^2} f, \varphi \rangle &= \langle \frac{d}{dx} \text{sign}, \varphi \rangle \\ &= -\langle \text{sign}, \frac{d}{dx} \varphi \rangle \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x) \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{d}{dx} \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} \frac{d}{dx} \varphi(x) dx \\ &= \varphi(0) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) + \varphi(0) \\ &= 2\varphi(0) = 2\langle \delta, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

Beachte, dass es dabei völlig egal ist, wie wir den Wert $\text{sign}(0)$ definieren. Egal was wir machen, unsere Herleitung geht immer. D.h. die Funktion, die hier die distributionelle Ableitung ist, ist nicht überall festgelegt. Das sollte man als Feature und nicht als Bug sehen: Irrelevant kleine Mengen werden „distributionell ignoriert“. Dabei ist eine Menge $M \subset \Omega$ irrelevant klein, wenn die für jede Funktion $\int_M |f(x)| dx = 0$ gilt.

wobei wir den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Eigenschaft, dass φ als Testfunktion für $x \rightarrow \pm\infty$ verschwindet benutzt haben.

Die zweite distributionelle Ableitung des Betrages ist also keine Funktion mehr, sondern eine Distribution, nämlich

$$\frac{d^2}{dx^2} f = 2\delta.$$

20 Distributionelle Lösung von partiellen Differentialgleichungen

Halten wir noch einmal fest, was wir im vorigen Abschnitt definiert haben:des

Verschiebung einer Distribution: Ist $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, so ist die Verschiebung von f definiert durch

$$\langle \tau_{\vec{y}} f, \varphi \rangle := \langle f, \tau_{-\vec{y}} \varphi \rangle.$$

Ableitung einer Distribution: Ist $f \in \mathcal{D}(\Omega)'$, so ist die partielle Ableitung von f definiert durch

$$\langle \partial_{x_k} f, \varphi \rangle := -\langle f, \partial_{x_k} \varphi \rangle.$$

Multiplikation einer Distribution mit einer glatten Funktion: Ist $f \in \mathcal{D}(\Omega)'$ und $m \in C^\infty(\Omega)$, so ist die Multiplikation von f und m definiert durch

$$\langle m \cdot f, \varphi \rangle := \langle f, m \cdot \varphi \rangle.$$

Hier noch eine weitere Operation:

Horizontale Skalierung einer Distribution: Ist $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$ und $a > 0$, so definiere für Testfunktionen $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ die (horizontale) Skalierung

$$s_a \varphi(x) = \varphi(ax).$$

Dann ist die (horizontale) Skalierung der Distribution f definiert durch

$$\langle s_a f, \varphi \rangle = a^{-n} \langle f, s_{1/a} \varphi \rangle.$$

Diese Definition von Ableitungen ist konsistent mit der ursprünglichen Definition: Ist f eine differenzierbare Funktion, welche wir als Distribution interpretieren, so stimmen die „distributionelle Ableitung“ von f und die „klassische Ableitung“ von f überein.

Kommen wir nun zu partiellen Differentialgleichungen und beginnen mit der Wellengleichung

$$\partial_t^2 u(x, t) = k^2 \partial_x^2 u(x, t).$$

Beide Seiten sind auch für Distributionen u sinnvoll und wenn sie für eine Distribution u übereinstimmen, so nennen wir u eine *distributionelle Lösung* der Gleichung. Ist u eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die die Gleichung erfüllt, nennen wir u eine *klassische Lösung*. Ist u eine Funktion, welche nicht zweimal

Dies liegt an der mehrdimensionalen Substitutionsregel (auch genannt Transformationsformel): Ist f eine Funktion, so gilt mit der Substitution $a\vec{x} = \vec{y}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(a\vec{x}) \varphi(\vec{x}) d\vec{x} = a^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{y}) \varphi(a^{-1}\vec{y}) d\vec{y}.$$

stetig differenzierbar ist, so existieren die zweiten Ableitungen von u nach t und x weiterhin im distributionellen Sinn. Erfüllen die distributionellen Ableitungen dann die Wellengleichung, so nennen wir u eine *schwache Lösung*. Aus Sicht der Anwendung gibt es keinen Grund, warum schwache Lösung weniger sinnvoll sein sollten als klassische Lösungen.

Jetzt wollen wir zeigen, dass die wandernde Welle $u(x, t) := f(x - kt)$ auch für $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ eine schwache Lösung der Wellengleichung ist. Nach unseren Vorüberlegungen ist u eine Distribution. Zeigen wir, dass u tatsächlich eine schwache Lösung der Wellengleichung ist, d.h. wir müssen zeigen, dass beide Seiten die gleiche Distribution sind. Um die zu zeigen, müssen wir zeigen, dass beide Seiten beim Testen mit der gleichen Testfunktion φ immer gleiche Werte ergeben. Es gilt

$$\langle \partial_t^2 u, \varphi \rangle = \langle u, \partial_t^2 \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x - kt) \partial_t^2 \varphi(x, t) dx dt$$

und

$$\langle \partial_x^2 u, \varphi \rangle = \langle u, \partial_x^2 \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x - kt) \partial_x^2 \varphi(x, t) dx dt.$$

Zusammen gibt das

$$\langle \partial_t^2 u - k^2 \partial_x^2 u, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x - kt) (\partial_t^2 \varphi(x, t) - k^2 \partial_x^2 \varphi(x, t)) dx dt.$$

Wir wollen, dass die rechte Seite immer Null ergibt. Dazu substituieren wir

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - kt \\ x + kt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

Die Transformationsformel für Integrale gibt

$$dy dz = \det \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & k \end{pmatrix} dx dt = 2k dx dt,$$

also $dx dt = \frac{1}{2k} dy dz$. Außerdem ist $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$ und $t = -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z$ und daher $h(y, z) := \varphi(x, t) = \varphi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z)$. Jetzt leiten wir h nach der Kettenregel nach y ab:

$$\partial_y h(y, z) = \frac{1}{2} \partial_x \varphi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z) - \frac{1}{2k} \partial_t \varphi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z).$$

Diesen Ausdruck leiten wir jetzt noch einmal (wieder mit der Kettenregel) nach z ab und bekommen

$$\begin{aligned} \partial_z \partial_y h(y, z) &= \frac{1}{4} \partial_x^2 \varphi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z) + \frac{1}{4k} \partial_t \partial_x \varphi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z) \\ &\quad - \frac{1}{4k} \partial_x \partial_t \varphi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z) - \frac{1}{4k^2} \partial_t^2 \varphi(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -\frac{1}{2k}y + \frac{1}{2k}z) \\ &= -\frac{1}{4k^2} (\partial_t^2 \varphi(x, t) - k^2 \partial_x^2 \varphi(x, t)). \end{aligned}$$

Wir bekommen also

$$\begin{aligned}\langle \partial_x^2 u - k^2 \partial_x^2 u, \varphi \rangle &= \iint_{\mathbb{R}^2} f(x-kt) (\partial_x^2 \varphi(x,t) - k^2 \partial_x^2 \varphi(x,t)) \, dx dt \\ &= -2k \iint_{\mathbb{R}^2} f(y) \partial_z \partial_y h(y,z) \, dy dz \\ &= -2k \int f(y) \int \partial_z \partial_y h(y,z) \, dz dy.\end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite ist tatsächlich immer Null: Sogar das innere Integral über z ist schon Null, denn es gilt für alle $a < b$

$$\int_a^b \partial_z \partial_y h(y,z) \, dz = \partial_y \varphi(y,b) - \partial_y \varphi(y,a)$$

und da φ für große Argumente Null wird (es ist ja eine Testfunktion), folgt, dass das Integral Null ist wenn a klein genug und b groß genug sind. Daher ist $u(x,t) = f(x-kt)$ tatsächlich eine distributionelle Lösung der Wellengleichung, auch wenn f nur lokal integrierbar ist. Wir brauchen keinerlei Differenzierbarkeit von f dafür!

Kommen wir nun zum Problem der Laplace-Gleichung: Für eine Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir $\Delta u(x) = f(x)$ für gegebenes $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Wir untersuchen die Funktion $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ auf $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Mit ein kurzen Rechnung kann man sich davon überzeugen, dass für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt $\Delta u(x,y) = 0$. Da in Ω nur ein einzelner Punkt herausgenommen ist, kann man sich fragen, ob $\Delta u = 0$ im distributionellen Sinn auf ganz \mathbb{R}^2 gilt, also ob $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ eine schwache Lösung von $\Delta u = 0$ in $\Omega = \mathbb{R}^2$ ist. Dazu müssten wir zeigen, dass für jede Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = 0.$$

Es gilt nach der Definition der distributionellen Ableitung

$$\begin{aligned}\langle \Delta u, \varphi \rangle &= \langle \partial_x^2 u + \partial_y^2 u, \varphi \rangle = \langle \partial_x^2 u, \varphi \rangle + \langle \partial_y^2 u, \varphi \rangle \\ &= \langle u, \partial_x^2 \varphi \rangle + \langle u, \partial_y^2 \varphi \rangle = \langle u, \Delta \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist das Integral

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \ln(x^2 + y^2) \left[\partial_x^2 \varphi(x,y) + \partial_y^2 \varphi(x,y) \right] \, dx dy.$$

Dieses Integral berechnen wir in Polarkoordinaten, d.h. wir substituieren $(x,y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Dann haben wir aus der Analysis „ $dx dy = r dr d\theta$.“ Außerdem stellt man den Laplace-Operator in diesen Koordinaten wie folgt dar:

$$\partial_x^2 + \partial_y^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2.$$

Es gilt $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2) = \ln(r^2)$ und wir fragen uns also ob gilt

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \ln(r^2) \left[\partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \right] \varphi(r, \theta) r dr d\theta = 0.$$

Der Integrand hat in $(x, y) = (0, 0)$ eine Singularität. Hierfür gehen wir wie üblich vor: Wir integrieren bezüglich r nur von ϵ bis ∞ und lassen dann $\epsilon \rightarrow 0$. Vorher nutzen wir partielle Integration um die Ableitungen von φ auf $u(x, y) = \ln(r^2)$ zu übertragen.

Wir betrachten die drei Summanden im Integral getrennt und beginnen mit $\ln(r^2) \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \varphi(r, \theta)$. Für diesem Summanden tauschen wir die Reihenfolge der Integration und betrachten nur das Integral bezüglich θ . Nach dem Hauptsatz der Integralrechnung gilt

$$\int_0^{2\pi} \ln(r^2) \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \varphi(r, \theta) r d\theta = \left[\frac{1}{r} \ln(r^2) \partial_\theta \varphi(r, \theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0, \quad (*)$$

da φ (und also auch $\partial_\theta \varphi$) in θ 2π -periodisch ist. Dieser Teil des Integrals verschwindet also.

Als nächstes betrachten wir den Summanden $\ln(r^2) \frac{1}{r} \partial_r \varphi(r, \theta) r = \ln(r^2) \partial_r \varphi(r, \theta)$: Wir betrachten vorerst nur das Integral bezüglich r , integrieren partiell und berücksichtigen dabei, dass φ und $\partial_\theta \varphi$ als Testfunktion für $r \rightarrow \infty$ verschwindet, bei $r = 0$ jedoch nicht Null sein muss:

$$\int_\epsilon^\infty \ln(r^2) \partial_r \varphi(r, \theta) dr = - \int_\epsilon^\infty \partial_r (\ln(r^2)) \varphi(r, \theta) dr - \ln(\epsilon^2) \varphi(\epsilon, \theta). \quad (**)$$

Als nächstes kommt der Summand $\ln(r^2) \partial_r^2 \varphi(r, \theta)$: Wir integrieren zweimal partiell

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^\infty r \ln(r^2) \partial_r^2 \varphi(r, \theta) dr &= - \int_\epsilon^\infty [\partial_r (r \ln(r^2))] \partial_r \varphi(r, \theta) dr - \epsilon \ln(\epsilon^2) \partial_r \varphi(\epsilon, \theta) \\ &= \int_\epsilon^\infty \partial_r^2 (r \ln(r^2)) \varphi(r, \theta) dr + [\partial_r (r \ln(r^2)) \varphi(r, \theta)]_{r=\epsilon} - \epsilon \ln(\epsilon^2) \partial_r \varphi(\epsilon, \theta). \end{aligned} \quad (***)$$

Wir rechnen noch aus

$$\partial_r (r \ln(r^2)) = \ln(r^2) + 2, \quad \partial_r^2 (r \ln(r^2)) = \frac{2}{r}, \quad \partial_r \ln(r^2) = \frac{2}{r}.$$

Wir setzen diese Ableitungen in $(*)$, $(**)$ und $(***)$ ein und bekom-

men

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} \ln(r^2) \left(r \partial_r^2 + \partial_r + \frac{1}{r} \partial_\theta^2 \right) \varphi(r, \theta) r dr d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} \left(-\frac{2}{r} + \frac{2}{r} \right) \varphi(r, \theta) dr d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \left(-\ln(\epsilon^2) + \ln(\epsilon^2) + 2 \right) \varphi(\epsilon, \theta) d\theta \\ &+ \int_0^{2\pi} \left(-\epsilon \ln(\epsilon^2) \right) \partial_r \varphi(\epsilon, \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist gleich Null und wir bekommen mit Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} 2 \int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon, \theta) d\theta - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \epsilon \ln(\epsilon^2) \partial_r \varphi(r, \theta) d\theta.$$

Da φ als Testfunktion stetig ist, gilt

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \varphi(\epsilon, \theta) d\theta = 2\pi \varphi(0).$$

Da $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \ln(\epsilon^2) = 0$ gilt und $\partial_r \varphi(\epsilon, \theta)$ für $\epsilon \rightarrow 0$ beschränkt bleibt, ist der zweite Grenzwert Null und wir bekommen

$$\langle \Delta u, \varphi \rangle = 4\pi \varphi(0).$$

Die rechte Seite ist aber genau $4\pi \langle \delta, \varphi \rangle$ und das heißt, es gilt $\langle \Delta u, \varphi \rangle = \langle 4\pi \delta, \varphi \rangle$ für alle Testfunktionen. Das heißt aber nichts anderes als

$$\Delta u = 4\pi \delta.$$

Das heißt, obwohl die Funktion $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ fast überall $\Delta u = 0$ erfüllt (mit nur einem Ausnahmepunkt) löst sie in Wirklichkeit die Poisson-Gleichung $-\Delta u = f$ mit der Distribution $-4\pi \delta$ als rechter Seite f .

21 Laplace-Transformation von Distributionen

In Abschnitt 6 hatten wir gesehen, wie wir lineare Anfangswertprobleme der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f, \quad y(0) = c_1, y'(0) = c_2, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_n$$

mit Hilfe der Laplace-Transformation lösen können: Es ergibt sich nach Laplace-Transformation $Y(s) = (F(s) + A(s))/P(s)$, dabei ist F die Laplace-Transformierte von f , P ein Polynom, was von den a_k abhängt und A ein Polynom, was von den c_k abhängt. Mit Hilfe der Distributionentheorie können wir diese Technik jetzt auch auf Anfangswertprobleme anwenden, bei denen eine Distribution auf der rechten Seite steht. Die Lösung des Anfangswertproblems

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = \delta, \quad y(0) = 0, \dots, y^{(n-1)}(0) = 0$$

nennt man auch *Impulsantwort* der Gleichung (ein Begriff der bei der Untersuchung von LTI-Systemen (also von *linear time invariant systems*) eine wichtige Rolle spielt).

Wir würden gerne die Laplace-Transformation für Distributionen definieren. Auf den ersten Blick scheint das einfach: Für Funktionen $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ haben wir

$$\mathcal{L}\{f\}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

was in Distributionsschreibweise $\langle f, e^{-s\cdot} \rangle$ entspricht. Das Problem ist jedoch, dass die Funktion $t \mapsto e^{-st}$ keine Testfunktion ist, da sie überall nicht Null ist. Es gibt verschiedene Wege, dieses Problem zu lösen. Wir beschreiben hier einen solchen:

Definition 21.1. Es sei $A \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$. Wir sagen, dass f auf A verschwindet, wenn $\langle f, \varphi \rangle = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(A)$.

Der Träger $\text{supp } f$ (für Support) einer Distribution f ist die größte abgeschlossene Menge auf der f nicht verschwindet, genauer gilt $x_0 \in \text{supp } f$, wenn es zu jeder Umgebung U von x_0 ein $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ gibt, so dass $\langle f, \varphi \rangle \neq 0$ gilt.

Beispiel 21.2. (a) Die Dirac-Distribution verschwindet auf jeder Menge A mit $0 \notin A$. Ist nämlich $\varphi \in \mathcal{D}(A)$ und $0 \notin A$, so muss $\varphi(0) = 0$ und daher ist $\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) = 0$. Der Träger δ ist $\text{supp } \delta = \{0\}$.

(b) Ist $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, so ist der Träger von f der Abschluss der Menge, auf der f nicht Null ist. Für die Heaviside-Funktion H gilt zum Beispiel $\text{supp } H = [0, \infty[$.

Definition 21.3 (Laplace-Transformation von Distributionen). Es sei $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ eine Distribution mit $\text{supp } u \subset [0, T]$ für ein $T > 0$. Dann ist die *Laplace-Transformation* von u wie folgt definiert: Es

sei $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(x) = 1$ für alle x aus einer Umgebung von $[0, T]$. Dann ist

$$\mathcal{L}\{u\}(s) = \langle u, \psi(t)e^{-st} \rangle.$$

Dabei hängt das Ergebnis nicht von der Wahl der „Abschneidefunktion“ ψ ab.

Beispiel 21.4 (Laplace-Transformation der Dirac-Distribution). Da δ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ verschwindet ist die Laplace-Transformation von δ definiert und es gilt mit einer Abschneidefunktion $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\psi(x) \equiv 1$ für x in einer Umgebung von 0

$$\mathcal{L}\{\delta\}(s) = \langle \delta, \psi(t)e^{-st} \rangle = \psi(0)e^{-s \cdot 0} = 1.$$

Es gilt also

$$\mathcal{L}\{\delta\}(s) \equiv 1.$$

Für verschobene Dirac-Distributionen δ_a ($a > 0$) definiert durch $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ gilt entsprechend

$$\mathcal{L}\{\delta_a\}(s) = e^{-sa}.$$

Es gibt auch eine allgemeine Verschiebungsregel für die Laplace-Transformation:

Satz 21.5. Ist $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ und ist $g(t) = H(t - a)f(t - a)$ die um a nach rechts verschobene Funktion, so gilt für die Laplace-Transformierten

$$G(s) = e^{-as}F(s).$$

Beweis.

Es gilt

$$\begin{aligned} G(s) &= \int_0^\infty e^{-st} H(t - a) f(t - a) dt = \int_a^\infty e^{-st} f(t - a) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} f(\tau) d\tau = e^{-sa} F(s). \end{aligned}$$

□

Beispiel 21.6. (a) Wir berechnen die Impulsantwort von $y'' + 4y$, also die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' + 4y = \delta, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Laplace-Transformation beider Seiten liefert

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y'' + 4y\}(s) &= s^2 Y(s) + 4Y(s) = (s^2 + 4)Y(s) \\ \mathcal{L}\{\delta\}(s) &= 1. \end{aligned}$$

Die Idee hinter dieser Definition ist wie folgt: Da u außerhalb von $[0, T]$ verschwindet, spielen die Werte der Testfunktion außerhalb dieses Intervalls keine Rolle. Da e^{-st} immerhin C^∞ ist, können wir diese Funktion zu einer Testfunktion machen, indem wir sie mit einer Testfunktion malnehmen. Dazu nehmen wir eine, welche die Werte nicht ändert, also eine die auf dem Träger und etwas darüber hinaus konstant 1 ist.

Es folgt

$$Y(s) = \frac{1}{s^2+4}$$

und die Rücktransformation liefert

$$y(t) = \frac{1}{2} \sin(2t).$$

Positionieren wir den Dirac an eine andere Stelle bekommen wir folgendes: Für das Anfangswertproblem

$$y'' + 4y = \delta_a, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

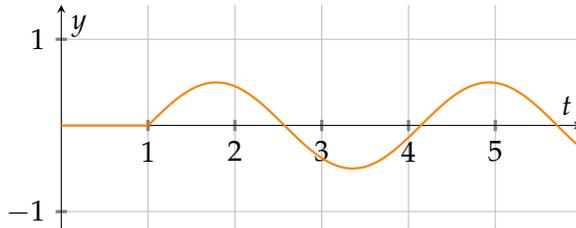
mit Dirac-Distribution an der Stelle $a > 0$ ergibt sich nach Laplace-Transformation

$$Y(s) = \frac{e^{-as}}{s^2+4}$$

für die man (z.B. mit Hilfe der Verschiebungsregel, von Tabellen, oder Software) folgende Rücktransformierte findet:

$$y(t) = H(t-a) \frac{1}{2} \sin(2(t-a)) = \begin{cases} 0 & : 0 \leq t < a \\ \frac{1}{2} \sin(2(t-a)) & : t > a. \end{cases}$$

Hier die Lösung für $a = 1$:



(b) Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$y'' + 4y = \delta'_a, \quad y(0) = y'(0) = 0,$$

wobei die rechte Seite die Ableitung der Dirac-Distribution in einem $a > 0$ ist (es gilt $\langle \delta'_a, \varphi \rangle = -\varphi'(a)$). Es gilt $\text{supp } \delta'_a = \{a\}$ und $\mathcal{L}\{\delta'_a\}(s) = \langle \delta'_a, \psi e^{-s\cdot} \rangle$ (mit geeigneter Abschneidefunktion). Es folgt

$$\langle \delta'_a, \psi e^{-s\cdot} \rangle = -\langle \delta_a, (\psi e^{-s\cdot})' \rangle = -(\psi'(a)e^{-sa} + \psi(a)(-se^{-sa})) = se^{-sa}$$

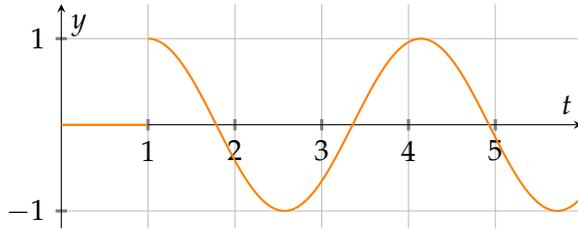
(da $\psi(a) = 1$ und $\psi'(a) = 0$). Es gilt also

$$(s^2 + 4)Y(s) = se^{-sa}$$

und Rücktransformation ergibt mit dem Verschiebungssatz

$$y(t) = H(t-a) \cos(2(t-a)).$$

Hier die Lösung im Fall $a = 1$:



(c) Wir betrachten die Gleichung

$$y''' + y'' + y' + y = \delta,$$

und berechnen die Laplace-Transformierte

$$\begin{aligned} s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0) \\ + s^2 Y(s) - s y(0) - y'(0) \\ + s Y(s) - y(0) \\ + Y(s) = \mathcal{L}\{\delta\}(s) = 1 \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 0$ ergibt sich

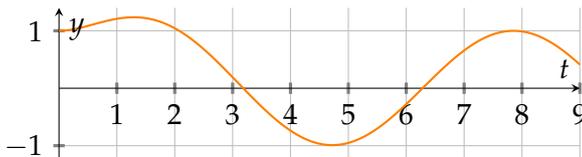
$$(s^3 + s^2 + s + 1)Y(s) - s^2 - s - 1 = 1.$$

Division durch $s^3 + s^2 + s + 1 = (s^2 + 1)(s + 1)$ und Partialbruchzerlegung ergibt

$$Y(s) = \frac{s^2 + s + 2}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s + 1}.$$

Die Rücktransformation liefert die Lösung

$$y(t) = e^{-t} + \sin(t).$$



Ändern wir die Anfangswerte zu $y(0) = y'(0) = 0$ und $y''(0) = 1$, so bekommen wir

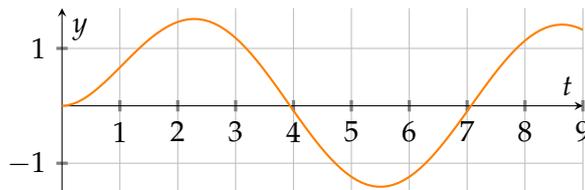
$$(s^3 + s^2 + s + 1)Y(s) - 1 = 1$$

und analog zum vorigen Fall

$$Y(s) = \frac{2}{s^3 + s^2 + s + 1} = \frac{1-s}{s^2 + 1} + \frac{1}{s + 1},$$

also die Lösung

$$y(t) = e^{-t} + \sin(t) - \cos(t).$$



Im Allgemeinen gilt: Ist $P(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$, so ist die Laplace-Transformierte der Lösung des Anfangswertproblems, also die Impulsantwort der Gleichung

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = \delta, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$$

die Funktion

$$Y(s) = \frac{1}{P(s)}.$$

Die Laplace-Transformation ergibt $P(s)Y(s) = \mathcal{L}\{\delta\}(s) = 1$.

Schauen wir noch einmal auf Satz 6.6, so sehen wir, dass dies auch genau die Lösung des Anfangswertproblems

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = 0, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-2)}(0) = 0 \quad y^{(n-1)}(0) = 1$$

ist! Die rechte Seite δ (in 0) wirkt also wie ein „Sprung in der höchsten Ableitung“.

Die Laplace-Transformierte der Impulsantwort hat einen speziellen Namen:

Definition 21.7. Die Funktion $Y(s) = 1/P(s)$ heißt *Transferfunktion* oder auch *Übertragungsfunktion* des Differentialoperators $P\left(\frac{d}{dt}\right)$.

22 Lösung von inhomogenen Anfangswertproblemen mit der Laplace-Transformation

Schauen wir uns nun inhomogene Anfangswertprobleme mit homogenen Anfangswerten an, d.h. Probleme der Form

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (\text{f})$$

Die Lösungen solcher Gleichungen hängen mit der Impulsantwort der Gleichung zusammen:

Satz 22.1. Es sei Y^δ die Transferfunktion des Differentialoperators $P\left(\frac{d}{dt}\right)y$, d.h. y^δ ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = \delta, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (\delta)$$

und Y^δ ist die Laplace-Transformierte von y^δ . Dann hat die Lösung y des Anfangswertproblems

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

die Laplace-Transformierte

$$Y(s) = F(s)Y^\delta(s),$$

wobei $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$.

Beweis.

Für die Lösung y^δ von (δ) gilt nach unseren Vorüberlegungen

$$P(s)Y^\delta(s) = 1$$

und für die Lösung y von (f) gilt

$$P(s)Y(s) = F(s).$$

Es folgt

$$Y(s) = \frac{F(s)}{P(s)} = F(s)Y^\delta(s)$$

wie behauptet. \square

Der Satz erklärt auch den Namen Transferfunktion für Y^δ : Um die Laplace-Transformierte der Lösung zu rechten Seite f zu erhalten, multipliziert man die Laplace-Transformierte von f mit der Transferfunktion.

Um die Lösungen y zu bestimmen, beschäftigen wir uns damit, wie wir Rücktransformierte zu Produkten von Transformierten finden können, also was die Multiplikation mit der Transferfunktion im Zeitbereich zu bedeuten hat. Der zentrale Begriff ist die *Faltung*.

Haben wir noch inhomogene Anfangswerte $y^{(k)}(0) = c_k$, $k = 1, \dots, n-1$, so hat die Lösung des Anfangswertproblems

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f, \quad y^{(k)}(0) = c_k$$

die Laplace-Transformierte

$$Y(s) = \frac{A(s)+F(s)}{P(s)} = (A(s) + F(s))Y^\delta(s),$$

wobei $A(s)$ ein Polynom ist, welches von den Anfangswerten c_k abhängt (vgl. Kapitel 6).

Definition 22.2. Die *Faltung* von zwei Funktionen $f, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$(f * h)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)h(\tau)d\tau.$$

Das Integral existiert (zum Beispiel), wenn $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt$ existiert und h beschränkt ist.

Eine kurze Liste von Eigenschaften der Faltung:

(a) Die Faltung ist symmetrisch, d.h. es gilt $(f * h)(t) = (h * f)(t)$.

Wir substituieren $s = t - \tau$, d.h. $\tau = t - s$ und $d\tau = -ds$:

$$\begin{aligned} (f * h)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)h(\tau)d\tau \\ &= - \int_{\infty}^{-\infty} f(s)h(t - s)ds = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - s)f(s)ds \\ &= (h * f)(t). \end{aligned}$$

(b) Die Faltung ist linear in beiden Argumenten, d.h.

$$((f + g) * h)(t) = (f * h)(t) + (g * h)(t)$$

(und entsprechend im zweiten Argument).

Folgt direkt aus der Linearität des Integrals.

(c) Gilt $\text{supp } f, \text{supp } h \subset [0, \infty[$, d.h. gilt $f(t) = h(t) = 0$ für $t < 0$, so ist

$$(f * h)(t) = \int_0^t f(t - \tau)h(\tau)d\tau.$$

Es gilt $h(\tau) = 0$ für $\tau < 0$ und $f(t - \tau) = 0$ für $t - \tau < 0$, also für $\tau > t$.

Eine Intuition zur Operation der Faltung bekommt man vielleicht mit folgendem Beispiel: Wir betrachten ein beliebiges $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und die Funktion

$$h(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0, \text{ oder } t > 1 \\ 1 & : 0 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Dann ist die Faltung

$$(f * h)(t) = (h * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau)f(\tau)d\tau.$$

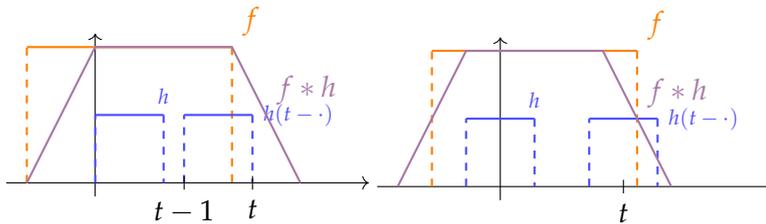
Es gilt

$$h(t - \tau) = \begin{cases} 0 & : \tau < t - 1 \text{ und } \tau > t \\ 1 & : t - 1 \leq \tau \leq t. \end{cases}$$

Es folgt also

$$(f * h)(t) = \int_{t-1}^t f(\tau) d\tau,$$

d.h. $f * h$ ist ein Mittelwert von f über das Intervall $[t - 1, t]$. Daher nennt man Faltungen auch „Filter“ und die Faltung mit der obigen Funktion h ist ein Filter der „gleitendes Mittel“ (moving average) genannt wird. Hier zwei Illustrationen, die auch verdeutlichen, was eine Verschiebung des Filters bewirkt:



Beispiel 22.3 (Faltung mit der Dirac-Distribution). Man kann auch die Faltung von Distribution und Testfunktion bilden: Wir betrachten eine lokal integrierbare Funktion f und eine Testfunktion φ . Dann ist die Faltung von f und φ

$$(f * \varphi)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \varphi(t - u) du = \langle f, \varphi(t - \cdot) \rangle,$$

d.h. dies lässt sich auch als Anwendung der durch f induzierten Distribution auf eine gespiegelte und verschobene Testfunktion φ sehen. Wir führen das hier nicht vollständig aus, sondern zeigen nur die Faltung einer Testfunktion φ mit der Dirac-Distribution: Per Analogie mit der obigen Formel bekommt man

$$(\delta * \varphi)(t) = \varphi(t),$$

d.h. die Faltung mit der Dirac-Distribution ändert die Funktion nicht!

Falten wir mit einer Dirac-Distribution in a , so bekommen wir (wieder per Analogie)

$$(\delta_a * \varphi)(t) = \varphi(t - a),$$

das heißt, die Faltung mit δ_a verschiebt eine Funktion um a .

Die Faltung verträgt sich gut mit der Laplace-Transformation.

Satz 22.4 (Faltungssatz für die Laplace-Transformation). Für $f, h : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ gilt (wenn wir $f(t)$ und $h(t)$ für $t < 0$ durch Null fortsetzen)

$$(f * h)(t) = \int_0^t f(t - \tau)h(\tau) d\tau$$

und insbesondere ist auch $(f * h)(t) = 0$ für $t < 0$.

Weiterhin gilt

$$\mathcal{L}(f * h) = \mathcal{L}(f) \mathcal{L}(h).$$

Beweis. Die erste Aussage haben wir schon eingesehen. Für den Faltungssatz rechnen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau \right) e^{-st} dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)e^{-s\tau}g(t - \tau)e^{-s(t-\tau)} d\tau dt \\ &= \int_0^\infty f(\tau)e^{-s\tau} \int_\tau^\infty g(t - \tau)e^{-s(t-\tau)} dt d\tau \\ &= \mathcal{L}(f)(s)\mathcal{L}(g)(s) \end{aligned}$$

wobei wir bei Vertauschen der Integrale im dritten Schritt die Integralgrenzen richtig anpassen mussten. \square

Wenden wir diese Erkenntnis nun auf die Ergebnisse aus Satz 22.1 an, so bekommen wir:

Satz 22.5. Ist y^δ die Lösung des Anfangwertproblem

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = \delta, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (\delta)$$

so ist die Lösung des Anfangwertproblems

$$P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f, \quad y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0.$$

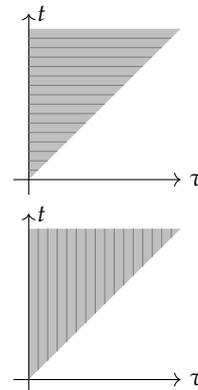
gegeben durch

$$y(t) = (f * y^\delta)(t).$$

Man kann sich diesen Satz auch intuitiv merken, denn die Faltung verträgt sich auch gut mit Ableitungen: Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f * g)(t) &= \left(\left(\frac{d}{dt}f\right) * g \right)(t) \\ &= \left(f * \left(\frac{d}{dt}g\right) \right)(t) \end{aligned}$$

wenn die entsprechenden Ableitungen existieren.



Hierfür müssen nur Integral und Ableitung vertauscht werden, und wenn Voraussetzungen vorliegen unter denen dies korrekt ist, bekommt man

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f * g)(t) &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{d}{dt}g(t - \tau)d\tau \\ &= \left(f * \frac{d}{dt}g\right)(t). \end{aligned}$$

Die weitere Gleichung folgt per Symmetrie der Faltung.

In gewissem Sinne ergeben sich Lösungen von Gleichungen $P\left(\frac{d}{dt}\right)y = f$ mit beliebigen Funktionen f aus Lösung von $P\left(\frac{d}{dt}\right)y = \delta$ durch „unendliche Überlagerung per Faltung“. Man kann sich merken: Ist $P\left(\frac{d}{dt}\right)y^\delta = \delta$, so ist

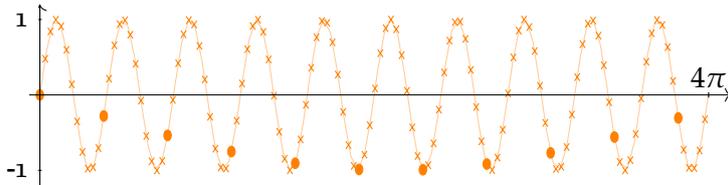
$$P\left(\frac{d}{dt}\right)(y^\delta * f) = \left(P\left(\frac{d}{dt}\right)y^\delta\right) * f = \delta * f = f.$$

Die Idee dabei ist es (ganz grob gesprochen) eine Funktion f , als „Linearkombination“ von Dirac-Distributionen zu schreiben.

23 Das Abtasttheorem

Mit Hilfe von Distributionen und Fourier-Analyse lassen sich das Abtasttheorem und der Alias-Effekt erklären.

Haben wir ein kontinuierliches Zeitsignal $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Abtastrate $1/T > 0$, so entsteht beim Punktabtasten die Folge $(s(kT))_{k \in \mathbb{Z}}$ von komplexen Werten (also Werte im Abstand T). Die abgetasteten Werte spiegeln die Funktion nicht immer wider, wie das folgende Beispiel zeigt:



Hier wurde die Funktion $s(x) = \sin(5x)$ einmal mit der Rate 10 (Kreuze, $T = 0.1$) und einmal mit der Rate $5/6$ (Punkte, $T = 6/5 = 1,2$) abgetastet. Die geringe Abtastrate erweckt den Eindruck einer wesentlich langsameren Schwingung.

Das Abtasttheorem erklärt, wann die Abtastpunkte genügend Information enthalten, um die Funktion *exakt* aus den Abtastwerten zu rekonstruieren und der Alias-Effekt ist der Effekt, das Unterabtasten zu verzerrten Ergebnissen führt.

In diesem Zusammenhang ist es hilfreich, noch einmal Fourier-Reihen und die Fourier-Transformation zu betrachten. Während wir in der Analysis uns auf stückweise stetige Funktionen beschränkt hatten, nutzen wir hier quadratintegrierbare Funktionen:

Definition 23.1. Eine Funktion $s : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *quadratintegrierbar*, wenn $\int_{\Omega} |s(x)|^2 dx$ existiert und endlich ist. Die Menge aller quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω wird mit $L^2(\Omega)$ bezeichnet.

Auf $L^2(\Omega)$ ist durch

$$\langle s, g \rangle_{\Omega} := \int_{\Omega} \overline{s(x)} g(x) dx$$

ein (komplexes) Skalarprodukt definiert. Die davon induzierte Norm ist

$$\|s\|_2 := \left(\int_{\Omega} |s(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Quadratintegrierbare Funktionen lassen sich physikalisch als „Funktionen mit endlicher Energie“ interpretieren.

Wir betrachten nun noch einmal Fourier-Reihen, aber diesmal auf dem Raum $L^2([-B, B])$ der quadratintegrierbaren Funktionen auf $[-B, B]$:

Satz 23.2. Die Funktionen $e_k(x) = e^{jk\frac{\pi}{B}x}$ bilden ein Orthonormalsystem in $L^2([-B, B])$ bezüglich des gewichteten Skalarproduktes $\langle s, r \rangle_{[-B, B]} = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \overline{s(x)} r(x) dx$.

Hier sind wir ein bisschen ungenau: Skalarprodukt und Norm sind nicht positiv definit. Das Problem sind Funktionen, die nur auf „irrelevant kleinen“ Mengen ungleich Null sind, also Funktionen, für welche $\int_{\Omega} |s(x)| dx = 0$ gilt. Man spricht auch von Funktionen, die „fast überall“ gleich Null sind. Im folgenden werden wir solche Funktionen ignorieren und sogar zwei Funktionen s_1 und s_2 als gleich ansehen, wenn $\int_{\Omega} |s_1(x) - s_2(x)| dx = 0$ gilt.

Jede Funktion $s \in L^2([-B, B])$ lässt sich in dieses Orthonormalsystem entwickeln und kann als Fourier-Reihe dargestellt werden

$$s = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, s \rangle_{[-B, B]} e_k$$

und die Koeffizienten sind $\langle e_k, s \rangle_{[-B, B]} = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B s(x) e^{-jk \frac{\pi}{B} x} dx$.

Für Funktionen $s \in L^2(\mathbb{R})$ lässt sich die Fourier-Transformation definieren, die wir hier etwas anders normieren und in der Frequenz $f = \omega / (2\pi)$ ausdrücken:

$$\hat{s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-2\pi j f x} dx.$$

Mit dieser Konvention lautet die Umkehrformel

$$s(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{2\pi j f x} df$$

und es gilt

$$\|s\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |s(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{s}(f)|^2 df = \|\hat{s}\|_2^2,$$

insbesondere ist für $s \in L^2(\mathbb{R})$ auch $\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$.

Ein wichtiger Begriff in diesem Kontext ist die *Bandbreite*: Wir sagen, dass ein Signal $s \in L^2(\mathbb{R})$ die Bandbreite $B > 0$ hat, wenn $\text{supp } \hat{s} \subset [-B, B]$ gilt, anders gesagt, wenn $\hat{s}(f) = 0$ für $|f| > B$ gilt, also wenn s keine Frequenzbeiträge für Frequenzen größer als B enthält. Eine Funktion mit endlicher Bandbreite nennen wir *bandbeschränkt*.

Aufgrund der Umkehrformel der Fourier-Transformation gilt für eine bandbeschränkte Funktion mit Bandbreite B

$$s(x) = \int_{-B}^B \hat{s}(f) e^{2\pi j f x} df.$$

Satz 23.3 (Abtasttheorem). *Es sei $B > 0$ und $s \in L^2(\mathbb{R})$ bandbeschränkt mit Bandbreite $B > 0$. Dann ist s durch die Abtastwerte in den Punkten $(\frac{k}{2B})_{k \in \mathbb{Z}}$ eindeutig bestimmt und es gilt die Rekonstruktionsformel*

$$s(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(\frac{k}{2B}) \text{sinc}(2Bx - k).$$

Beweis.

Die Idee des Beweises ist es die Fourier-Transformierte $\hat{s} \in L^2(\mathbb{R})$ wegen der Bandbeschränktheit als Funktion $\hat{s} \in L^2([-B, B])$ zu

Diese Fourier-Reihe entspricht exakt der aus der Analysis-Vorlesung. Sie konvergiert allerdings nicht überall punktweise, aber es gilt

$$\|s - \sum_{k=-K}^K \langle e_k, s \rangle_{[-\pi, \pi]} e_k\|_2 \rightarrow 0$$

für $K \rightarrow \infty$, d.h. die abgeschnittene Fourier-Reihe konvergiert im quadratischen Mittel.

Zur Erinnerung: Hier ist sinc-Funktion definiert durch $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x) / (\pi x)$ mit $\text{sinc}(0) = 1$.

sehen. Als solche können wir sie in eine Fourier-Reihe entwickeln:
Die Fourier-Koeffizienten von \hat{s} sind dann

$$\begin{aligned}\langle e_k, \hat{s} \rangle_{[-B, B]} &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \hat{s}(f) e^{-jk \frac{\pi}{B} f} \mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{-2\pi j \frac{k}{2B} f} \mathrm{d}f \\ &= \frac{1}{2B} s\left(-\frac{k}{2B}\right), \quad k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

wobei wir die Formel für die Umkehrung der Fourier-Transformation benutzt haben. Es folgt, dass die Fourier-Koeffizienten von \hat{s} komplett durch die diskreten Werte $s\left(\frac{k}{2B}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ bestimmt sind. Also ist auch s komplett durch diese Werte bestimmt.

Für die Rekonstruktionsformel schreiben wir die Fourier-Reihe von \hat{s} hin. Diese gibt aber eine auf ganz \mathbb{R} definierte ($2B$ -periodische) Funktion. Da \hat{s} aber nur im Intervall $[-B, B]$ ungleich Null ist, müssen wir die Fourier-Reihe mit der Abschneidefunktion

$$\chi_{[-B, B]}(x) = \begin{cases} 1 & : -B \leq x \leq B \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

malnehmen, damit die Formel auf ganz \mathbb{R} richtig ist. Wir nutzen die eben hergeleitete Beziehung zwischen den Fourier-Koeffizienten und den Abtastwerten und bekommen

$$\begin{aligned}\hat{s}(f) &= \chi_{[-B, B]}(f) \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, \hat{s} \rangle_{[-B, B]} e_k(f) \\ &= \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(-\frac{k}{2B}\right) \chi_{[-B, B]}(f) e^{jk \frac{\pi}{B} f}.\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir die inverse Fourier-Transformation auf beide Seiten an: Dazu berechnen wir die inverse Fourier-Transformierten der Summanden:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{\chi_{[-B, B]}(f) e^{jk \frac{\pi}{B} f}\}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[-B, B]}(f) e^{jk \frac{\pi}{B} f} e^{2\pi j f x} \mathrm{d}f \\ &= \int_{-B}^B e^{j(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x) f} \mathrm{d}f \\ &= \left[\frac{1}{j(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x)} e^{j(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x) f} \right]_{f=-B}^B \\ &= \frac{1}{j(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x)} \left[e^{j(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x) B} - e^{-j(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x) B} \right] \\ &= \frac{2}{(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x)} \sin\left(\left(k \frac{\pi}{B} + 2\pi x\right) B\right) \\ &= \frac{1}{\pi\left(\frac{k}{2B} + x\right)} \sin(\pi(k + 2Bx)).\end{aligned}$$

Wir bekommen also für die invers Transformierte von \hat{s}

$$\begin{aligned} s(x) &= \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(-\frac{k}{2B}\right) \frac{1}{\pi\left(\frac{k}{2B} + x\right)} \sin(\pi(k + 2Bx)) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(-\frac{k}{2B}\right) \frac{\sin(\pi(k + 2Bx))}{\pi(k + 2Bx)} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{k}{2B}\right) \operatorname{sinc}(2Bx - k). \end{aligned}$$

□

Wir halten fest: Enthält ein Signal s keine Frequenzen größer als B , so muss es mindestens mit der Rate $1/T = 2B$ abgetastet werden, um es vollständig aus den Abtastwerten rekonstruieren zu können. Die Abtastrate $2B$ heißt *Nyquist-Rate*. Tasten wir s mit einer größeren Abtastrate ab, würde dies sogar für eine höhere Bandbreite reichen und wir können s auch dann exakt rekonstruieren. Was passiert, wenn wir zu langsam abtasten behandeln wir im nächsten Abschnitt.

Um die Abtastung von Funktionen wie \sin oder \cos (welche nicht quadratintegrierbar sind) zu untersuchen, behandeln wir noch die Fourier-Transformation von Distributionen. Hierzu überlegen wir wieder zuerst, ob die Fourier-Transformation eine „adjungierte Identität“ erfüllt (vgl. Abschnitt 18). Zu $s \in L^2(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \langle \hat{s}, \varphi \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) \varphi(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-2\pi jfx} dx \varphi(f) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} s(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi jfx} \varphi(f) df}_{=\hat{\varphi}(x)} dx \\ &= \langle s, \hat{\varphi} \rangle. \end{aligned}$$

Hier waren wir etwas unvorsichtig: Wir haben übersehen, dass $\hat{\varphi}$ im Allgemeinen keine Testfunktion ist! (Tatsächlich ist $\hat{\varphi}$ niemals eine Testfunktion, wenn φ eine ist.) Für eine korrekte Definition der Fourier-Transformation nimmt man statt den Raum der Testfunktionen für φ den etwas größeren *Schwartz-Raum der schnell fallenden Funktionen* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, welche aus allen C^∞ -Funktionen s besteht, für die $x^k s(x)$ für jedes $k = 1, 2, \dots$ beschränkt ist. Man kann zeigen, dass für $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ auf $\hat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt. Anstelle von allgemeinen Distributionen muss man sich jetzt auch *temperierte Distributionen* beschränken, welche lineare Funktionale auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sind, also Elemente in $\mathcal{S}(\mathbb{R})'$.

Definition 23.4. Für eine temperierte Distribution $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$

definieren wir die Fourier-Transformation \hat{s} durch

$$\langle \hat{s}, \varphi \rangle = \langle s, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Die Umkehrung der Fourier-Transformation

$$\check{s}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} s(f) e^{2\pi j f x} df$$

erfüllt die adjungierte Identität

$$\langle \check{s}, \varphi \rangle = \langle f, \check{\varphi} \rangle$$

und daher definiert man die Umkehrung \check{s} der Fourier-Transformation für Distributionen entsprechend und bekommen:

Wir schreiben wie früher auch $\mathcal{F}s = \hat{s}$,
 $\mathcal{F}^{-1}s = \check{s}$.

Satz 23.5. Die Fourier-Transformation bildet temperierte Distributionen $s \in \mathcal{S}(\mathbb{R})'$ auf temperierte Distributionen $\hat{s} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ab und es gilt $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}s = s$.

Beispiel 23.6. Für die Dirac-Distribution gilt

$$\langle \hat{\delta}, \varphi \rangle = \langle \delta, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot \varphi(x) dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Es ergibt sich also die Situation, dass die Fourier-Transformierte der Dirac-Distribution die Funktion ist, welche konstant 1 ist:

$$\hat{\delta} \equiv 1.$$

Verschieben wir die Dirac-Distribution bekommen wir für $a \in \mathbb{R}$

$$\langle \hat{\delta}_a, \varphi \rangle = \hat{\varphi}(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi j a x} \varphi(x) dx,$$

also ist $\hat{\delta}_a$ ebenfalls eine Funktion und zwar

$$\hat{\delta}_a(x) = e^{-2\pi j a x}.$$

Entsprechend ergibt sich auch

$$\mathcal{F}\{e^{j a x}\} = \delta_{\frac{a}{2\pi}},$$

d.h. die Fourier-Transformation einer komplexen Schwingung ist eine verschobene Dirac-Distribution. Per Linearität der Fourier-Transformation ergibt sich

$$\mathcal{F}\{\delta_a + \delta_{-a}\} = e^{2\pi j a x} + e^{-2\pi j a x} = 2 \cos(2\pi a x)$$

$$\mathcal{F}\{\delta_a - \delta_{-a}\} = e^{2\pi j a x} - e^{-2\pi j a x} = 2j \sin(2\pi a x)$$

und

$$\mathcal{F}\{\cos(ax)\} = \frac{\delta_{\frac{a}{2\pi}} + \delta_{-\frac{a}{2\pi}}}{2}$$

$$\mathcal{F}\{\sin(ax)\} = \frac{\delta_{\frac{a}{2\pi}} - \delta_{-\frac{a}{2\pi}}}{2j}.$$

Damit können wir jetzt Funktionen Fourier-transformieren, auch wenn sie nicht mehr integrierbar oder quadratintegrierbar sind. Wir müssen allerdings damit rechnen, dass die Fourier-Transformierten dann keine Funktionen mehr sind, sondern Distributionen sein können.

24 Der Alias-Effekt

Jetzt wollen wir untersuchen, was passiert, wenn wir ein Signal nicht mit der Nyquist-Rate abtasten. Hat ein Signal s die Bandbreite B so ist die Nyquist Rate $2B$. Wenn wir es mit einer Rate $2B$ abtasten, so ist das das gleiche, als würden wir annehmen, dass das Signal eine größere Bandbreite hat und dann die Nyquist-Rate benutzen. Da jedes Signal mit Bandbreite B auch jede größere Bandbreite $B' > B$ hat, gilt auch in diesem Fall das Abtasttheorem und wir können das Signal exakt rekonstruieren. Beim Unterabtasten, also bei einer zu kleinen Abtastrate, können wir nicht erwarten, das Signal exakt zu rekonstruieren. Was dabei genau passiert, wollen wir jetzt untersuchen.

Wir modellieren das mit der Rate T abgetastete Signal als Distribution, nämlich als

$$s_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \delta_{kT},$$

also eine Reihe über Dirac-Distributionen, die an den Abtaststellen sitzen und jeweils mit dem Wert des Signals an der Abtaststelle gewichtet sind.

Die lässt sich auch als Multiplikation von s mit einem sogenannten Dirac-Kamm schreiben.

Definition 24.1. Der *Dirac-Kamm* der Breite T ist die Distribution $\text{III}_T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})'$ definiert durch

$$\text{III}_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}.$$

das heißt es gilt

$$\langle \text{III}_T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(kT).$$

Die Multiplikation von s mit III_T ist dann

$$\langle s \cdot \text{III}_T, \varphi \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \varphi(kT)$$

und ist für alle stetigen s erklärt. In diesem Sinne ist das abgetastete Signal nichts anderes als

$$s_T := s \cdot \text{III}_T.$$

Unser erstes Ziel ist es, die Fourier-Transformation des abgetasteten Signals zu bestimmen. Diese ist

$$\hat{s}_T(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \hat{\delta}_{kT}(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) e^{2\pi i k T f},$$

wobei die Konvergenz der Reihe leider alles andere als klar ist.

Wir benutzen folgendes Hilfsmittel:

Satz 24.2 (Poisson-Summenformel). Es sei $s \in L^2(\mathbb{R})$ und $B > 0$. Ist dann die Funktion $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f + 2Bk)$ quadratintegrierbar, so gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f + 2Bk) = \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{k}{2B}\right) e^{-jk \frac{\pi}{B} f}.$$

Beweis.

Wir betrachten zu \hat{s} die *Periodisierung* (mit Periode $2B$) von \hat{s} , also die Funktion

$$\psi(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f + 2Bk).$$

Nach Annahme ist die Funktion ψ auf dem Intervall $[-B, B]$ quadratintegrierbar und daher können wir sie in eine Fourier-Reihe entwickeln. Die Fourier-Koeffizienten sind

$$\begin{aligned} \langle e_k, \psi \rangle_{[-B, B]} &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \psi(f) e^{-jk \frac{\pi}{B} f} \, df \\ &= \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f + 2B\ell) e^{-jk \frac{\pi}{B} f} \, df. \end{aligned}$$

Da die Abbildung $f \mapsto e^{-jk \frac{\pi}{B} f}$ die Periode $2B$ hat, ist das Integral gleich

$$\frac{1}{2B} \int_{-B}^B \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f + 2B\ell) e^{-jk \frac{\pi}{B} f} \, df = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f + 2B\ell) e^{-jk \frac{\pi}{B} (f + 2B\ell)} \, df.$$

Wir vertauschen Integral und Reihe und bekommen

$$\langle e_k, \psi \rangle_{[-B, B]} = \frac{1}{2B} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \int_{-B}^B \hat{s}(f + 2B\ell) e^{-jk \frac{\pi}{B} (f + 2B\ell)} \, df$$

Jetzt erkennen wir den Ausdruck auf der rechten Seite als „zerstückeltes“ Integral der Funktion $f \mapsto \hat{s}(f) e^{-jk \frac{\pi}{B} f}$ über die ganze reelle Achse. Das Integral ist also exakt die Formel für die inverse Fourier-Transformation und wir haben also

$$\begin{aligned} \langle e_k, \psi \rangle_{[-B, B]} &= \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{-jk \frac{\pi}{B} f} \, df \\ &= \frac{1}{2B} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f) e^{2\pi j \left(-\frac{k}{2B}\right) f} \, df \\ &= \frac{1}{2B} s\left(-\frac{k}{2B}\right). \end{aligned}$$

Nach der Rekonstruktionsformel für Fourier-Reihen ist also

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(f + 2Bk) &= \psi(f) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle e_k, \psi \rangle e_k(f) \\ &= \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(-\frac{k}{2B}\right) e^{jk \frac{\pi}{B} f}. \end{aligned}$$

Damit haben wir die Behauptung gezeigt (wir müssen nur noch in der Reihe auf der rechten Seite k durch $-k$ ersetzen). \square

Beispiel 24.3 (Fourier-Transformation eines Dirac-Kammes). Für $f = 0$ erhält man übrigens die etwas kuriose Formel

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}(2Bk) = \frac{1}{2B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s\left(\frac{k}{2B}\right). \quad (*)$$

Diese Formel können wir benutzen, um die Fourier-Transformierte eines Dirac-Kammes zu bestimmen: Es gilt nach der Definition der Fourier-Transformation für temperierte Distributionen und der Poisson-Summenformel in der Form (*)

$$\langle \widehat{\text{III}}_B, \varphi \rangle = \langle \text{III}_B, \hat{\varphi} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{\varphi}(kB) = \frac{1}{B} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{B}\right) = \frac{1}{B} \langle \text{III}_{\frac{1}{B}}, \varphi \rangle.$$

Wir haben also gezeigt:

$$\widehat{\text{III}}_B = \frac{1}{B} \text{III}_{\frac{1}{B}}.$$

Beispiel 24.4 (Faltung mit dem Dirac-Kamm). Die Multiplikation einer Funktion mit dem Dirac-Kamm entspricht dem Abtasten:

$$s_T = s \cdot \text{III}_T = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(kT) \delta_{kT}.$$

Was bedeutet die Faltung mit III_T ? Wir wissen schon $(\delta_a * s)(t) = s(t - a)$ und damit bekommen wir

$$(\text{III}_T * s)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\delta_{kT} * s)(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(t - kT).$$

Das bedeutet, dass die Faltung mit dem Dirac-Kamm genau der Periodisierung des Signals entspricht.

Satz 24.5. Für ein Signal s sei $s_T = s \cdot \text{III}_T$ das mit Rate $T > 0$ abgetastete Signal. Dann gilt

$$\widehat{s_T}(f) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{s}\left(f - \frac{k}{T}\right).$$

Im Spezialfall $B = 1$ sehen wir $\widehat{\text{III}}_1 = \text{III}_1$, d.h. der Delta-Kamm der Breite 1 ist ein Fixpunkt der Fourier-Transformation. Ein weiterer ist die Funktion $e^{-\pi t^2/2}$ (beides bezüglich der Fourier-Transformation mit der Normierung $\hat{s}(f) = \int_{\mathbb{R}} s(t) e^{-2\pi i t f} dt$).

Der Faltungssatz für die Fourier-Transformation ist analog zu dem für die Laplace-Transformation: Es gilt $\widehat{s * h}(f) = \int_{\mathbb{R}} (s * h)(t) e^{-2\pi i t f} dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} s(\tau) h(t - \tau) d\tau e^{-2\pi i t f} dt$ und da $e^{-2\pi i t f} = e^{-2\pi i \tau f} e^{-2\pi i (t - \tau) f}$ gilt, ist der Ausdruck gleich $\hat{s}(f) \hat{h}(f)$. Es gilt also

$$\widehat{s * h}(f) = \hat{s}(f) \cdot \hat{h}(f).$$

Analog sieht man $\widetilde{s * h}(t) = \check{s}(t) \cdot \check{h}(t)$, und es folgen $\widehat{s \cdot h}(f) = (\hat{s} * \hat{h})(f)$ und $\widetilde{s \cdot h}(t) = (\check{s} * \check{h})(t)$.

Beweis.

Wir wenden den Faltungssatz für die Fourier-Transformation an:

$$\begin{aligned}\widehat{s}_T(f) &= \widehat{\text{III}_T \cdot s}(f) = (\widehat{\text{III}_T} * \widehat{s})(f) \\ &= \frac{1}{T} (\text{III}_{1/T} * \widehat{s})(f) = \frac{1}{T} \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(f - \frac{k}{T}).\end{aligned}$$

□

Schließlich schauen wir uns noch an, was bei der Rekonstruktion nach dem Abtasttheorem passiert: Mit Hilfe der Faltung können wir für eine Funktion s mit Bandbreite B , welche mit $T = \frac{1}{2B}$ abgetastet wurde schreiben

$$\begin{aligned}s(t) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} s(\frac{k}{2B}) \text{sinc}(2Bt - k) = ((s \cdot \text{III}_T) * \text{sinc}(2B\cdot))(t) \\ &= (s_T * \text{sinc}(2B\cdot))(t).\end{aligned}$$

In Worten: Die Rekonstruktion von s aus der abgetasteten Funktion s_T entspricht der Faltung der abgetasteten Funktion mit der Funktion $\text{sinc}(2Bt)$. Die Fourier-Transformierte der sinc-Funktion kennen wir: Für $h(t) = \text{sinc}(2Bt)$ gilt

$$\widehat{h}(f) = \frac{1}{2B} \chi_{[-B, B]}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2B} & : -B \leq f \leq B \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Also lautet das Abtasttheorem auf der Fourier-Seite

$$\widehat{s}(f) = \widehat{s}_T(f) \frac{1}{2B} \chi_{[-B, B]}(f).$$

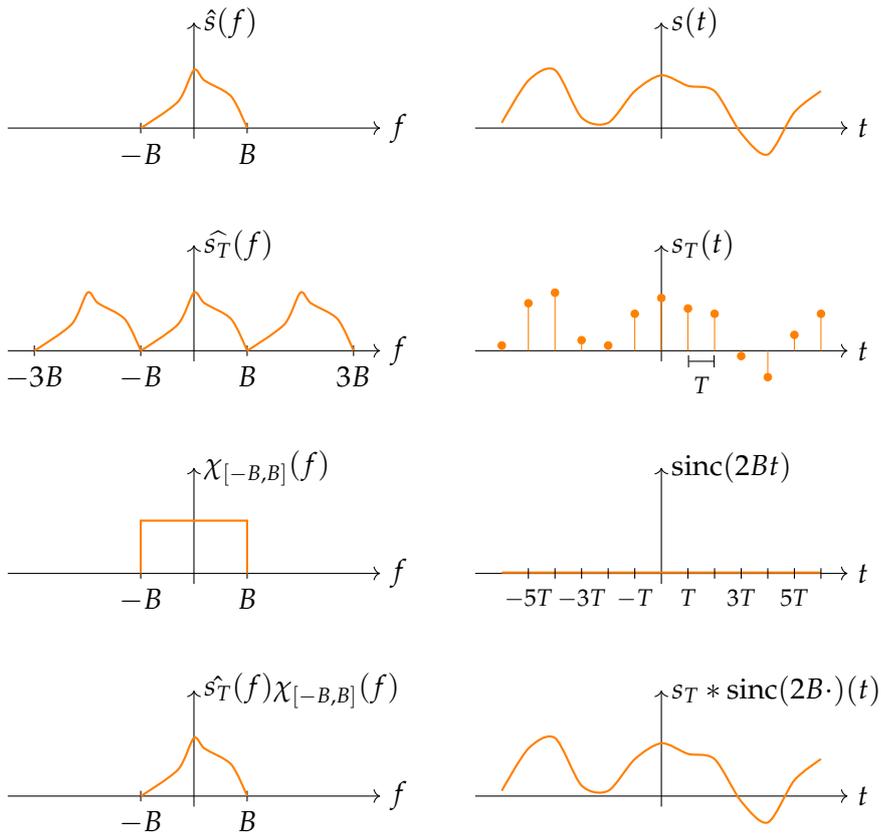
Wir können diese Formel wie folgt interpretieren: Die Rekonstruktion von s aus s_T entsteht auf der Fourier-Seite dadurch, dass die Fourier-Transformierte des abgetasteten Signals bei $\pm B$ abgeschnitten wird.

Der ganze Prozess der exakten Rekonstruktion ist also:

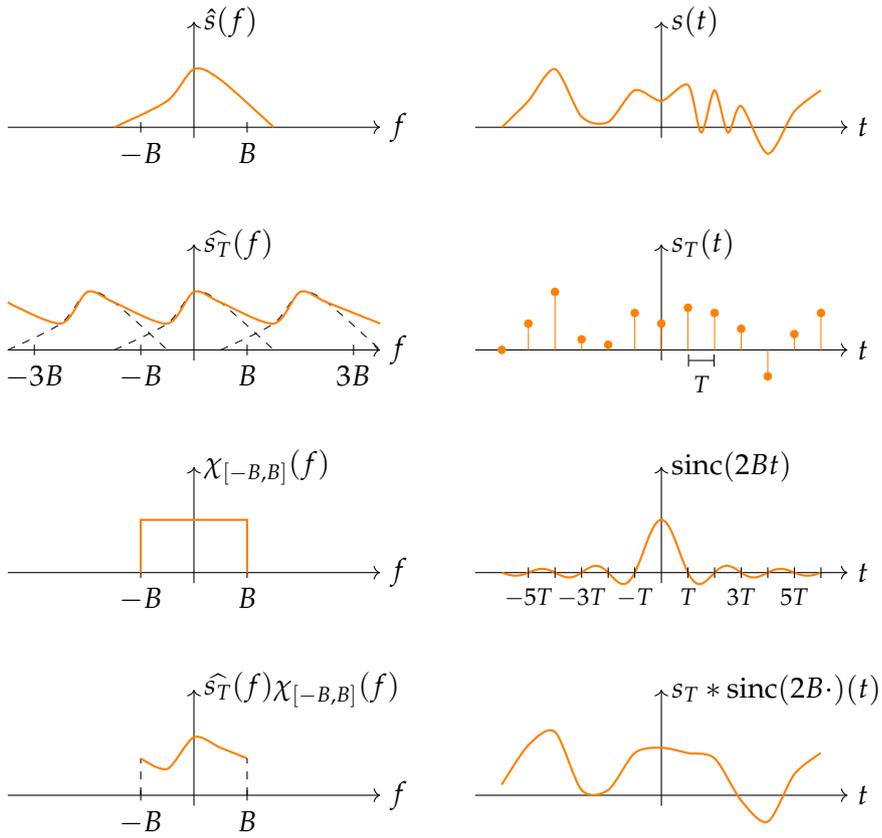
1. $s \rightsquigarrow s_T$ Abtasten mit der Rate $T = \frac{1}{2B}$.
2. Bilde \widehat{s}_T , also die Fourier-Transformierte von s_T . Dies entspricht der Periodisierung von \widehat{s} mit Verschiebungen um $2B$ (Satz 24.5).
3. Schneide die Fourier-Transformierte von s_T bei $\pm B$ ab.
4. Transformiere das Ergebnis zurück.

Hier sehen wir noch einmal, warum diese Prozedur exakt ist, wenn das Signal s Bandbeschränkt ist: Ist $\widehat{s}(f) = 0$ für $|f| > B$, so wird die Periodisierung mit Verschiebung um $2B$ durch das anschließende Abschneiden bei $\pm B$ genau rückgängig gemacht!

Hier einmal die Prozedur graphisch illustriert.



Überlegen wir uns nun, was passiert, wenn s nicht bandbeschränkt mit Bandbreite B ist, sondern \hat{s} auch für Werte f mit $|f| > B$ Werte ungleich Null annimmt. Durch die Periodisierung, werden diese Werte für irgendeine Verschiebung (oder auch für mehrere Verschiebungen) im Intervall $[-B, B]$ landen, d.h. das Abschneiden der Periodisierung liefert nicht das exakte Ergebnis! Dadurch entsteht bei der Rücktransformation ein Fehler. Dieses „Zurückklappen“ im Frequenzbereich ist für den Alias-Effekt verantwortlich, was in der nächsten Illustration verdeutlicht wird.



.

.