

# Analysis zur Elektrotechnik

Dirk Lorenz und Thomas Sonar

Sommersemester 2022

## Inhaltsverzeichnis

<b>Vorbemerkung</b>	<b>3</b>
<b>Notation</b>	<b>5</b>
<b>1 Logik, Mengenlehre</b>	<b>8</b>
<b>2 Komplexe Zahlen</b>	<b>11</b>
<b>3 Reelle Funktionen und Folgen</b>	<b>15</b>
<b>4 Konvergenzsätze und Konvergenzkriterien</b>	<b>19</b>
<b>5 Unendliche Reihen</b>	<b>24</b>
<b>6 Stetige Funktionen</b>	<b>28</b>
<b>7 Differenzierbare Funktionen</b>	<b>32</b>
<b>8 Partielle Ableitungen</b>	<b>36</b>
<b>9 Die (totale) Ableitung</b>	<b>40</b>
<b>10 Mittelwertsätze und Taylorreihen</b>	<b>45</b>
<b>11 Extremwerte</b>	<b>50</b>
<b>12 Implizite Funktionen und Extrema unter Nebenbedingungen</b>	<b>55</b>
<b>13 Das bestimmte Integral</b>	<b>59</b>
<b>14 Integrationsregeln</b>	<b>64</b>
<b>15 Kurvenintegrale</b>	<b>68</b>
<b>16 Potentialtheorie</b>	<b>72</b>
<b>17 Bereichsintegrale</b>	<b>77</b>

<b>18</b>	<b>Gekrümmte Flächen und deren Flächeninhalte</b>	<b>82</b>
<b>19</b>	<b>Oberflächenintegrale 1. und 2. Art</b>	<b>87</b>
<b>20</b>	<b>Die Sätze von Green, Gauß und Stokes</b>	<b>91</b>
<b>21</b>	<b>Fourier-Reihen</b>	<b>96</b>
<b>22</b>	<b>Fourier-Reihen: Beispiele und Eigenschaften</b>	<b>100</b>
<b>23</b>	<b>Uneigentliche Integrale</b>	<b>105</b>
<b>24</b>	<b>Die Fourier-Transformation</b>	<b>110</b>
<b>25</b>	<b>Integration rationaler Funktionen</b>	<b>115</b>
<b>26</b>	<b>Rotationskörper</b>	<b>120</b>

---

## Vorbemerkung

Dies ist das Skript zur Vorlesung „Analysis zur Elektrotechnik“, gehalten an der TU Braunschweig im Sommersemester 2022. Es erhebt keinerlei Anspruch, auch ohne Besuch der Vorlesung verständlich zu sein. Das Skript geht auf die Vorlesung von Thomas Sonar im Sommersemester 2021 zurück. Diese Version enthält mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zahlreiche Fehler; seien Sie also aufmerksam beim Lesen und melden Sie sich bei mir, wenn Sie Fehler gefunden haben, damit ich die Fehler korrigieren kann; alle, die nach Ihnen das Skript lesen, werden es Ihnen danken.

Zur Mathematik für die Elektrotechnik gibt es zahlreiche Bücher (Sie finden sie zum Beispiel unter Namen wie „Mathematik für Ingenieure“ oder „Höhere Mathematik“). Im ersten Studienjahr sind die beiden Themen „Analysis“ und „Lineare Algebra“ wichtig. Dabei umfasst die Analysis die Themen Grenzwerte, Folgen, Reihen, Stetigkeit, Ableitungen, Integrale und die Integralsätze und die Differential- und Integralrechnung in mehreren Variablen. In vielen Büchern wird zuerst die Analysis in einer Dimension behandelt, während die Theorie in mehreren Variablen in später Bänden kommt. Sie finden die Theorie zu dieser Vorlesung zum Beispiel in den beiden Bänden [Neher \[2018a\]](#) und [Neher \[2018b\]](#), dem Buch [Karpfinger \[2022\]](#) oder auch in [Burg u. a. \[2011\]](#).

Braunschweig, den 2. September 2022

Dirk Lorenz

[d.lorenz@tu-braunschweig.de](mailto:d.lorenz@tu-braunschweig.de)

- 
- [Burg u. a. 2011] BURG, Klemens ; HAF, Herbert ; WILLE, Friedrich ; MEISTER, Andreas: *Höhere Mathematik Für Ingenieure Band I: Analysis*. 9. Auflage. Springer, 2011. – URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-8348-9929-3>
- [Karpfinger 2022] KARPFINGER, Christian: *Höhere Mathematik in Rezepten*. (2022). – URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-64345-7>
- [Neher 2018a] NEHER, Markus: *Anschauliche höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2018. – URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-19420-8>
- [Neher 2018b] NEHER, Markus: *Anschauliche höhere Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler 2*. Springer, 2018. – URL <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-19422-2>

---

## Notation

Hier eine (ggf. noch unvollständige) Liste mit mathematischer Schreibweisen, die wir benutzen werden:

Summen- und Produktzeichen:

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Für  $x > 0$  bezeichnet  $\sqrt{x}$  die *positive* Lösung von  $y^2 = x$ .

Wir geben Mengen entweder als Listen an

$$\{a, b, c\}$$

oder definieren sie über Eigenschaften der Elemente

$$\{x \mid x \text{ erfüllt Eigenschaft } E\}.$$

Lies: Die Menge aller  $x$ , für die gilt “ $x$  erfüllt die Eigenschaft  $E$ ”.

Für zwei Mengen  $X, Y$  bezeichnen wir mit

$$f : X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

Lies:  $f$  ist eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$  die  $x$  auf  $f(x)$  abbildet.

eine Funktion von  $X$  nach  $Y$ , d.h. für jedes  $x \in X$  ist mit  $f(x)$  genau ein Element von  $Y$  gegeben.

Die grundlegenden Mengen von Zahlen sind

$$\begin{aligned}\mathbb{N} &= \{0, 1, 2, \dots\} && \text{(Natürliche Zahlen)} \\ \mathbb{N}_+ &= \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} \\ \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} && \text{(Ganze Zahlen)} \\ \mathbb{Q} &= \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+\} && \text{(Rationale Zahlen)} \\ \mathbb{R} &= \mathbb{Q} \cup \{x \mid x \text{ irrational}\} && \text{(Reelle Zahlen)}\end{aligned}$$

Alle diese Mengen sind unendlich groß, es gibt jedoch in gewissen Sinne viel mehr reelle als rationale Zahlen. Die Mengen  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  sind *abzählbar unendlich*, während  $\mathbb{R}$  *überabzählbar unendlich* ist.

Die Menge  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ist die euklidische Ebene und  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$  ist der  $n$ -dimensionale euklidische Raum. Die Elemente im  $\mathbb{R}^n$  sind *Vektoren*.

Für  $a < b$  schreiben wir

$$\begin{aligned}[a, b] &:= \{x \mid a \leq x \leq b\} && \text{(abgeschlossenes Intervall)} \\ ]a, b[ &:= \{x \mid a < x < b\} && \text{(offenes Intervall)} \\ [a, b[ &:= \{x \mid a \leq x < b\} && \text{(rechts halboffenes Intervall)} \\ ]a, b] &:= \{x \mid a < x \leq b\}. && \text{(links halboffenes Intervall)}\end{aligned}$$

---

Intervalle, die unbeschränkt sind:

$$\begin{aligned}[a, \infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\ ]\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\} \\ ]a, \infty[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\ ]\infty, b[ &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\} \\ ]\infty, \infty[ &:= \mathbb{R}\end{aligned}$$

Beachte: Es gilt  $\infty \notin \mathbb{R}$ !

Für reelle Zahlen  $a \in \mathbb{R}$  ist der *Betrag*

$$|a| := \begin{cases} a & : a \geq 0 \\ -a & : a < 0. \end{cases}$$

Damit ist der Abstand von  $a$  und  $b$  gegeben durch  $|b - a|$ . Der Betrag erfüllt folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned}|a| &\geq 0 \\ |a| = 0 &\iff a = 0 \\ |ab| &= |a||b| \\ |a + b| &\leq |a| + |b|. \quad (\text{Dreiecksungleichung})\end{aligned}$$

Wir werden neben den lateinischen Buchstaben auch griechische benutzen. Manche davon haben zwei Schreibweisen:

$\alpha$	alpha	$\theta, \vartheta$	theta	$\pi$	pi
$\beta$	beta	$\iota$	iota	$\rho, \varrho$	rho
$\gamma$	gamma	$\kappa$	kappa	$\sigma, \varsigma$	sigma
$\delta$	delta	$\lambda$	lambda	$\tau$	tau
$\epsilon, \varepsilon$	epsilon	$\mu$	mu	$\upsilon$	upsilon
$\zeta$	zeta	$\nu$	nu	$\phi, \varphi$	phi
$\eta$	eta	$\xi$	xi	$\psi$	psi
		$\chi$	chi	$\omega$	omega

Von den griechischen Großbuchstaben benutzen wir nur diejenigen, die sich von den lateinischen unterscheiden:

$\Gamma$	Gamma	$\Xi$	Xi	$\Phi$	Phi
$\Delta$	Delta	$\Pi$	Pi	$\Psi$	Psi
$\Theta$	Theta	$\Sigma$	Sigma	$\Omega$	Omega
$\Lambda$	Lambda	$\Upsilon$	Upsilon		



# 1 Logik, Mengenlehre

Logik beschäftigt sich mit der Wahrheit von Aussagen. Mathematische Aussagen haben genau zwei mögliche Wahrheitswerte: wahr und falsch. Ist  $A$  eine Aussage, so schreiben wir

$$w(A) = 0 : \iff A \text{ falsch}$$

$$w(A) = 1 : \iff A \text{ wahr}$$

Für die Aussage „ $A : 2 = 1$ “ ist zum Beispiel  $w(A) = 0$ . Für „ $A : 1 \in \{0, 1, 2\}$ “ ist  $w(A) = 1$ . Für Aussagen gibt es folgende Operationen:

Dabei bedeutet „ $A : \iff B$ “, dass der Ausdruck  $A$  per Definition äquivalent zu  $B$  ist, also durch  $B$  definiert wird. Entsprechend bedeutet „ $A := B$ “, dass  $A$  als  $B$  definiert wird.

$\neg A$  : „nicht  $A$ “, (Negation)

$A \vee B$  : „ $A$  oder  $B$ “, (Disjunktion)

$A \wedge B$  : „ $A$  und  $B$ “, (Konjunktion)

$A \implies B$  : „aus  $A$  folgt  $B$ “, (Implikation)

$A \iff B$  : „ $A$  äquivalent zu  $B$ “, (Äquivalenz)

Diese Operationen sind über eine Wahrheitstafel definiert:

$w(A)$	$w(B)$	$w(\neg A)$	$w(A \vee B)$	$w(A \wedge B)$	$w(A \implies B)$	$w(A \iff B)$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Es gilt zum Beispiel auch:

$$\underbrace{(A \implies B)}_{\text{direkter Beweis}} \iff \underbrace{(\neg B \implies \neg A)}_{\text{indirekter Beweis}}$$

*Beispiel.* Wir betrachten die Aussage „Für alle  $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$  gilt:  $n$  gerade  $\iff n^2$  gerade.“

*Beweis.*

„ $\implies$ “: Wir beweisen direkt:

$$\begin{aligned} n \text{ gerade} &\implies \text{Es gibt } k \in \{1, 2, \dots\} \text{ mit } n = 2k \\ &\implies n^2 = 4k^2 = 2(2k^2) \\ &\implies n^2 \text{ gerade.} \end{aligned}$$

„ $\impliedby$ “: Wir beweisen indirekt, also die Aussage „ $n$  ungerade  $\implies n^2$  ungerade“:

$$\begin{aligned} n \text{ ungerade} &\implies \text{Es gibt } k \in \{1, 2, \dots\} \text{ mit } n = 2k - 1 \\ &\implies n^2 = (2k - 1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k) + 1 \\ &\implies n^2 \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

□



Es gelten die *Regeln von de Morgan*:

$$\neg(A \wedge B) \iff (\neg A) \vee (\neg B)$$

$$\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$$

Für die Bildung von Aussagen benutzen wir *Quantoren*:

„ $\forall x : A(x)$ “ :  $\iff$  Für alle  $x$  gilt  $A(x)$  ist wahr.

„ $\exists x : A(x)$ “ :  $\iff$  Es existiert ein  $x$ , so dass gilt  $A(x)$  ist wahr.  $\exists$  bedeutet, „es existiert *wenigstens* ein“.

„ $\exists! x : A(x)$ “ :  $\iff$  Es existiert genau ein  $x$ , so dass gilt  $A(x)$  ist wahr.

Mit Hilfe von Quantoren lassen sich einfach Aussagen negieren, denn es gilt

$$\neg(\exists x : A(x)) \iff (\forall x : \neg A(x))$$

$$\neg(\forall x : A(x)) \iff (\exists x : \neg A(x))$$

*Beispiel.* Was ist die Negation der Aussage „Kein Dozent kann die Hörsaaltechnik bedienen.“?

Da die Aussage gleichbedeutend ist mit „Für alle Dozenten gilt, dass sie die Hörsaaltechnik nicht bedienen können“ ist die Aussage mit Quantoren geschrieben:

$$\forall \text{Dozent} : \text{Dozent kann Hörsaaltechnik nicht bedienen.}$$

Die Negation ist also

$$\exists \text{Dozent} : \text{Dozent kann Hörsaaltechnik bedienen.}$$

Die Negation ist also „Es gibt einen Dozenten, der die Hörsaaltechnik bedienen kann.“

Weitere grundlegende Objekte in der Mathematik sind *Mengen*: Ist  $M$  eine Menge, so schreiben wir

$$a \in M : \iff a \text{ ist Element von } M$$

$$a \notin M : \iff \neg(a \in M)$$

Mit  $\emptyset = \{\}$  ist die *leere Menge* gemeint, also die Menge, die keine Elemente enthält. Sind  $M$  und  $N$  Mengen, so schreiben wir

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\} \quad (\text{Vereinigung})$$

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\} \quad (\text{Schnitt})$$

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\} \quad (\text{Differenz})$$

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}. \quad (\text{Cartesisches Produkt})$$

Die Elemente von Mengen können selbst wieder Mengen sein. So bildet man zum Beispiel die Menge aller Teilmengen:

$$\mathcal{P}(M) := \{X \mid X \subset M\}. \quad (\text{Potenzmenge})$$



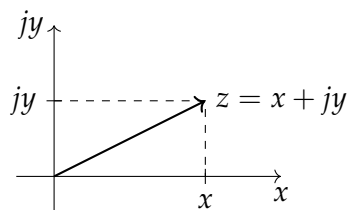
## 2 Komplexe Zahlen

In gewissem Sinne gibt es viel mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen. Irrationale Zahlen sind z.B.  $\sqrt{2}$ ,  $\log(5)$  oder auch  $\pi$ . Der wichtigste Unterschied zwischen den rationalen und den reellen Zahlen ist, dass die letzteren *vollständig* sind (was wir in der nächsten Vorlesung behandeln). Die Punkte in  $\mathbb{R}^2$  bilden die *euklidische Ebene* und  $(x, y)$  sind die cartesischen Koordinaten dieser Punkte.

Obwohl  $\mathbb{R}$  in gewissem Sinne vollständig ist, gibt es immer noch einfache Gleichungen, die keine Lösung in  $\mathbb{R}$  haben, z.B. die Gleichung  $x^2 + 1 = 0$ . Abhilfe bringen hier die *komplexen Zahlen*

$$\mathbb{C} := \{x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}, \quad j^2 = -1\}.$$

Die komplexen Zahlen visualisieren wir in der *Gauß'schen Zahlenebene*:



Für eine komplexe Zahl  $z = x + jy$  ist  $x = \text{Re}(z)$  der *Realteil* und  $y = \text{Im}(z)$  der *Imaginärteil*. Die Zahl  $j$  heißt *imaginäre Einheit*.

Mit komplexen Zahlen rechnen wir genau wie mit reellen Zahlen, nur dass wir  $j^2 = -1$  beachten. Für  $z_1 = x_1 + jy_1$ ,  $z_2 = x_2 + jy_2$  ist:

**Addition:**

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + jy_1) + (x_2 + jy_2) \\ &= \underbrace{(x_1 + x_2)}_{\text{Re}(z_1+z_2)} + j \underbrace{(y_1 + y_2)}_{\text{Im}(z_1+z_2)} \end{aligned}$$

**Multiplikation:**

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + jy_1) \cdot (x_2 + jy_2) \\ &= x_1x_2 + jx_1y_2 + jx_2y_1 + j^2y_1y_2 \\ &= \underbrace{(x_1x_2 - y_1y_2)}_{\text{Re}(z_1z_2)} + j \underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\text{Im}(z_1z_2)} \end{aligned}$$

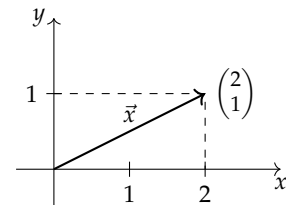
Um die Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + jy_1}{x_2 + jy_2}$$

zu verstehen, benötigen wir die *komplex konjugierte* Zahl  $z^* := x - jy$  zu  $z = x + jy$ . Wir erweitern  $z_1/z_2$  mit  $z_2^*$ :

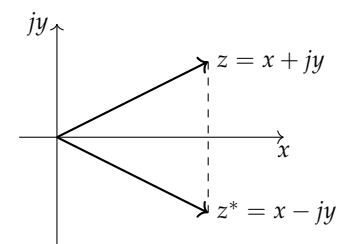
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*}.$$

Im  $\mathbb{R}^2$  visualisieren wir wie folgt: Der Vektor  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$  ist



In Physik und Mathematik wird die imaginäre Einheit meist  $i$  genannt.

Konjugation ist die Spiegelung an der reellen Achse:



Beachte: Die komplex konjugierte wird auch mit  $\bar{z}$  statt  $z^*$  bezeichnet.

Wir bemerken:

$$\begin{aligned} z_2 z_2^* &= (x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2) = x_2^2 - jx_2y_2 + jx_2y_2 - j^2y_2^2 \\ &= x_2^2 + y_2^2 \end{aligned}$$

und bekommen immer eine positive reelle Zahl!

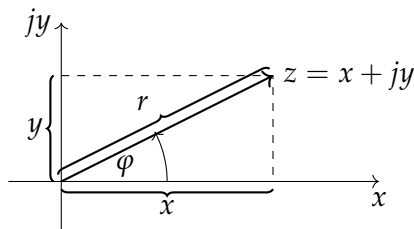
Wir bemerken weiter, dass  $z_2 z_2^* = x_2^2 + y_2^2$  nach dem Satz des Pythagoras das Quadrat der Länge von  $z$  ist, also definieren wir für  $z = x + jy$  den *Betrag* von  $z$  durch

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{zz^*}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \text{Division: } \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + j(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + j \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{aligned}$$

Damit haben wir in  $\mathbb{C}$  die Grundrechenarten und eine "Länge" von komplexen Zahlen bestimmt. Es geht aber noch mehr. Neben der cartesischen Beschreibung über Real- und Imaginärteil haben wir auch die *Polarform* über Winkel und Länge:



Elementargeometrisch erkennen wir  $x = r \cos(\varphi)$  und  $y = r \sin(\varphi)$ , also ist die Polarform

$$z = r(\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)), \quad r = |z|.$$

Nach Leonard Euler sind Sinus und Kosinus durch ihre Potenzreihen gegeben:

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp + \dots \\ \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm + \dots \end{aligned}$$

Die sogenannte *Eulersche e-Funktion* hat die Potenzreihe

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Damit berechnen wir  $e^{j\varphi}$ :

Wir schreiben auch  $\exp(x) = e^x$  und nennen die Funktion auch *Exponentialfunktion*. Was diese unendlichen Summen genau bedeuten, klären wir in Abschnitt 5.

Wir nutzen  $j^2 = -1$ ,  $j^3 = j^2 j = -j$ ,  $j^4 = j^3 j = -j j = 1$ ,  $j^5 = j^4 j = j$  usw.

$$\begin{aligned}
e^{j\varphi} &= 1 + \frac{j\varphi}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} \dots \\
&= 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots \\
&= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} \mp \dots + j \left( \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} \mp \dots \right) \\
&= \cos(\varphi) + j \sin(\varphi).
\end{aligned}$$

Damit haben wir die *Eulersche Formel*

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi)$$

gezeigt. Wir sehen insbesondere, dass  $e^{j\varphi}$   $2\pi$ -periodisch ist, d.h. es gilt für  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
e^{j(\varphi+k \cdot 2\pi)} &= \cos(\varphi + k \cdot 2\pi) + j \sin(\varphi + k \cdot 2\pi) = \cos(\varphi) + j \sin(\varphi) \\
&= e^{j\varphi} \quad (*)
\end{aligned}$$

Wir erhalten folgende Darstellung der Polarform

$$z = r \cdot e^{j\varphi} = r(\cos(\varphi) + j \sin(\varphi)).$$

Mit  $\varphi = \pi$  folgt die "schönste Formel der Mathematik"  $e^{j\pi} = -1$ .

Die Polarform mit der  $e$ -Funktion macht das Rechnen oft einfacher:

**Potenzieren:** Für natürliche Exponenten  $n \in \mathbb{N}$  haben wir für

$$z = r \cdot e^{j\varphi}$$

$$\begin{aligned}
z^n &= (r \cdot e^{j\varphi})^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} \\
&= r^n (\cos(n\varphi) + j \sin(n\varphi)) \quad (\text{Formel von Moivre})
\end{aligned}$$

**Wurzelziehen:** Für  $n \in \mathbb{N}_+$  und  $a = a_0 \cdot e^{j\alpha}$  mit  $a_0 > 0$  betrachten wir die Gleichung  $z^n = a$ . Wir benutzen die Polarform  $z = r \cdot e^{j\varphi}$  und bekommen

$$z^n = r^n \cdot e^{jn\varphi} = a_0 \cdot e^{j\alpha}.$$

Vergleich von Länge und Exponent gibt

$$a_0 = r^n, \quad \alpha = n\varphi.$$

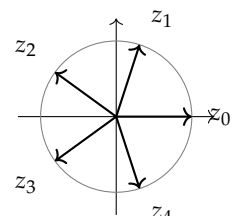
Aber Achtung! Da  $e^{j\varphi}$  nach (\*)  $2\pi$ -periodisch ist haben wir

$$n\varphi = \alpha + k \cdot 2\pi \text{ also } \varphi = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}.$$

Es gibt also genau  $n$  verschiedene Wurzeln von  $a = a_0 \cdot e^{j\alpha}$ , nämlich

$$z_k = \sqrt[n]{a_0} e^{j \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Dies sind die 5 Lösungen der Gleichung  $z^5 = 1$ :



Die Polarform ist auch hilfreich zum Multiplizieren und Dividieren. Für  $z_i = r_i e^{j\varphi_i}$ ,  $i = 1, 2$  ist

$$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Im Allgemeinen gilt sogar:

**Satz 2.1** (Hauptsatz der Algebra). *Jedes Polynom  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$  mit  $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$  hat in  $\mathbb{C}$  genau  $n$  Nullstellen.*

*Beispiel.* Die Gleichung  $x^3 + 2 = 0$  hat in  $\mathbb{R}$  nur die eine Nullstelle  $x_1 = -\sqrt[3]{2}$ . In  $\mathbb{C}$  bekommen wir über  $-2 = 2 \cdot e^{j\pi}$  die Nullstellen  $x_k = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{\pi+k \cdot 2\pi}{3}}$ ,  $k = 0, 1, 2$ , also

$$x_0 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{3}}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{3\pi}{3}} = -\sqrt[3]{2}$$

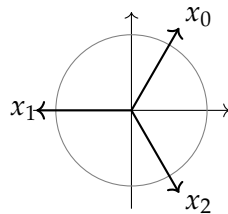
$$x_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{j\frac{5\pi}{3}}.$$

Da  $360^\circ \triangleq 2\pi$ , gilt  $1^\circ \triangleq \frac{\pi}{180}$  und also

$$\frac{\pi}{3} \triangleq \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$$

$$\frac{5\pi}{3} \triangleq 5 \cdot 60^\circ = 300^\circ$$

und wir finden die drei Lösungen in der Gauß'schen Zahlenebene



Wobei mehrfache Nullstellen wie z.B. die dreifach Nullstelle von  $x^3 = 0$  bei 0 entsprechend gezählt werden.

### 3 Reelle Funktionen und Folgen

Sind  $D$  und  $Z$  Mengen, so heißt  $f : D \rightarrow Z$  *Funktion*, wenn  $f$  jedem  $x \in D$  genau ein  $y = f(x) \in Z$  zuordnet. Die Menge  $D$  heißt *Definitionsgebiet* und  $Z$  heißt *Zielbereich* (auch Bildbereich oder Wertevorrat).

**Definition 3.1.** Sind  $A \subset D$  und  $B \subset Z$ , so sind

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \subset Z \quad (\text{Bild von } A)$$

$$f^{-1}(B) := \{x \in D \mid f(x) \in B\} \subset D \quad (\text{Urbild von } B)$$

Außerdem ist die Menge

$$\text{graph}(f) := \{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset D \times Z$$

der *Graph* von  $f$ .

**Definition 3.2.** Eine Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  zwischen zwei Mengen  $X$  und  $Y$  heißt *surjektiv*, wenn die Gleichung  $f(x) = y$  für jedes  $y$  mindestens eine Lösung hat, und *injektiv*, wenn sie für jedes  $y$  höchstens eine Lösung hat. Die Abbildung  $f$  heißt *bijektiv*, wenn sie *injektiv* und *surjektiv* ist.

Also ist eine Abbildung  $f$  bijektiv, wenn die Gleichung  $f(x) = y$  für jedes  $y$  genau eine Lösung hat. Bijektive Abbildungen sind also genau die umkehrbaren Abbildungen und wir schreiben  $f^{-1} : Z \rightarrow D$  für die Umkehrabbildung.

Sind  $f : D \rightarrow Z$  und  $g : Z \rightarrow P$ , so ist

$$g \circ f(x) := g(f(x))$$

die *Verknüpfung* (oder *Komposition*) von  $f$  und  $g$ .

*Beispiel.* (a) Eine Funktion  $f : D \rightarrow Z$  heißt *linear*, wenn

$$\forall x, y \in D, \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Ist  $D, Z \subset \mathbb{R}$ , so sind die linearen Funktionen von der Form  $f(x) = ax$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .

(b) Funktionen der Form  $f(x) = ax + b$  heißen *affin linear*.

(c) Funktionen  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  heißen *Polynome*. Ist  $a_n \neq 0$ , so hat  $p$  den *Grad*  $n$ .

(d) Für  $a > 0$  gibt es die *Exponentialfunktion*  $f(x) = a^x$ . Sie erfüllen die Funktionalgleichung  $a^{x+y} = a^x a^y$ . Es gibt eine besondere Exponentialfunktion, nämlich die, welche  $f'(x) = f(x)$  und  $f(0) = 1$  erfüllt. Die ist  $f(x) = e^x$  mit *Eulerschen Zahl*

$$e := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \dots \approx 2.71828182\dots$$

Beachte: Wir schreiben  $f^{-1}(B)$  auch, wenn  $f$  keine Umkehrfunktion hat! Ein Beispiel für das effiziente Überladen von Symbolen.

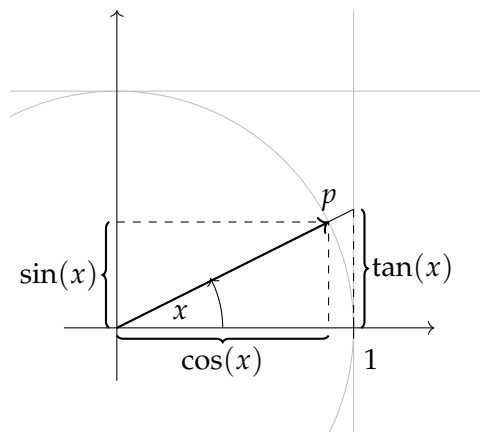
Die Definition von linearen Funktionen ist also evtl. ein wenig anders, als Sie sie kennen: Da für lineare Funktionen immer  $f(0) = 0$  gelten muss, ist  $f(x) = ax + b$  nur für  $b = 0$  linear.

- (e) Die Funktion  $f(x) = a^x$  ist für  $a \neq 1$  als Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow ]0, \infty[$  bijektiv. Ihre Umkehrfunktion ist der *Logarithmus zur Basis  $a$* :

$$y = \log_a(x).$$

Der Logarithmus erfüllt die Funktionalgleichung  $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$ . Der Logarithmus zur Basis  $e$  heißt *natürlicher Logarithmus*, oft geschrieben  $\ln(x) := \log_e(x)$ . Der *dekadische Logarithmus*  $\log_{10}(x)$  gibt grob die Anzahl der Stellen von  $x$  in der Dezimaldarstellung an. Schließlich ist in der Informatik noch der binäre Logarithmus  $\text{lb}(x) = \log_2(x)$  gebräuchlich (manchmal auch  $\text{ld}(x)$  für logarithmus dualis).

- (f) Die *trigonometrischen Funktionen* lassen sich mit der Geometrie des Kreises definieren:

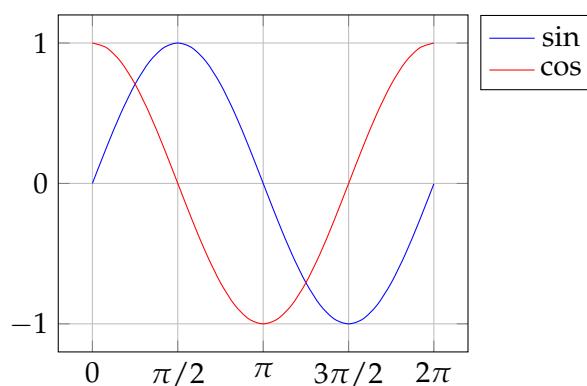


Wir werden hierbei Winkel immer im *Bogenmaß* angeben, d.h. der entsprechenden Länge des Bogens auf dem Einheitskreis, d.h. es ist

$$90 \triangleq \frac{\pi}{2}, 180 \triangleq \pi, 270 \triangleq \frac{3\pi}{2}, 360 \triangleq 2\pi.$$

Aus dem Satz des Pythagoras folgt

$$\sin(x)^2 + \cos(x)^2 = 1.$$





Es gelten Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Die Analysis baut auf den Begriffen „Folge“ und „Grenzwert“ auf. Die beiden Begriffe sind aber auch praktisch von Bedeutung:

*Beispiel* (Bisektionsverfahren zur Berechnung von Nullstellen). Es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(a) < 0$  und  $f(b) > 0$  gegeben. Gesucht ist  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = 0$ . Das Bisektionsverfahren ist der folgende Algorithmus:

- Setze  $a_0 := a, b_0 := b$ .
- Setze  $x := \frac{a_0+b_0}{2}$ .
- Ist  $f(x) > 0$ , setze  $a_1 := a_0$  und  $b_1 := x$ , ist  $f(x) < 0$ , setze  $a_1 := x, b_1 := b_0$  und ist  $f(x) = 0$ , so setze  $x_0 = x$  und breche ab.
- Setze  $x := \frac{a_1+b_1}{2}$  usw.

Wir erwarten nun, dass sowohl  $a_n$  als auch  $b_n$  „gegen den Grenzwert  $x_0$  konvergieren“.

Die Begriffe „Folge“, „Konvergenz“ und „Grenzwert“ müssen wir nun klären.

**Definition 3.3.** Eine *reelle Folge* ist  $(a_n)$  ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \ni n \mapsto a_n \in \mathbb{R}.$$

- Beispiel.*
1. Die explizit definierte Folge  $a_n = 1/n$  heißt *harmonische Folge*.
  2. Folgen können *rekursiv* definiert werden, so ist z.B. die Fibonacci-Folge definiert durch

$$a_0 := 1, a_1 := 1, a_{n+1} := a_n + a_{n-1}, n \geq 1.$$

Es ergibt sich 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Hier nun der zentrale Begriff den Grenzwertes bzw. von Konvergenz:

**Definition 3.4.** Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt *konvergent* mit Grenzwert  $a$ , geschrieben  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  oder  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ , wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$

Eine nicht konvergente Folge nennt man *divergent*.

Folgen müssen nicht bei  $n = 0$  anfangen, man schreibt dann manchmal  $(a_n)_{n \geq n_0}$  oder lässt den Anfang weg, wenn es nicht drauf ankommt oder aus dem Kontext klar ist.

Intuitiv kann man sagen, dass eine konvergente Folge ihren Grenzwert *approximiert*, d.h. beliebig gut annähert. Man kann die Definition nämlich zum Beispiel so lesen: Für jede vorgegebene Genauigkeit  $\epsilon$  gibt es einen Folgenindex  $N$ , so dass ab da alle Folgenglieder  $\epsilon$ -nah an  $a$  liegen.

**Beispiel.** Die Folge  $a_n = \frac{n}{n+1}$  hat die ersten Folgenglieder  $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}$ . Wir vermuten, dass die Folge den Grenzwert  $a = 1$  hat. Das können wir auch rigoros zeigen, indem wir die Definition verifizieren: Wir berechnen

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \left| \frac{n-(n+1)}{n+1} \right| \\ &= \left| \frac{-1}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Jetzt müssen wir zu jedem  $\epsilon > 0$  ein  $N$  finden, so dass für  $n \geq N$  immer  $|a_n - a| = \frac{1}{n+1} < \epsilon$  gilt. Durch einfaches Umformen sehen wir, dass die letzte Ungleichung äquivalent zu  $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$  ist. Wir können zu jedem  $\epsilon$  irgendeinen Wert  $N > \frac{1}{\epsilon} - 1$  nehmen.

Um die Definition von Konvergenz zu benutzen, muss man schon einen Grenzwert kennen (oder raten und verifizieren). Es gibt auch eine Definition von Konvergenz, die ohne einen bekannten Grenzwert auskommt. Die Idee dahinter: Bei einer konvergenten Folge kann hinten raus nicht mehr viel passieren, d.h. die Folgenglieder die spät kommen, liegen alle nah beieinander. Das wird durch die folgende Definition rigoros definiert.

**Definition 3.5.** Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt *Cauchy-Folge*, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \epsilon.$$

**Satz 3.6.** Für eine reelle Folge gilt

$$(a_n) \text{ konvergent} \iff (a_n) \text{ ist Cauchy-Folge.}$$

*Beweis.*

$\Rightarrow$ : Folgt aus der Dreiecksungleichung: Ist  $(a_n)$  konvergent mit Grenzwert  $a$ , so gibt es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine  $N$ , so dass für  $n \geq N$  gilt  $|a_n - a| < \epsilon/2$ . Für  $n, m \geq N$  gilt dann

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

$\Leftarrow$ : Das ist alles andere als offensichtlich, sondern eine fundamentale Eigenschaft der reellen Zahlen, nämlich die angekündigte *Vollständigkeit*.

Wenn die  $N$  möglichst knapp wählen wollen, können Sie die Gaußklammer  $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$  benutzen und  $N = \lfloor \frac{1}{\epsilon} - 1 \rfloor + 1$  nehmen.

Für *rationale* Folgen ist diese Implikation falsch! Es gibt Folgen von rationalen Zahlen, die eine Cauchy-Folge bilden, die aber keinen *rationalen* Grenzwert haben (z.B. die Folge  $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ ).

□

**Satz 3.7.** Ein konvergente Folge hat genau einen Grenzwert.

*Beweis.*

Wir nehmen an, dass die Folge  $(a_n)$  die Grenzwerte  $a$  und  $a'$  habe. Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es dann  $N$ , so dass für  $n \geq N$  sowohl  $|a_n - a| < \epsilon/2$  als auch  $|a_n - a'| < \epsilon/2$  gilt. Dann gilt aber auch

$$|a - a'| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Da dies aber für *alle*  $\epsilon > 0$  gilt, gilt  $|a - a'| = 0$ , also folgt  $a = a'$ .

□

## 4 Konvergenzsätze und Konvergenzkriterien

**Satz 4.1.** Es gilt

$$(a_n) \text{ konvergent} \implies (a_n) \text{ beschränkt.}$$

Für Grenzwerte gelten Rechenregeln:

**Satz 4.2.** Es gelte  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . Dann gilt

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} ca_n = ca$  für  $c \in \mathbb{R}$ ,
- (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b$ ,
- (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab$ ,
- (d) für  $b \neq 0$  auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a / b$ ,

*Beweis.*

Wir zeigen ein paar der Aussagen:

- (b) In diesem Fall gibt es zu  $\epsilon > 0$  ein  $N_a$  und eine  $N_b$ , so dass für  $n \geq N_a$  gilt  $|a_n - a| < \epsilon$  und für  $n \geq N_b$  gilt  $|b_n - b| < \epsilon$ . Für  $n \geq \max(N_a, N_b)$  gilt dann

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq 2\epsilon,$$

was die Behauptung zeigt.

- (c) Zuerst rechnen wir

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b|. \end{aligned}$$

Wir wollen, dass der letzte Ausdruck kleiner als  $\epsilon$  wird.

Wir nehmen vorerst  $b \neq 0$  an. Da  $(a_n)$  konvergent ist, ist  $(a_n)$  nach Satz 4.1 beschränkt, d.h. es gibt  $C$ , so dass  $|a_n| \leq C$ . Da  $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b$ , existiert ein  $N_b$ , so dass für  $n \geq N_b$  gilt  $|b_n - b| < \epsilon / (2C)$ . Wegen  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$  existiert ein  $N_a$ , so dass für  $n \geq N_a$  gilt  $|a_n - a| < \epsilon / (2|b|)$ . Wir haben also mit der obigen Rechnung für  $n \geq \max(N_a, N_b)$

$$|a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |a_n - a| |b| \leq C \frac{\epsilon}{2C} + \frac{\epsilon}{2|b|} |b| = \epsilon.$$

Der Fall  $b = 0$  ist noch einfacher, da der zweite Summand einfach wegfällt.

□

*Beispiel* (Ausklammern des schnellsten Terms). Betrachten wir die Situation

$$x_n = \frac{p(n)}{q(n)}, \quad p, q \text{ Polynome in } n.$$

Eine Folge  $(a_n)$  heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl  $C$  gibt, so dass  $|a_n| \leq C$  für alle  $n$  gilt. Die Umkehrung in Satz 4.1 ist falsch, wie die Folge  $a_n = (-1)^n$  zeigt.

Wir haben also  $p(n) = a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_1 n + a_0$  und  $q(n) = b_s n^s + \dots + b_1 n + b_0$ . Wir werden sehen, dass es für Konvergenz von  $a_n$  im wesentlichen darauf ankommt, welcher Summand (im Zähler oder im Nenner) am schnellsten wächst. Wir betrachten drei Fälle:

$s > r$ : In diesem Fall ist  $b_s n^s$  der Term, der am schnellsten wächst. Um die Grenzwertsätze anzuwenden, erzeugen wir konvergente Folgen, indem wir den Term  $n^s$  ausklammern:

$$x_n = \frac{n^s}{n^s} \frac{a_r n^{r-s} + \dots + a_1 n^{1-s} + a_0 n^{-s}}{b_s + b_{s-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-s}}.$$

Es gilt  $n^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  für  $k < 0$  und da hier alle Exponenten am  $n$  kleiner als  $-1$  sind haben wir für den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_r n^{r-s} + \dots + a_1 n^{1-s} + a_0 n^{-s}}{b_s + b_{s-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-s}} \right] \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} [a_r n^{r-s}] + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} [a_1 n^{1-s}] + \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0 n^{-s}]}{\lim_{n \rightarrow \infty} [b_s] + \lim_{n \rightarrow \infty} [b_{s-1} n^{-1}] + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} [b_0 n^{-s}]} \\ &= \frac{0 + \dots + 0}{b_s + 0 + \dots + 0} = 0 \end{aligned}$$

$s = r$ : Wir gehen genau so vor und bekommen

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_s + a_{s-1} n^{-1} + \dots + a_1 n^{1-s} + a_0 n^{-s}}{b_s + b_{s-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-s}} \right] \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} [a_s] + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} [a_1 n^{1-s}] + \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0 n^{-s}]}{\lim_{n \rightarrow \infty} [b_s] + \lim_{n \rightarrow \infty} [b_{s-1} n^{-1}] + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} [b_0 n^{-s}]} \\ &= \frac{a_s + \dots + 0}{b_s + 0 + \dots + 0} = \frac{a_s}{b_s}. \end{aligned}$$

$s < r$ : In diesem Falls wächst der Zähler schneller als der Nenner und wir erwarten keine Konvergenz.

**Definition 4.3.** Eine reelle Folge  $(a_n)$  heißt

- *wachsend*, falls für  $n < m$  immer  $a_n \leq a_m$  gilt,
- *streng wachsend*, falls für  $n < m$  immer  $a_n < a_m$  gilt,
- *fallend*, falls für  $n < m$  immer  $a_n \geq a_m$  gilt,
- *streng fallend*, falls für  $n < m$  immer  $a_n > a_m$  gilt,
- *monoton*, wenn sie wachsend oder fallend ist,
- *streng monoton*, wenn sie streng wachsend oder streng fallend ist,
- *nach oben beschränkt*, wenn es  $C \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $n$  gilt  $a_n \leq C$ ,
- *nach unten beschränkt*, wenn es  $C \in \mathbb{R}$  gibt, so dass für alle  $n$  gilt  $a_n \geq C$ ,
- *beschränkt*, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Eine unbeschränkte Folge kann nicht konvergent sein. Sie muss aber auch nicht in folgenden Sinne „gegen unendlich gehen“.

**Definition 4.4.** Eine Folge  $(a_n)$  *divergiert bestimmt gegen  $\infty$* , wenn gilt

$$\forall C \geq 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n \geq C$$

und sie *divergiert bestimmt gegen  $-\infty$* , wenn  $(-a_n)$  bestimmt gegen  $\infty$  divergiert.

*Beispiel.* (a) Die Folge  $a_n = n^k$  divergiert bestimmt gegen  $\infty$ , wenn  $k \geq 1$  gilt.

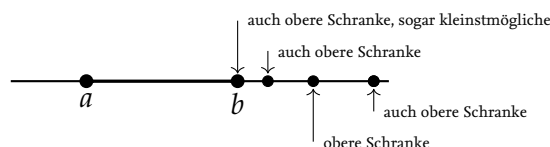
(b) Die Folge

$$(a_n) = (0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, \dots)$$

ist nach oben unbeschränkt, nicht konvergent und auch nicht bestimmt divergent.

**Definition 4.5.** Es sei  $M \subset \mathbb{R}$  eine Menge. Wir nennen  $x \in \mathbb{R}$  eine *obere (untere) Schranke* von  $M$ , wenn für alle  $w \in M$  gilt  $w \leq x$  (bzw.  $w \geq x$ ).

*Beispiel.* Für  $M = [a, b]$  ist jedes  $x \geq b$  eine obere Schranke und jedes  $x \leq a$  eine untere Schranke.



**Definition 4.6.** Ist  $M \subset \mathbb{R}$  so heißt  $s \in \mathbb{R}$  *Supremum* von  $M$ , geschrieben  $s = \sup M$ , wenn  $s$  die kleinste obere Schranke ist, d.h.  $s$  ist eine obere Schranke von  $M$  und jedes  $s' < s$  ist keine obere Schranke von  $M$ .

Entsprechend heißt  $c$  *Infimum* von  $M$ , geschrieben  $c = \inf M$ , wenn  $c$  die größte untere Schranke ist.

Gilt für das Supremum  $s$  von  $M$  auch  $s \in M$ , so ist  $s$  *Maximum* von  $M$  und entsprechend ist das Infimum  $c$  von  $M$  für  $c \in M$  ein *Minimum* von  $M$ .

*Beispiel.* 1. Für  $M = [a, b]$  ist  $b = \sup M$  und  $a = \inf M$ .

2. Für  $M' = [a, b[$  ist ebenfalls  $b = \sup M'$  und  $a = \inf M'$ !

Im ersten Fall ist aber auch  $b = \max M$ , während  $\max M'$  nicht existiert!

**Satz 4.7.** Eine monotone und beschränkte reelle Folge hat einen Grenzwert.

Man spricht auch von (uneigentlicher) Konvergenz gegen  $\pm\infty$ .

Infima und Suprema sind eindeutig bestimmt. Dass jede beschränkte Teilmenge des reellen Zahlen ein Infimum und ein Supremum hat, ist eine weitere Möglichkeit, die Vollständigkeit der reellen Zahlen zu formulieren.

Ist  $(a_n)$  wachsend und nach oben beschränkt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und entsprechend gilt für  $(a_n)$  fallend und nach unten beschränkt, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

*Beispiel.* Für  $p > 0$  betrachten wir

$$a_n = \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n.$$

Man kann zeigen, dass diese Folge streng wachsend und nach oben beschränkt ist. Sie hat also einen Grenzwert und dieser ist für  $p = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

und im Allgemeinen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p.$$

Ist eine Folge nur beschränkt und nicht auch monoton, so muss sie natürlich nicht konvergieren, wie man an dem Beispiel

$$a_n := (-1)^n, \quad (1, -1, 1, -1, \dots)$$

sieht. Diese Folge hat aber konvergente Teilfolgen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} a_{2n} &= (-1)^{2n} = 1 \\ a_{2n+1} &= (-1)^{2n+1} = -1 \end{aligned}$$

mit Grenzwerten 1 bzw.  $-1$ .

**Satz 4.8** (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge hat eine konvergente Teilfolge.*

Grenzwerte von Teilfolgen nennen wir *Häufungspunkte*. Eine alternative Definition ist:  $h$  ist Häufungspunkt von  $(a_n)$  wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a_n - h| < \epsilon.$$

Man formuliert den Begriff der Konvergenz anschaulich mit Hilfe von topologischen Begriffen:

**Definition 4.9.** Die Menge  $B_\epsilon(x) := ]x - \epsilon, x + \epsilon[$  heißt  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$ . Wir nennen eine Menge  $D \subset \mathbb{R}$  *offen*, wenn gilt:

$$\forall x \in D \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset D.$$

Also ist eine alternative Formulierung des Satzes von Bolzano Weierstraß: Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.

Mit anderen Worten: Eine Menge  $D$  heißt offen, wenn es für jedes  $x \in D$  eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$  gibt, welche ganz in  $D$  liegt.

**Beispiel.** Die offenen Intervalle  $I = ]a, b[$  sind offen, die Intervalle  $[a, b[$  und  $[a, b]$  hingegen nicht, da  $x = a$  in diesen Intervallen liegt und jedem  $\epsilon$ -Umgebung von  $x = a$  auch Punkte  $< a$  enthält.

**Definition 4.10.** Für  $x \in \mathbb{R}$  heißt  $U \subset \mathbb{R}$  eine *Umgebung* von  $x$ , wenn  $U$  eine  $\epsilon$ -Umgebung von  $x$  enthält.

Damit können wir sagen:

Es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , wenn jede Umgebung von  $a$  alle bis auf endlich viele Folgenglieder  $(a_n)$  enthält.

**Beispiel** (Konvergenz im  $\mathbb{R}^n$ ). Wir können alles zu Konvergenz auch für Folgen von Vektoren  $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$  machen! Wir müssen einfach nur die Absolutbeträge  $|\cdot|$  durch eine *Norm*  $\|\cdot\|$  ersetzen, z.B. durch die *Euklidische Norm*

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

oder auch in  $\mathbb{C}$  oder sogar  $\mathbb{C}^n$ . Für einen Vektor  $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$  ist die *unitäre Norm*

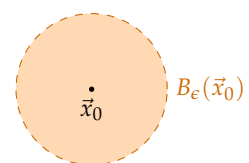
$$\|\vec{z}\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}.$$

Es gilt zum Beispiel: Eine Folge  $(\vec{x}_k)$  in  $\mathbb{R}^n$  konvergiert genau dann gegen  $\vec{x}$ , wenn die Koordinaten konvergieren, d.h., wenn für  $i = 1, \dots, n$  gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k)_i = x_i$ .

Auch den Begriff der  $\epsilon$ -Umgebung können wir im  $\mathbb{R}^n$  formulieren: Die  $\epsilon$ -Umgebung von  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  ist

$$B_\epsilon(\vec{x}_0) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_2 < \epsilon\}.$$

Die Definition einer Umgebung von  $\vec{x}$  im  $\mathbb{R}^n$  ist dann komplett analog und auch die Definition von offenen Mengen im  $\mathbb{R}^n$  ist genau wie oben.



## 5 Unendliche Reihen

**Definition 5.1.** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist definiert als Folge ihrer *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k.$$

Dabei steht das Symbol  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  sowohl für die Folge  $\left(\sum_{k=0}^n a_k\right)_n$  der Partialsummen, also auch für deren Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k$  (falls dieser existiert). Dieser Grenzwert heißt auch *Wert der Reihe*.

**Beispiel.** 1. Die *geometrische Reihe*  $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ : Für die Partialsummen  $\sum_{k=0}^n q^k$  gilt

$$\begin{aligned} (1-q) \sum_{k=0}^n q^k &= (1-q)(1+q+q^2+\dots+q^n) \\ &= 1+q+q^2+\dots+q^n \\ &\quad - q(1+q+q^2+\dots+q^n) \\ &= 1+q+q^2+\dots+q^n \\ &\quad - q-q^2-\dots-q^n-q^{n+1} = 1-q^{n+1}. \end{aligned}$$

Es folgt für  $q \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Den Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}$  kennen wir: Für  $|q| < 1$  ist der Grenzwert 0 und  $|q| > 1$  divergiert die Folge. Es folgt also: Für  $|q| < 1$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

2. Die *harmonische Reihe* ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

ist divergent!

Wir betrachten die Partialsumme bis zum Summanden  $2^n$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}}_{> 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{> 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2^{n-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^n}}_{> 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}} \\ &> 1 + (n-1) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+1). \end{aligned}$$

Man schreibt auch suggestiv

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$$

Beachte aber: Eine Reihe ist keine Summe und ihr Wert wird nicht bestimmt, in dem Zahlen addiert werden, sondern es wird ein Grenzwert berechnet!

Beachte: Das geht auch für komplexes  $q$ !



Wir sehen: Die Folge der Partialsumme divergiert bestimmt gegen  $\infty$  und daher schreibt man auch

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

*Alternierende Reihen* sind Reihen, bei denen sich positive und negative Summanden abwechseln, also  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$  mit  $a_k > 0$ .

**Satz 5.2** (Kriterium für alternierende Reihen). *Ist  $a_k$  eine fallende Nullfolge, so konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ .*

*Beispiel.* Es gilt zum Beispiel

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \ln(2),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4},$$

Das folgende Kriterium ist ein einfacher Test mit dem man Konvergenz widerlegen, aber nicht zeigen kann:

**Satz 5.3** (Triviale Kriterium). *Ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  konvergent, so gilt  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ .*

*Beweis.*

Ist die Reihe konvergent, so ist die Folge der Partialsummen  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  eine Cauchy-Folge, d.h. zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es  $N$ , so dass für  $n, m \geq N$  immer  $|s_m - s_n| < \epsilon$  gilt. Wir können also ganz speziell zu jedem  $n > N$  immer  $m = n + 1$  wählen und haben

$$\epsilon > |s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}|.$$

Das heißt aber genau  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . □

Ist die Folge  $a_k$  der Summanden keine Nullfolge, so kann die Reihe  $\sum_k a_k$  nicht konvergieren.

**Definition 5.4.** Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergent ist.

Es gilt

absolute Konvergenz  $\implies$  Konvergenz.

Aus Satz 4.7 folgern wir:

**Satz 5.5.** *Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  ist genau dann absolut konvergent, wenn die Folge  $\left( \sum_{k=0}^n |a_k| \right)$  beschränkt ist.*

1

**Satz 5.6** (Majoranten-, Quotienten- und Wurzelkriterium).

(a) Gilt für eine Folge  $(b_k)$  sowohl  $|a_k| \leq b_k$  als auch, dass die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergiert, so ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

Majorantenkriterium

(b) Gilt  $a_k \neq 0$  und existiert ein  $k \geq k_0$ , und ein  $q < 1$ , so dass für alle  $k \geq k_0$  gilt

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q,$$

so ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

Quotientenkriterium

(c) Existiert ein  $k \geq k_0$ , und ein  $q < 1$ , so dass für alle  $k \geq k_0$  gilt

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq q,$$

so ist  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent.

Wurzelkriterium

Quotienten- und Wurzelkriterium sind einfach einzusehen: Beim Quotientenkriterium gilt ab einem  $k_0$  immer  $|a_{k+1}| \leq q|a_k|$ , also  $|a_k| \leq q^{k-k_0}|a_{k_0}|$  und da die rechte Seite eine konvergente Reihe bildet (zumindest ab dem Index  $k_0$ , davor liegen nur endlich viele Summanden), konvergiert die Reihe nach dem Majorantenkriterium. Beim Wurzelkriterium sieht man direkt  $|a_k| \leq q^k$  für  $k \geq k_0$  und schließt wieder mit dem Majorantenkriterium.

**Satz 5.7** (Umordnungssatz). Ist die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut konvergent, so kann man die Reihenfolge der Summanden beliebig vertauschen (d.h. die Partialsummen abändern) ohne dass sich der Wert der Reihe ändert.

Sind die Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  absolut konvergent so gilt

$$\left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i}.$$

Diese Formel nennt man auch Cauchy-Produktformel für Reihen.

**Beispiel** (Additionstheorem der Exponentialfunktion). Mit dem vorigen Satz können wir das Additionstheorem für die Exponentialfunktion zeigen: Es ist

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Diese Reihe ist für jedes  $x$  absolut konvergent. Das folgt mit dem Quotientenkriterium: Es gilt mit  $a_k = x^k/k!$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \frac{k!}{x^k} \right| = \frac{|x|}{k+1}.$$

Für  $k_0 > |x|$  gilt also für  $k > k_0$  immer  $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq \frac{|x|}{|x|+1} =: q < 1$ .

Mit dem binomischen Lehrsatz bekommen wir.

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{i} x^i y^{k-i} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!(k-i)!} x^i y^{k-i} \end{aligned}$$

Andererseits gibt uns Satz 5.7 (mit  $a_k = \frac{x^k}{k!}$ ,  $b_k = \frac{y^k}{k!}$ )

$$\exp(x) \exp(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^k \frac{x^i}{i!} \frac{y^{k-i}}{(k-i)!}$$

und wir sehen, dass beide Ausdrücke gleich sind.

## 6 Stetige Funktionen

Untersuchen wir jetzt Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definition 6.1.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir sagen „ $f$  konvergiert für  $x \rightarrow x_0$  gegen  $y_0$ “, falls für jede Folge  $x_n$  in  $D$  mit  $x_n \neq x_0$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

Wir schreiben dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \text{oder} \quad f(x) \rightarrow y_0, \quad (\text{für } x \rightarrow x_0)$$

und nennen  $y_0$  den *Grenzwert von  $f$  bei  $x_0$* .

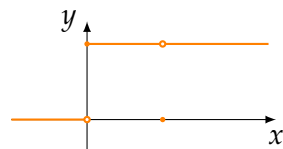
Gilt für jede Folge  $x_n$  mit  $x_n < x_0$  immer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = y_0.$$

so schreiben wir  $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = y_0$  und nennen  $y_0$  den *linksseitigen Grenzwert von  $f$  bei  $x_0$* . Entsprechend bekommen wir den *rechtsseitigen Grenzwert*  $\lim_{x \searrow x_0} f(x)$ , wenn wir  $x_n > x_0$  fordern.

*Beispiel.* Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \text{ oder } x = 1 \\ 1 & : \text{sonst.} \end{cases}$$



Der links- und rechtsseitige Grenzwert bei  $x_0 = 0$  sind

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 0, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \searrow 0} f(x) = 1.$$

Insbesondere hat  $f$  keinen Grenzwert bei  $x_0 = 0$ . In  $x_0 = 1$  gilt

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

aber da  $f(1) = 0$  gilt, stimmt der Grenzwert von  $f$  bei 1 nicht mit dem Wert bei 1 überein!

**Definition 6.2.** Wir sagen, dass eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  *stetig* bei  $x_0 \in D$  ist, wenn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt.

Existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , so nennen wir  $f$  in  $x_0$  *stetig ergänzbar*. (Das ist auch möglich, wenn  $x_0 \notin D$  gilt, und es Folgen  $x_n \in D$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$  gibt.)

Wir lassen hierbei  $x_0 = \pm\infty$  zu und müssen dann entsprechen alle Folgen  $x_n$  betrachten, die bestimmt gegen  $+\infty$  (bzw  $-\infty$ ) divergieren.

Eine äquivalente Definition von Stetigkeit ist das  $\epsilon$ - $\delta$ -Kriterium:  $f$  ist stetig bei  $x_0$ , wenn gilt

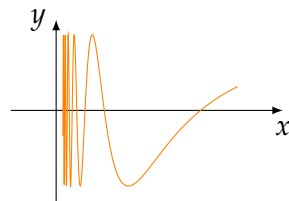
$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D :$$

$$|x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon.$$

Intuitiv bedeutet das: Kleine Änderungen im Argument  $x$  haben nur kleine Änderungen im Ergebnis  $f(x)$  zur Folge.

**Beispiel.** (a) Wir betrachten die Funktion  $f(x) = 5x + 2$  und zeigen, dass  $f$  in jedem  $x_0$  stetig ist. Hier folgt die Stetigkeit einfach aus den Rechenregeln für Grenzwerte: gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ , so gilt nach Satz 4.2 auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 5x_n + 2 = 5x_0 + 2 = f(x_0)$ .

(b) Wir betrachten die Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(\frac{1}{x})$ .



Wir betrachten  $x_0 = 0$  (wo die Funktion nicht definiert ist) und spezielle Folgen

$$x_n = \frac{1}{2k\pi}, \quad y_n = \frac{1}{(2k+1)\pi}.$$

Es gilt  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  and  $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  und weiterhin gilt für alle  $n$

$$f(x_n) = \cos(2k\pi) = 1, \quad f(y_n) = \cos((2k+1)\pi) = -1$$

und wir sehen  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 1 \neq -1 = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$ . Das heißt, die Funktion hat keinen Grenzwert bei  $x_0$  und kann also auch nicht stetig in 0 fortgesetzt werden.

**Satz 6.3.** Es seien  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ . Dann gilt

- (a)  $f + g$  ist stetig in  $x_0$ .
- (b)  $af$  ist für  $a \in \mathbb{R}$  stetig bei  $x_0$ .
- (c)  $f \cdot g$  ist stetig bei  $x_0$ .
- (d) Ist  $g(x_0) \neq 0$ , so ist  $f/g$  stetig bei  $x_0$ .
- (e) Gilt  $f : D \rightarrow E$  und  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D, E \subset \mathbb{R}$  und ist  $f$  stetig bei  $x_0$  und  $g$  stetig bei  $y_0 = f(x_0)$ , dann ist  $g \circ f$  stetig bei  $x_0$ .

**Beispiel.** Da die konstante Funktion  $f(x) = c$  und die Identität  $f(x) = x$  stetig sind, folgt sofort, dass alle Polynome  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  und auch rationale Funktionen (Quotienten von zwei Polynomen) stetig sind, wo sie definiert sind.

Auch die Funktionen  $\sin, \cos, \exp$  sind stetig - das folgt allerdings *nicht* aus dem obigen Satz da die Funktionen als Reihen definiert sind und der Satz nur Aussagen über Summen macht.

**Satz 6.4.**

- (a) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gilt  $f(a) \cdot f(b) < 0$  (d.h. die Vorzeichen von  $f$  an den Enden sind verschieden), so gibt es eine Nullstelle von  $f$  in  $]a, b[$ .
- (b) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und gilt  $f(a) < c < f(b)$ , so gibt es ein  $x_0 \in ]a, b[$  mit  $f(x_0) = c$ .
- (c) Ist  $f$  stetig und streng monoton, so ist auch  $f^{-1}$  stetig und streng monoton.
- (d) Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  beschränkt und es gibt  $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$  mit

$$f(x_{\max}) = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad f(x_{\min}) = \inf_{x \in [a, b]} f(x).$$

Stetigkeit lässt sich analog für Funktionen  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  definieren: Eine solche Funktion ist stetig, wenn für  $\vec{x}^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{x}$  immer folgt  $\vec{f}(\vec{x}^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \vec{f}(\vec{x})$ .

Eigenschaft (d) aus Satz 6.4 gilt für Definitionsbereiche  $I = [a, b]$ . Für eine entsprechende Aussage für Funktionen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $D \subset \mathbb{R}^n$  brauchen wir weitere Begriffe:

- Definition 6.5.** (a) Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *abgeschlossen*, wenn für jede konvergente Folge  $\vec{x}^k \in \mathbb{R}^n$  deren Folgenglieder in  $D$  liegen gilt, dass auch ihr Grenzwert in  $D$  liegt.
- (b) Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *beschränkt*, wenn es ein  $C$  gibt, so dass für alle  $x \in D$  immer  $\|x\|_2 \leq C$  gilt.
- (c) Eine Menge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

**Beispiel.** 1. Die Intervalle  $] -\infty, a]$  und  $[a, \infty[$  sind abgeschlossen, aber nicht beschränkt.

2. Die Menge  $] -\infty, \infty[$  ist sowohl offen, als auch abgeschlossen. Die Mengen  $[a, b[$  und  $]a, b]$  sind weder offen, noch abgeschlossen (aber beschränkt).

3. Die Menge  $D = [0, 1] \cup \{2\}$  ist kompakt.

4. Die Menge  $D = \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$  ist beschränkt, aber nicht abgeschlossen, daher nicht kompakt.

5. Die *offenen Bälle*  $B_r(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_2 < r\}$  (mit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  und  $r > 0$ ) sind offen und beschränkt. Die *abgeschlossenen Bälle*  $\bar{B}_r(\vec{x}_0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x} - \vec{x}_0\|_2 \leq r\}$  im  $\mathbb{R}^n$  sind kompakt.

**Satz 6.6.** Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  kompakt und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so ist  $f$  beschränkt und nimmt sein Maximum und Minimum in  $D$  an.

Stetige Funktionen die das Vorzeichen wechseln, haben also eine Nullstelle.

Dies ist der Zwischenwertsatz.

Stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen nehmen also Maximum und Minimum wirklich an.

Alternativ kann man auch definieren:  $D \subset \mathbb{R}^n$  ist abgeschlossen, wenn das Komplement  $D^c := \mathbb{R}^n \setminus D$  offen ist.

- Beispiel.* (i) Jede beliebige Norm  $\|\cdot\|$  auf dem  $\mathbb{R}^n$  eine stetige Funktion auf dem  $\mathbb{R}^n$ .
- (ii) Ist  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  eine Matrix, so ist die Abbildung  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gegeben durch  $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$  eine stetige Funktion.
- (iii) Die *Einheitssphäre*  $S^{n-1} := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_2 = 1\}$  und der abgeschlossene *Einheitsball*  $\bar{B}_1(0) := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$  sind kompakt.

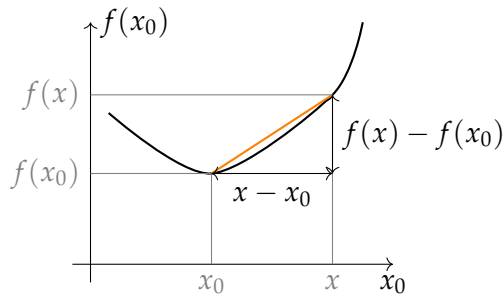
## 7 Differenzierbare Funktionen

Die Ableitung einer Funktion repräsentiert die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion. Diese Steigung ist als *Grenzwert* von Sekantensteigungen definiert. In diesem Abschnitt ist immer  $I = ]a, b[$  ein offenes Intervall.

**Definition 7.1** (Differenzierbarkeit von Funktionen). Eine Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *differenzierbar* in  $x_0 \in I$ , wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =: f'(x_0)$$

existiert. Der Wert  $f'(x_0)$  des Grenzwerts heißt *Ableitung* von  $f$  in  $x_0$ .



Ersetzt man  $x - x_0 = h$ , bekommt man die Schreibweise  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ .  
Man schreibt auch  $\frac{df}{dx}(x_0)$  für die Ableitung.

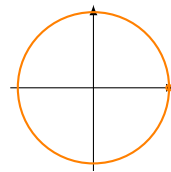
Wir können den Begriff der Ableitung direkt verallgemeinern:

**Definition 7.2** (Kurve). Eine stetige Funktion  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *Kurve* im  $\mathbb{R}^m$ .

*Beispiel.* (a) Die Kurve

$$\vec{f}(t) := \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in ]0, 2\pi[, \quad r > 0$$

ist (bis auf einen Punkt) ein Kreis mit Radius  $r$  und dem Mittelpunkt im Ursprung.



(b) Der Graph der Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  kann als Kurve geschrieben werden:

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I.$$

**Definition 7.3** (Differenzierbarkeit von Kurven). Eine Kurve  $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt *differenzierbar* in  $t_0$ , falls der Grenzwert

$$\vec{f}'(t_0) := \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\vec{f}(t) - \vec{f}(t_0)}{t - t_0}$$

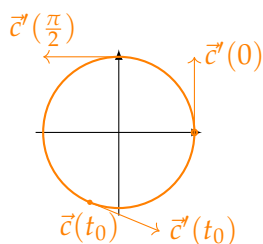
existiert.



Während  $f'(x_0)$  die Steigung der Tangente an den Graphen ist, ist  $\vec{c}'(t_0)$  ein *Tangentenvektor* oder genauer, der *Geschwindigkeitsvektor* an  $\vec{c}$  in  $t_0$ .

*Beispiel.* Wir betrachten wieder die Kreislinie und ihre Ableitung

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix}.$$



Es gilt übrigens  $\|\vec{c}'(t)\|_2 = \sqrt{r^2 \sin^2(t) + r^2 \cos^2(t)} = r$ , d.h. die Kurve hat überall die Geschwindigkeit  $r$ .

Hier eine Liste von bekannten Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$	
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$ ,	$\alpha \in \mathbb{R}, x > 0$
$x^n$	$n x^{n-1}$ ,	$n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$
$e^x$	$e^x$ ,	$x \in \mathbb{R}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$ ,	$x \in \mathbb{R}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$ ,	$x \in \mathbb{R}$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$ ,	$x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
$\ln( x )$	$\frac{1}{x}$ ,	$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Satz 7.4** (Ableitungsregeln).

(a) Ist  $\vec{f}$  in  $x_0$  differenzierbar, so ist  $\vec{f}$  in  $x_0$  stetig.

(b) Sind  $\vec{f}, \vec{g} : I \rightarrow \mathbb{R}^m$  differenzierbar in  $x_0$ , so gilt für  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$(\vec{f} + \alpha \vec{g})'(x_0) = \vec{f}'(x_0) + \alpha \vec{g}'(x_0).$$

Die Umkehrung gilt nicht, wie die Funktion  $f(x) = |x|$  zeigt.

Linearität der Ableitung

(c) Für  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Produktregel

(d) Für  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit  $g(x_0) \neq 0$  gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Quotientenregel

- (e) Für  $f : I \rightarrow J$  und  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar mit einem weiteren offenen Intervall  $J$  gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

- (f) Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  und streng monoton mit  $f'(x_0) \neq 0$  gilt mit  $y_0 = f(x_0)$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Kettenregel

Dabei meint „ $f : I \rightarrow J$  differenzierbar“, dass  $f$  in jedem Punkt  $x_0 \in I$  differenzierbar ist (analog für Stetigkeit benutzt). wir hätten hier natürlich auch in Punkten  $x_0$  und  $y_0 = f(x_0)$  formulieren können.

Umkehrregel

- Beispiel. (a) Wir betrachten  $h(x) = \cos(e^x)$ . Mit  $f(x) = e^x$  und  $g(y) = \cos(y)$  gilt wegen  $f'(x) = e^x$  und  $g'(y) = -\sin(y)$

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = -\sin(e^x)e^x.$$

- (b) Für  $h(x) = a^x$  mit  $a > 0$  gilt  $h(x) = e^{x \ln(a)}$  und mit  $f(x) = x \ln(a)$ .  $g(y) = e^y$  gilt

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{x \ln(a)} \ln(a) = \ln(a)a^x.$$

- (c) Wir schreiben  $h(x) = x^x$  ( $x > 0$ ) als  $x^x = e^{x \ln(x)}$ . Wir setzen  $f(x) = x \ln(x)$  und  $g(y) = e^y$  und haben  $f'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$ . Es folgt

$$h'(x) = g'(f(x))f'(x) = e^{x \ln(x)}(\ln(x) + 1) = x^x(\ln(x) + 1).$$

- (d) Es sei  $f(x) = \arctan(x) = \tan^{-1}(x)$  (Umkehrfunktion des Tangens). Nach der Umkehrregel gilt wegen  $\tan' = 1 + \tan^2$

$$f'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + \tan(\arctan(x))^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Höhere Ableitungen lassen sich rekursiv definieren: Wir definieren  $f^{(0)}(x) = f(x)$  und

$$f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x).$$

Wir benutzen folgende Schreibweisen:

$$f \in C \iff f \text{ ist stetig}$$

$$f \in C[a, b] \iff f \text{ ist stetig auf } [a, b]$$

$$f \in C^n \iff f \text{ ist } n\text{-mal differenzierbar und } f^{(n)} \text{ ist stetig}$$

$$f \in C^\infty \iff f \text{ ist beliebig oft differenzierbar}$$

Die Differenzierbarkeit einer Funktion lässt sich nicht nur über einen Grenzwert von Sekantensteigungen definieren, sondern

Für diejenigen, die schon die lineare Algebra gehört haben: Da die Ableitung linear ist, haben wir hier tatsächlich Vektorräume definiert!

auch als „beste Linearisierung in einem Punkt“: Ist  $f'(x_0)$  erklärt, so betrachten wir

$$r(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$

Die Funktion  $x \mapsto r(x, x_0)$  hat in  $x = x_0$  den Wert Null. Anschaulich ist  $r$  der Fehler zwischen der Funktion  $f$  und der affin linearen Funktion  $x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Dieser Fehler geht schnell gegen Null. Genauer:

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

Es gilt sogar:

**Satz 7.5.** Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ist genau dann in  $x_0 \in D$  differenzierbar, wenn es ein  $a \in \mathbb{R}$  gibt, so dass

$$\frac{f(x) - f(x_0) - a(x - x_0)}{x - x_0} \rightarrow 0, \quad x \rightarrow x_0.$$

In diesem Fall ist  $a = f'(x_0)$ .

Noch eine andere Formulierung der gleichen Tatsache:  $f$  ist genau dann in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung  $a$ , wenn gilt

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + \varphi(x)$$

wobei die Funktion  $\varphi$  erfüllt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\varphi(x)}{x - x_0} = 0.$$

In anderen Worten: Die Differenz zwischen  $f$  und der Linearisierung geht schneller als  $x - x_0$  gegen Null.

Um solche Sachverhalte auszudrücken gibt es die *Landau-Symbole*:

**Definition 7.6** (Landau-Symbole). Wir schreiben

$$„\varphi(h) = o(h^k), h \rightarrow 0“ : \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{h^k} = 0.$$

(gesprochen „ $\varphi$  ist ein klein-oh von  $h^k$  für  $h \rightarrow 0$ “) Wir schreiben

$$„\varphi(h) = \mathcal{O}(h^k), h \rightarrow 0“ : \iff \exists C : |\varphi(h)| \leq Ch^k$$

gesprochen „ $\varphi$  ist ein groß-oh von  $h^k$  für  $h \rightarrow 0$ “).

Mit dieser Schreibweise:  $f$  ist in  $x_0$  differenzierbar mit Ableitung  $a = f'(x_0)$  genau dann, wenn

$$f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0) \text{ für } x \rightarrow x_0.$$

Klein-oh bedeutet: „gegen schneller gegen Null als“, groß-oh hingegen: „geht mindestens so schnell gegen Null wie“.

## 8 Partielle Ableitungen

Wir wollen nun das Konzept der Ableitung für Funktionen im mehrdimensionalen übertragen. Dabei unterscheiden wir verschiedenen Fälle von Funktionen:

$$\begin{aligned}\vec{f} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \mapsto \vec{f}(\vec{x}) && \text{(Vektorfeld)} \\ f : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \quad \vec{x} \mapsto f(\vec{x}). && \text{(Skalarfeld)}\end{aligned}$$

Manchmal wird der Begriff „Vektorfeld“ nur im Fall  $m = n$  benutzt.

Den weiteren Typ kennen wir schon:

$$\vec{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto \vec{f}(t). \quad \text{(Kurve)}$$

Ableitungen von Kurven haben wir schon betrachtet - es werden dabei einfach alle Komponentenfunktionen abgeleitet.

Wir betrachten nun Ableitungen von Skalarfeldern  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , also Funktionen mit mehrdimensionalem Definitionsbereich. Man kann diese Funktionen in „Richtungen“ ableiten:

**Definition 8.1.** Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\vec{x}_0, \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ . Dann heißt  $f$  in  $\vec{x}_0$  *richtungs-differenzierbar in Richtung  $\vec{h}$*  mit *Richtungsableitung*  $D_{\vec{h}}f(\vec{x}_0)$ , wenn der Grenzwert

$$D_{\vec{h}}f(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{h}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

existiert.

Im Falle von  $\vec{h} = \vec{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ , also dem  $i$ -ten standard Einheits-

vektor bezeichnet man

$$D_i f(\vec{x}_0) = D_{\vec{e}_i} f(\vec{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

und nennt dies die  $i$ -te *partielle Ableitung von  $f$  in  $\vec{x}_0$* .

Haben die Variablen unmissverständliche Namen, so schreibt man partielle Ableitungen oft auch anders:

*Beispiel.* Es sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  geschrieben als  $f(x, y)$ . Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x^0, y^0) := D_{\vec{e}_1} f(x^0, y^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + t, y^0) - f(x^0, y^0)}{t}$$

und entsprechend in  $y$ -Richtung

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0) := D_{\vec{e}_2} f(x^0, y^0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x^0, y^0 + t) - f(x^0, y^0)}{t}$$

Existieren alle partiellen Ableitung von  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  ( $D \subset \mathbb{R}^n$ ) in  $\vec{x}_0 \in D$ , so heißt  $f$  *partiell differenzierbar* in  $\vec{x}_0$ , existieren alle partiellen Ableitungen in jedem  $\vec{x}_0 \in D$  und sind alle  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x})$  stetig in  $\vec{x}$ , so heißt  $f$  *stetig partiell differenzierbar*.

**Beispiel.** Wir betrachten

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1x_2 + x_2 \sin(x_1) + x_3e^{x_2}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) &= 3x_2 + x_2 \cos(x_1) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) &= 3x_1 + \sin(x_1) + x_3e^{x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(\vec{x}) &= e^{x_2}\end{aligned}$$

**Definition 8.2** (Gradient). Ist  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  in  $\vec{x}_0$  partiell differenzierbar, so heißt der Vektor

$$\nabla f(\vec{x}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Gradient von  $f$  in  $\vec{x}_0$ . Das Symbol  $\nabla$  heißt „nabla“.

Während wir für Funktionen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  Satz 7.4 i) haben, welcher sagt, dass differenzierbare Funktionen auch stetig sind, ist diese Aussage für Funktionen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  und partielle Differenzierbarkeit falsch.

**Satz 8.3.** Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{x}_0 \in D$  und ist  $f$  in einer Umgebung von  $\vec{x}_0$  partiell differenzierbar mit beschränkten partiellen Ableitungen, so ist  $f$  in  $\vec{x}_0$  stetig.

Höhere partielle Ableitungen werden rekursiv definiert, so ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

und höhere Ableitungen nach einer Variablen schreibt man

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

Die zweiten Ableitungen kann man in einer  $n \times n$ -Matrix sammeln, diese ist

$$Hf(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

und wird *Hesse-Matrix* genannt.

**Satz 8.4** (Satz von Schwarz). Ist  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion, so gilt für alle  $i, j = 1, \dots, n$  und alle  $\vec{x} \in D$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{x}).$$

Man stelle sich einfach eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  vor, die entlang der Koordinatenachsen konstant 0 ist und ansonsten macht, was sie will.

Mit anderen Worten: Ist die Funktion zweimal stetig partiell differenzierbar, so kommt es bei zweiten Ableitungen nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen an. Entsprechendes gilt für höhere Ableitungen. Der Satz von Schwarz sagt also aus, dass die Hesse-Matrix einer  $C^2$ -Funktion symmetrisch ist.

Ein besonders wichtiger Differentialoperator ist der *Laplace Operator*

$$\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad \text{also} \quad \Delta f(\vec{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(\vec{x})$$

der zum Beispiel in der *Potentialgleichung*  $\Delta u(\vec{x}) = 0$  vorkommt.

Untersuchen wir nun den Gradienten einer skalaren Funktion weiter. Für Vektoren  $\vec{x}, \vec{y}$  im  $\mathbb{R}^n$  gibt es das (standard) *Skalarprodukt* welches auf verschiedene Arten definiert werden kann

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle &:= \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\angle(\vec{x}, \vec{y})) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\vec{x} \perp \vec{y} \iff \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0,$$

d.h. zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ist.

Schauen wir uns nun eine *Höhenlinie* einer Funktion  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  an. Dies sind Linien entlang derer  $f$  konstant ist. Nehmen wir also an, dass  $f$  entlang einer parametrisierten Kurve

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

konstant ist, d.h. es gilt

$$f(\vec{c}(t)) = \text{const.}$$

Aus der Kettenregel bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(x_1(t), \dots, x_n(t)) &= \frac{\partial f(\vec{c}(t))}{\partial x_1} \frac{dx_1(t)}{dt} + \dots + \frac{\partial f(\vec{c}(t))}{\partial x_n} \frac{dx_n(t)}{dt} \\ &= \langle \nabla f(\vec{c}(t)), \dot{\vec{c}}(t) \rangle. \end{aligned}$$

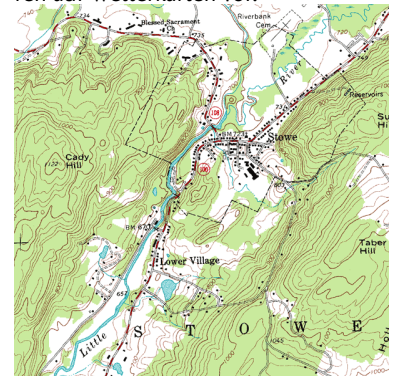
Da aber  $f(\vec{c}(t)) = \text{const.}$  gilt, bekommen wir durch ableiten beider Seiten die Gleichung

$$\langle \nabla f(\vec{c}(t)), \dot{\vec{c}}(t) \rangle = 0.$$

Da  $\dot{\vec{c}}(t)$  ein Tangentenvektor an die Kurve  $\vec{c}$  ist, haben wir: Der Gradient steht senkrecht zur Tangente an die Höhenlinie, also senkrecht zur Höhenlinie. Man kann sogar genauer sagen: Der Gradient  $\nabla f$  zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion und  $-\nabla f$  zeigt in die Richtung des steilsten Abstiegs.

Der Laplace-Operator ist die Summe der Diagonal-Einträge der Hesse-Matrix, also ihre *Spur*.

Höhenlinien sind z.B. in Landkarten eingezeichnet oder kommen als Isobaren auf Wetterkarten vor.



Bei Ableitungen nach  $t$  wird oft auch die Notation  $\dot{x}(t)$  bzw.  $\dot{c}(t)$  statt  $x'(t)$  bzw.  $c'(t)$  verwendet.

Untersuchen wir noch einmal die Richtungsableitung: Parametrisieren wir die Gerade durch  $\vec{x}_0$  in Richtung  $\vec{v}$  durch

$$\vec{c}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{v},$$

so ist per Definition (nach der Kettenregel, ähnlich wie eben)

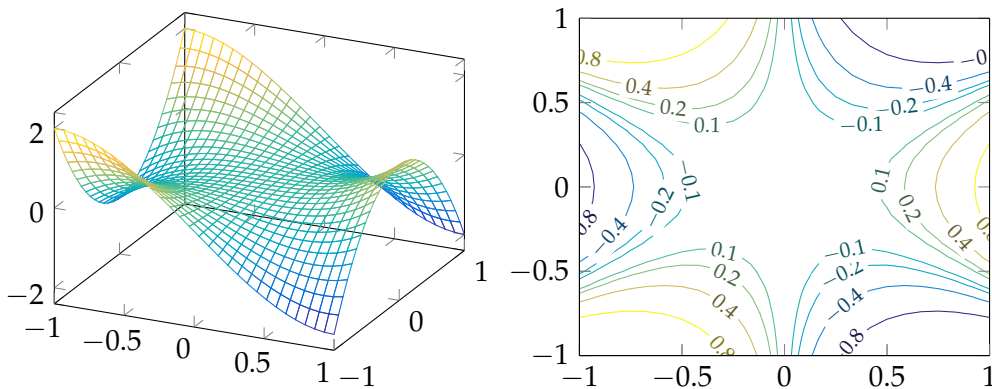
$$\begin{aligned} D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{c}(t)) - f(\vec{c}(0))}{t} = \frac{d}{dt}(f \circ \vec{c})(0) \\ &= \langle \nabla f(\vec{c}(0)), \dot{\vec{c}}(0) \rangle \\ &= \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Ist der Richtungsvektor normiert, d.h. gilt  $\|\vec{v}\|_2 = 1$ , so ist  $D_{\vec{v}}f(\vec{x}_0)$  die Steigung von  $f$  in Richtung  $\vec{v}$  an.

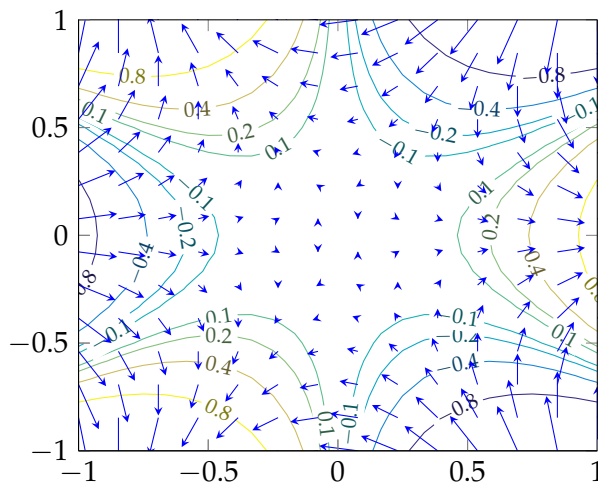
*Beispiel.* Betrachten wir die Funktion  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ . Diese Funktion hat den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3(x^2 - y^2) \\ -6xy \end{pmatrix}$$

Hier Plots der Funktion; links den Graphen und rechts die Höhenlinien:



Wir können auch das Gradientenfeld über den Plot der Höhenlinien legen:



## 9 Die (totale) Ableitung

Erinnern wir uns an das Ende von Abschnitt 7: Dort hatten wir die Ableitung  $f'(x_0)$  einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  beschrieben als die Zahl  $a$  für die gilt

$$f(x) - f(x_0) - a(x - x_0) = o(x - x_0), \quad \text{für } x \rightarrow x_0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Gleichung ist: Die Ableitung ist die Steigung der besten (affin) linearen Approximation an den Graphen im Punkt  $x_0$ . Dies lässt sich auf die Situation von Vektorfeldern  $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  verallgemeinern, wenn wir einen Begriff für lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$  haben. Diese linearen Abbildungen sind genau die Abbildungen der Form

$$\vec{\ell}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\vec{x}$$

mit einer Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

**Definition 9.1.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{x}_0 \in D$ . Wir sagen  $\vec{f}$  ist in  $\vec{x}_0$  differenzierbar (auch „total differenzierbar“), wenn es eine lineare Abbildung  $\vec{\ell}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\vec{\ell}(\vec{x}) = A\vec{x}$  gibt, so dass

$$\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0) = o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|) \quad \text{für } \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0$$

gilt. Die lineare Abbildung  $\vec{\ell}$  heißt *Differential* von  $\vec{f}$  in  $\vec{x}_0$  und wird als  $D\vec{f}(\vec{x}_0)$  (oder auch  $d\vec{f}(\vec{x}_0)$ ) geschrieben. Die zugehörige Matrix  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  heißt *Jacobi-Matrix* und wird  $J\vec{f}(\vec{x}_0)$  geschrieben.

Schauen wir uns Spezialfälle an:

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ : Hier gibt es nur eine Komponentenfunktion und eine Variable und die Jacobi-Matrix ist  $1 \times 1$ , also eine Skalar:

$$Jf(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = f'(x_0).$$

- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ : Hier gibt es eine Komponentenfunktionen und  $n$  Variablen und die Jacobi-Matrix ist eine  $1 \times n$  Zeilenvektor:

$$Jf(\vec{x}_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}_0), \quad \dots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \right) = \nabla f(\vec{x}_0)^T$$

Die Multiplikation  $A\vec{x}$  von  $m \times n$  Matrix und  $n$  Vektor ergibt einen  $m$  Vektor mit dem Komponenten  $(A\vec{x})_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ .

Man kann diese Forderung auch schreiben als

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - A(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0}.$$

Teilweise wird auch die Schreibweise  $\text{grad } f(\vec{x}_0) = \nabla f(\vec{x}_0)^T$  für den transponierten Gradienten verwendet.



- $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ : Es gibt  $m$  Komponentenfunktionen und  $n$  Variablen und die Jacobi-Matrix ist  $m \times n$ :

$$Jf(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x}_0)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{x}_0)^T \end{pmatrix}.$$

Merke: Die Gradienten der Komponentenfunktionen liegen in den Zeilen der Jacobi-Matrix.

*Beispiel.* Wir betrachten

$$\vec{f}(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 x_3 \\ \sin(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix},$$

also den Fall  $n = 3$  und  $m = 2$ . Die partiellen Ableitungen sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} &= x_2 x_3, & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} &= x_1 x_3, & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} &= x_1 x_2 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} &= \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_3), & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} &= 2 \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_3), & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} &= 3 \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_3). \end{aligned}$$

Die Gradienten der Komponentenfunktionen sind also

$$\nabla f_1(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_2 x_3 \\ x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_2(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_3).$$

Damit ist die Jacobi-Matrix

$$J\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{x})^T \\ \nabla f_2(\vec{x})^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_3 & x_1 x_3 & x_1 x_2 \\ \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_3) & 2 \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_3) & 3 \cos(x_1 + 2x_2 + 3x_3) \end{pmatrix}.$$

**Satz 9.2** (Mehrdimensionale Kettenregel). Es sei  $D_{\vec{f}} \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\vec{x}_0 \in D_{\vec{f}}$ ,  $\vec{f} : D_{\vec{f}} \rightarrow \mathbb{R}^m$  in  $\vec{x}_0$  differenzierbar,  $D_{\vec{g}} \subset \mathbb{R}^m$  offen mit  $\vec{f}(D_{\vec{f}}) \subset D_{\vec{g}}$ ,  $\vec{g} : D_{\vec{g}} \rightarrow \mathbb{R}^k$  in  $\vec{f}(\vec{x}_0)$  differenzierbar, so ist  $\vec{g} \circ \vec{f}$  in  $\vec{x}_0$  differenzierbar und es gilt

$$J(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}_0) = J\vec{g}(\vec{f}(\vec{x}_0)) \cdot J\vec{f}(\vec{x}_0).$$

Auf der rechten Seite steht ein Produkt von Matrizen. Überzeugen Sie sich davon, dass alle Dimensionen passen!

*Beispiel.* Wir betrachten  $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  und  $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  definiert durch

$$\vec{f}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \end{pmatrix}, \quad \vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ u + v \\ \sin(u + v) \end{pmatrix}.$$

Wir setzen  $\vec{h} = \vec{g} \circ \vec{f}$  und berechnen die Jacobi-Matrizen von  $\vec{f}$  und  $\vec{g}$ :

$$J\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad J\vec{g}(u, v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \\ \cos(u+v) & \cos(u+v) \end{pmatrix}.$$

Mit der Kettenregel führt das auf

$$\begin{aligned} J\vec{h}(x, y, z) &= J\vec{g}(\vec{f}(x, y, z)) \cdot J\vec{f}(x, y, z) \\ &= J\vec{g}(x+y, y+z) \cdot J\vec{f}(x, y, z) \\ &= \begin{pmatrix} y+z & x+y \\ 1 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y+z+0 & y+z+x+y & 0+x+y \\ 1+0 & 1+1 & 0+1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y+z & x+2y+z & x+y \\ 1 & 2 & 1 \\ \cos(x+2y+z) & 2\cos(x+2y+z) & \cos(x+2y+z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Zum Vergleich können Sie auch direkt die Jacobi-Matrix von

$$\vec{h}(x, y, z) = \vec{g}(\vec{f}(x, y, z)) = \begin{pmatrix} (x+y)(y+z) \\ x+2y+z \\ \sin(x+2y+z) \end{pmatrix}$$

ausrechnen.

Es gibt noch weitere wichtige Differentialoperatoren für spezielle Fälle von Vektorfeldern:

**Definition 9.3** (Divergenz und Rotation). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  partiell differenzierbar. Dann ist

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}_0) := \nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}_0) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\vec{x}_0)$$

die *Divergenz* von  $\vec{f}$  in  $\vec{x}_0$ .

Ist  $n = 3$ , so ist

$$\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}_0) := \nabla \times \vec{f}(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}(\vec{x}_0)$$

die *Rotation* von  $\vec{f}$  in  $\vec{x}_0$ .

Für  $n = 2$  ist die Rotation von  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch

$$\operatorname{rot} \vec{f}(\vec{x}_0) = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0).$$

Für ein differenzierbares  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man  $\nabla f: D \rightarrow \mathbb{R}^n$  das *Gradientenfeld* von  $f$ .

Die Divergenz existiert nur, wenn Definitions- und Wertebereich die gleiche Dimension haben.  $\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x})$  ist die Spur der (in diesem Fall quadratischen) Jacobi-Matrix  $J\vec{f}(\vec{x})$

Die Rotation existiert in dieser Form nur im Fall  $n = 3$ .

Für  $n = 3$  ist  $\operatorname{rot} \vec{f}$  ein Vektorfeld, für  $n = 2$  hingegen ein Skalarfeld!

*Beispiel.* Wir berechnen zu erst die partiellen Ableitungen der Funktion  $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|_2$ : Es gilt  $\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  und es folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \|\vec{x}\|_2 = \frac{1}{2} (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} \cdot 2x_i = \frac{x_i}{\|\vec{x}\|_2}.$$

Damit berechnen wir:

1. Für  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$  und  $k \in \mathbb{N}$  betrachten wir  $\vec{f}(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2^k}$  und wollen  $\text{div } \vec{f}$  bestimmen. Dazu berechnen die partiellen Ableitungen (mit Hilfe der Produktregel)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(\vec{x}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( x_i \|\vec{x}\|_2^{-k} \right) \\ &= 1 \cdot \left( \|\vec{x}\|_2^{-k} \right) + x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \|\vec{x}\|_2^{-k} \right). \end{aligned}$$

Der zweite Summand ist nach der eindimensionalen Kettenregel und unserer Vorberechnung von oben)

$$\begin{aligned} x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \|\vec{x}\|_2^{-k} \right) &= x_i (-k) \|\vec{x}\|_2^{-k-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \|\vec{x}\|_2 \\ &= x_i (-k) \|\vec{x}\|_2^{-k-1} \frac{x_i}{\|\vec{x}\|_2} \\ &= -k \frac{x_i^2}{\|\vec{x}\|_2^{k+2}}. \end{aligned}$$

Wir bekommen also

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_i(\vec{x}) = \frac{1}{\|\vec{x}\|_2^k} - \frac{kx_i^2}{\|\vec{x}\|_2^{k+2}}.$$

Damit erhalten wir als Divergenz

$$\begin{aligned} \text{div} \left( \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2^k} \right) &= \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{\|\vec{x}\|_2^k} - \frac{kx_i^2}{\|\vec{x}\|_2^{k+2}} \right) \\ &= \frac{n}{\|\vec{x}\|_2^k} - k \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\|\vec{x}\|_2^{k+2}} \\ &= \frac{n}{\|\vec{x}\|_2^k} - k \frac{\|\vec{x}\|_2^2}{\|\vec{x}\|_2^{k+2}} \\ &= \frac{n-k}{\|\vec{x}\|_2^k}. \end{aligned}$$

Im Fall  $k = n = 3$  bekommen wir: Die Felder der Form  $\vec{K}(\vec{x}) = c \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|_2^3}$  erfüllen  $\text{div } \vec{K} = 0$  und sie sind daher *divergenzfrei*.

2. Ist  $\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion, so gilt

$$\text{rot}(\nabla \varphi) = \vec{0}$$

das bedeutet Gradientenfelder sind immer *rotationsfrei*.

3. Im speziellen Fall  $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  haben wir

$$\operatorname{div} \vec{f}(x, y) = 1 + 1 = 2$$

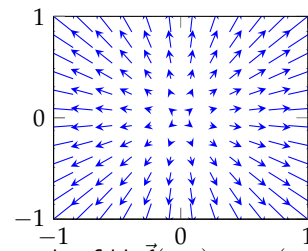
$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y) = 0 + 0 = 0.$$

4. Für  $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$  gilt hingegen

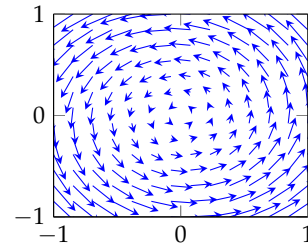
$$\operatorname{div} \vec{f}(x, y) = -1 + 1 = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y) = +1 - (-1) = 2.$$

Das Vektorfeld  $\vec{f}(x, y) = (x, y)$  (Pfeillänge skaliert):



Das Vektorfeld  $\vec{f}(x, y) = (-y, x)$  (Pfeillänge skaliert):



## 10 Mittelwertsätze und Taylorreihen

Beginnen wir auch hier erst wieder mit dem Fall  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Als Konsequenz aus Satz 6.4 (d) (stetige Funktionen auf kompakten Mengen nehmen Maximum und Minimum an) bekommen wir:

**Satz 10.1** (Mittelwertsätze). (a) Ist  $f : [a, b]$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar und gilt  $f(a) = f(b)$ , so gibt es ein  $x_0 \in ]a, b[$  mit  $f'(x_0) = 0$ .

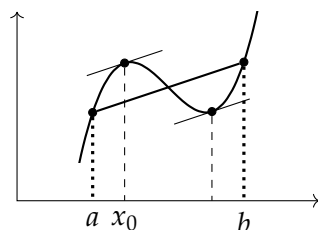
(b) Ist  $f : [a, b]$  stetig und in  $]a, b[$  differenzierbar, so gibt es ein  $x_0 \in ]a, b[$  mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(c) Sind  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und auf  $]a, b[$  differenzierbar, und gilt  $g'(x) \neq 0$  für alle  $x \in ]a, b[$ , so gibt es ein  $x_0 \in ]a, b[$  mit

$$\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Die Situation in (b) ist wie in dieser Skizze:



Der erste Mittelwertsatz ist also eine „gekippte Version des Satzes von Rolle“ (und so wird er auch bewiesen).

Dieser Satz hat zahlreiche Folgerungen:

(a) Gilt für differenzierbares  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$   $f' \equiv 0$ , so ist  $f = \text{const.}$

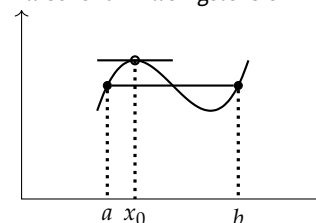
(b) Für differenzierbares  $f : [a, b]$  gilt:

$$\begin{aligned} \forall x : f'(x) &\geq 0 \implies f \text{ wachsend,} \\ \forall x : f'(x) &> 0 \implies f \text{ streng wachsend,} \\ \forall x : f'(x) &\leq 0 \implies f \text{ fallend,} \\ \forall x : f'(x) &< 0 \implies f \text{ streng fallend.} \end{aligned}$$

Für Funktionen vom Typ  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

(a) ist der Satz von Rolle.

In Worten sagt der Satz aus: Hat eine differenzierbare Funktion an zwei Stellen den gleichen Werte, war sie zwischendrin wenigstens einmal flach.



(b) heißt auch Erster Mittelwertsatz.

In Worten: In einem Intervall nimmt eine differenzierbare mindestens einmal die durchschnittliche Steigung an.

(c) wird auch Zweiter Mittelwertsatz genannt.

Anders ausgedrückt: Die Differentialgleichung  $y' = 0$  hat nur die Lösungen  $y(x) = \text{const.}$

**Satz 10.2** (Mittelwertsatz für Skalarfelder). Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar. Sind dann  $\vec{a}, \vec{b} \in D$  so, dass die Verbindungsstrecke

$$[\vec{a}, \vec{b}] := \left\{ \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}) \mid t \in [a, b] \right\}$$

ganz in  $D$  liegt, so gibt es  $\theta \in ]0, 1[$ , so dass

$$f(\vec{b}) - f(\vec{a}) = \langle \nabla f(\vec{a} + \theta(\vec{b} - \vec{a})), \vec{b} - \vec{a} \rangle.$$

In einigen Fällen ist die Regel von l'Hospital praktisch um Grenzwerte zu berechnen:

**Satz 10.3** (Regel von l'Hospital für Ausdrücke der Form „0/0“). Sind  $f, g : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar und gilt  $f(x_0) = g(x_0) = 0$  und  $g'(x) \neq 0$  für  $x \neq x_0$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert (und in diesem Fall existiert auch der auf der linken Seite).

Dies folgt aus dem 2. Mittelwertsatz (Satz 10.1): Für  $x \neq x_0$  liefert dieser Satz

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

mit einem  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ . Dieses  $\xi$  hängt von  $x$  ab und wir bezeichnen es mit  $\xi(x)$ . Lläuft nun  $x$  gegen  $x_0$ , so läuft  $\xi(x)$  gegen  $x_0$  (es liegt ja zwischen  $x$  und  $x_0$ ), und dies zeigt die Behauptung.

**Satz 10.4** (Regel von l'Hospital für Ausdrücke der Form „ $\infty/\infty$ “). Sind  $f, g : ]a, b[ \setminus \{x_0\}$  differenzierbar,  $a < x_0 < b$ , gilt  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$  und für  $x \neq x_0$  gelte  $g'(x) \neq 0$ , so gilt

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert auf der rechten Seite existiert (und in diesem Fall existiert auch der auf der linken Seite).

**Beispiel.** (a) Für den Grenzwert  $\sin(x)/x$  und  $x_0 = 0$  sind die Voraussetzungen von Satz 10.3 erfüllt und wir bekommen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

(b) Wir betrachten die den Grenzwert der Funktion  $x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  bei  $x_0 = \infty$ . Hier liegt ein Grenzwert der Form „ $0 \cdot \infty$ “ vor, den wir aber in die Form „0/0“ umschreiben können zu

$$x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}}.$$

Für Funktionen vom Typ  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  gilt keine solche Gleichung mehr, aber immerhin noch eine Abschätzung der Form

$$\|\vec{f}(\vec{b}) - \vec{f}(\vec{a})\|_2 \leq \|J\vec{f}(\vec{a} + \theta(\vec{b} - \vec{a}))\|_2 \cdot \|\vec{b} - \vec{a}\|_2.$$

mit einem  $\theta \in ]0, 1[$ .

Dieses Beispiel wird meist als erste Anwendung der Regel von l'Hospital gebracht, obwohl man es viel einfacher aus der bekannten Regel  $\sin' = \cos$  folgern kann:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x)/x = \lim_{x \rightarrow 0} (\sin(x) - \sin(0))/(x - 0) = \sin'(0) = \cos(0) = 1$ .

Mit  $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x-1)$  und  $g(x) = \frac{1}{x}$  können wir Satz 10.4 anwenden und bekommen

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{\frac{1}{x}} \stackrel{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{(x-1) - (x+1)}{(x+1)(x-1)}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1-\frac{1}{x^2}} = 2.\end{aligned}$$

- (c) Für  $n \in \mathbb{N}$  betrachten wir  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$  (von der Form „ $\infty/\infty$ “) und wenden  $n$ -mal Satz 10.4 an:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n x^{n-1}}{e^x} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n(n-1) \dots 2 \cdot 1}{e^x} = 0.$$

Wir halten fest:  $e^x$  wächst schneller als jede Potenz  $x^n$ . Es folgt:  $\ln(x)$  wächst langsamer als jede Potenz  $x^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

Kommen wir nun zu Taylor-Reihen. Taylor-Reihen stellen Funktionen als *Potenz-Reihen* dar, also durch Ausdrücke der Form  $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ . Dabei nennt man  $x_0$  den *Entwicklungspunkt der Potenzreihe*. Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen ist übersichtlich:

**Satz 10.5.** Für eine Potenzreihe  $P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$  gibt es ein  $0 \leq r \leq \infty$ , so dass gilt:

1.  $P(x)$  konvergiert absolut für jedes  $x$  mit  $|x - x_0| < r$ ,
2.  $P(x)$  divergiert für jedes  $x$  mit  $|x - x_0| > r$ .

Dieses  $r$  nennt man *Konvergenzradius* und  $B_r(x_0)$  den *Konvergenzbe-reich*.

Ist der Konvergenzradius  $r = \infty$  bedeutet das einfach, dass  $P(x)$  für jedes  $x$  konvergiert.

*Beispiel.* (a) Die Exponentialfunktion ist die Potenzreihe

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

und der Konvergenzradius ist  $r = \infty$ .

- (b) Auch der Konvergenzradius des Reihen für Sinus und Kosinus

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

ist jeweils  $r = \infty$ .

- (c) Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  kennen wir als geometrische Reihe. Sie hat den Konvergenzradius  $r = 1$  und für  $|x| < 1$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

**Satz 10.6.** Ist  $P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r$ , so ist  $P$  auf  $B_r(x_0)$  eine  $C^\infty$ -Funktion und es gilt

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots$$

Man sagt „Potenzreihen lassen sich gliedweise ableiten.“

**Beispiel.** (a) An Hand der Potenzreihe der Exponentialfunktion sieht man  $(e^x)' = e^x$  und aus den Potenzreihen für Sinus und Kosinus bekommt man die Ableitungsregeln  $\sin' = \cos$  und  $\cos' = -\sin$ .

(b) Ableiten der geometrischen Reihe zeigt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1} &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right)' = \left( \frac{1}{1-x} \right)' \\ &= \frac{1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

Die Taylorsche Formel sagt, wie sich Funktionen lokal durch Polynome approximieren lassen:

**Satz 10.7** (Taylor). Es sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^n$ -Funktion und  $x_0 \in ]a, b[$ . Dann gibt es genau ein Polynom  $T_n(x; x_0)$  vom Grad höchstens  $n$  für welches gilt

$$f(x) = T_n(x; x_0) + o((x - x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0.$$

Dieses Polynom heißt Taylor-Polynom vom Grad  $n$  zum Entwicklungspunkt  $x_0$  und es gilt

$$T_n(x; x_0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Ist  $f$  sogar eine  $C^{n+1}$ -Funktion, so gilt die Restgliedformel (nach Lagrange)

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k}_{=: T_n(x; x_0)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}}_{=: R_n(x; x_0)},$$

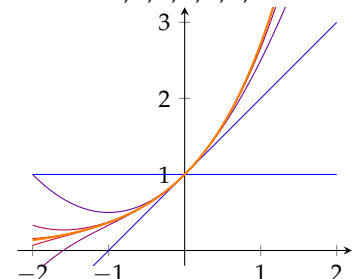
für ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$ .

Ist  $f$  eine  $C^\infty$ -Funktion und kann man zeigen, dass das Restglied  $R_n(x; x_0)$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null geht, so hat  $f$  eine Darstellung als Taylor-Reihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

**Beispiel.** (a) Wegen  $(e^x)' = e^x$  und  $e^0 = 1$  ergibt sich als Taylor-Polynom vom Grad  $n$  der Exponentialfunktion gerade  $T_n(x; 0) = 1 + x + x^2/2 + \dots + x^n/n!$  und das Restglied erfüllt  $R_n(x; 0) = \frac{x^{n+1} e^\xi}{(n+1)!}$ . Für  $n \rightarrow \infty$  gilt in diesem Fall  $R_n(x; 0) \rightarrow 0$  und wir bekommen als Taylor-Reihe die schon bekannte Reihe der Exponentialfunktion.

Die Taylor-Polynome zu  $f(x) = e^x$  vom Grad 0, 1, 2, 3, 4, 5, und 6:





- (b) Taylor-Reihen müssen keinen positiven Konvergenzradius haben.
- (c) Auch wenn Taylor-Reihen konvergieren, müssen sie nicht gegen die Funktion konvergieren. Das Standard-Beispiel ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & : x \neq 0 \\ 0 & : x = 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass dies eine Funktion  $C^\infty$ -Funktion ist und dass für alle  $k$  gilt  $f^{(k)}(0) = 0$ . Die Taylor-Polynome von  $f$  sind also alle konstant Null und konvergieren nur im Punkt  $x = 0$  gegen  $f$ .

Das obige Beispiel (c) macht noch einmal deutlich, dass ein Taylor-Polynom eine lokale Approximation ist, die für  $x \rightarrow x_0$  gut ist. In einem festen Punkt  $x \neq x_0$  muss ein Taylor-Polynom (egal von welchem Grad) keine Approximation der Funktion sein.

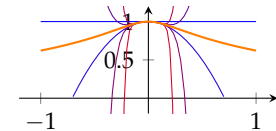
Es lassen sich auch in mehreren Dimensionen Taylor-Reihen bilden. Für  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  erhält man als Taylor-Polynom erster Ordnung

$$T_1(\vec{x}, \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle$$

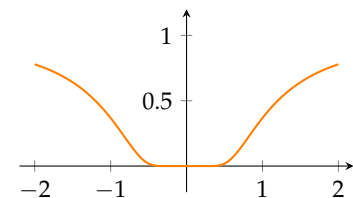
und als Taylor-Polynom zweiter Ordnung mit Hilfe der Hesse-Matrix

$$T_2(\vec{x}, \vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{x} - \vec{x}_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, Hf(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle.$$

Beispiele dafür bekommt man, wenn die Ableitungen der Funktion sehr schnell wachsen. Ein solches Beispiel ist die als Integral gegebene Funktion  $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+t^2x^2} dt$ : Die Taylor-Reihe in  $x_0 = 0$  ist  $1 - 2!x^2 + 4!x^4 - 6!x^6 \pm \dots$  und konvergiert nur für  $x = 0$ . Hier die Funktion und die Taylor-Polynome vom Grad 0, 2, 4, 6, 8 und 10:



Hier die Funktion  $f(x) = \exp(-1/x^2)$  (mit  $f(0) = 0$ ). Alle Taylor-Polynome im Entwicklungspunkt 0 sind konstant Null.



## 11 Extremwerte

**Definition 11.1.** Für  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  sagen wir:

- (a)  $f$  hat in  $\vec{x}_0 \in D$  ein *globales Maximum*, falls für alle  $\vec{x} \in D$  gilt  $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ .
- (b)  $f$  hat in  $\vec{x}_0 \in D$  ein *striktes globales Maximum*, falls für alle  $\vec{x} \in D \setminus \{\vec{x}_0\}$  gilt  $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ .
- (c)  $f$  hat in  $\vec{x}_0 \in D$  ein *lokales Maximum*, falls es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass für alle  $\vec{x} \in D$  mit  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon$  gilt  $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ .
- (d)  $f$  hat in  $\vec{x}_0 \in D$  ein *striktes lokales Maximum*, falls es ein  $\epsilon > 0$  gibt, so dass für alle  $\vec{x} \in D \setminus \{\vec{x}_0\}$  mit  $\|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \epsilon$  gilt  $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ .

Analog sind die Begriffe im Fall von *Minima* definiert. Ein Punkt  $\vec{x}_0$  welches ein Minimum oder Maximum ist, heißt *Extremum*.

Untersuchen wir Extremwerte zuerst in einer Dimension weiter:

**Satz 11.2** (Notwendiges Kriterium für Extrema). Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  so gilt: Hat  $f$  in  $x_0 \in [a, b]$  ein *lokales Extremum*, und ist  $f$  in  $x_0$  differenzierbar, so gilt

$$\begin{aligned} a < x_0 < b &\implies f'(x_0) = 0 \\ x_0 = a &\implies f'(x_0) \begin{cases} \leq 0 & : \text{für Maxima} \\ \geq 0 & : \text{für Minima} \end{cases} \\ x_0 = b &\implies f'(x_0) \begin{cases} \geq 0 & : \text{für Maxima} \\ \leq 0 & : \text{für Minima} \end{cases} \end{aligned}$$

*Beweis.*

Wir beweisen den Fall eines lokalen Minimums mit  $a < x_0 < b$ . Hier gilt für  $h > 0$  klein genug  $f(x_0 + h) \geq f(x_0)$ . Entsprechend erfüllt der Differenzenquotient  $(f(x_0 + h) - f(x_0))/h \geq 0$  und es folgt durch Grenzübergang  $h \rightarrow 0$  die Ungleichung  $f'(x_0) \geq 0$ . Allerdings gilt auch  $f(x_0 - h) \geq f(x_0)$ , was für den Differenzenquotienten bedeutet  $(f(x_0 - h) - f(x_0))/(-h) \leq 0$ . Durch Grenzübergang folgt  $f'(x_0) \leq 0$ , also haben wir  $f'(x_0) = 0$  gezeigt. Alle anderen Fälle zeigt man ähnlich (und am Rand betrachtet man einseitige Ableitungen).  $\square$

Punkte  $x_0$  mit  $f'(x_0) = 0$  nennt man *stationäre* (oder *kritische*) Punkte.

Die Bedingung  $f'(x_0) = 0$  ist nur notwendig für Extrema! Sie garantiert nicht, dass  $x_0$  ein Extremum ist, wie die Funktion  $f(x) = x^3$  im Punkt  $x_0 = 0$  zeigt. Man kann hinreichende Bedingungen mit Hilfe der zweiten Ableitungen formulieren.

**Satz 11.3.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion, so gilt für  $x_0 \in ]a, b[$ :

- (i) Sind  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) > 0$ , so ist  $x_0$  ein striktes lokales Minimum von  $f$ .
- (ii) Sind  $f'(x_0) = 0$  und  $f''(x_0) < 0$ , so ist  $x_0$  ein striktes lokales Maximum von  $f$ .

Dies sieht zum Beispiel mit Hilfe der Taylor-Entwicklung: Da  $f'(x_0) = 0$  ist, gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x - x_0)^2.$$

Da  $f''$  stetig ist, muss  $f''(\xi)$  ebenfalls positiv (im Fall (i)) bzw. negativ (im Fall (ii)) sein und daher folgt  $f(x) > f(x_0)$  für  $x \neq x_0$  und  $x$  nahe bei  $x_0$  (bzw.  $<$ ).

**Definition 11.4** (Konvexität). Eine Funktion  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  heißt *konvex*, wenn für alle  $x, y \in [a, b]$  und  $\theta \in [0, 1]$  gilt

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y)$$

gilt. Gilt für  $x \neq y$  und  $\theta \notin \{0, 1\}$  immer  $<$ , so heißt  $f$  *strikt konvex*. Eine Funktion  $f$  heißt *konkav*, wenn  $-f$  konvex ist.

Diese Ungleichung bedeutet, dass der Graph von  $f$  immer unterhalb der Sekanten liegt.

**Satz 11.5.** Ist  $f$  eine  $C^1$ -Funktion, so gilt:  $f$  ist genau dann konvex (bzw. konkav), wenn für alle  $x, x_0 \in ]a, b[$  gilt

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (\text{bzw. } \leq).$$

Dies bedeutet: Eine Funktion ist genau dann konvex, wenn ihr Graph oberhalb jeder Tangenten liegt.

**Satz 11.6.** (a) Ist  $f$  eine  $C^1$ -Funktion, so gilt:  $f$  ist genau dann konvex (konkav), wenn  $f'$  wachsend (fallend) ist.

(b) Ist  $f$  eine  $C^2$ -Funktion, so gilt:  $f$  ist genau dann konvex (konkav), wenn  $f''(x) \geq 0$  ( $\leq 0$ ) für  $x \in ]a, b[$  ist.

**Definition 11.7.** Ein Punkt  $x_0 \in ]a, b[$  heißt *Wendepunkt* von  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , wenn  $f$  in  $x_0$  von konvex auf konkav (oder umgekehrt) wechselt.

**Satz 11.8.** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion. Dann gilt

(a) Ist  $x_0 \in ]a, b[$  ein Wendepunkt von  $f$ , so gilt  $f''(x_0) = 0$ .

(b) Ist  $f$  sogar eine  $C^3$ -Funktion, und gilt für  $x_0 \in ]a, b[$  sowohl  $f''(x_0) = 0$  als auch  $f^{(3)}(x_0) \neq 0$ , so ist  $x_0$  ein Wendepunkt von  $f$ .

Das Vorzeichen von  $f^{(3)}(x_0)$  gibt die Art den Wendepunkts an: Im Fall  $> 0$  wechselt  $f$  von konkav zu konvex, im Fall  $< 0$  von konvex zu konkav.

Wir betrachten jetzt den Fall  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir wissen schon: Ist  $D$  kompakt und  $f$  stetig, so nimmt  $f$  Maximum und Minimum auf  $D$  an (und dies sind sogar die globalen Extrema). Mit Hilfe der Differentialrechnung können wir Aussagen über lokale Extrema machen. Dazu führen wir noch ein paar Begriffe ein:

**Definition 11.9.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Ein Punkt  $x \in D$  heißt *innerer Punkt* von  $D$ , wenn es  $\epsilon > 0$  gibt, so dass  $B_\epsilon(x_0) \subset D$ . Die Menge

$$\text{int } D := \{x \in D \mid x \text{ innerer Punkt von } D\}$$

ist das *Innere* von  $D$ .

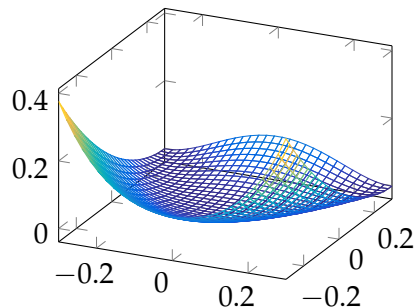
Eine andere Schreibweise für das Innere ist  $D^\circ$ .

**Satz 11.10** (Notwendige Bedingung für Extrema). *Hat  $f$  in  $x_0 \in \text{int } D$  ein lokales Extremum, so gilt*

$$\nabla f(x_0) = 0.$$

Anders gesagt: Lokale Extrema sind stationäre Punkte.

*Beispiel.* Betrachten wir die Funktion  $f(x, y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2$ :



Der Gradient ist

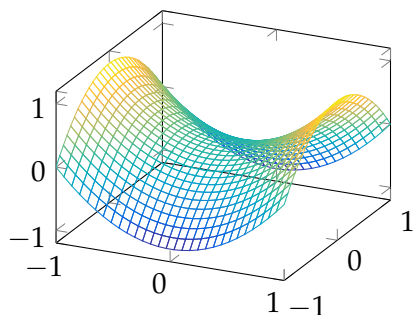
$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 48x^3 - 14xy \\ -7x^2 + 2y \end{pmatrix}.$$

Die stationären Punkte von  $f$  bekommen wir also Lösung von  $\nabla f(x, y) = 0$ , also von

$$\begin{aligned} 48x^3 - 14xy &= 0, \\ -7x^2 + 2y &= 0. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung lautet  $0 = 48x^3 - 14xy = 2x(24x^2 - 7y)$ , also muss  $x = 0$  oder  $24x^2 - 7y = 0$  gelten. Im zweiten Fall muss also  $y = 24x^2/7$  sein. Setzen wir dies  $y$  in die zweite Gleichung ein, bekommen wir  $0 = -7x^2 - 2y = -7x^2 + \frac{48}{7}x^2$ , also wieder  $x = 0$ . Es muss also in allen stationären Punkten  $x = 0$  sein und aus  $y = 24x^2/7$  bekommen wir, dass  $(x, y) = (0, 0)$  der einzige stationäre Punkt ist. Wir wissen aber noch immer nicht, ob dies ein Extremum ist!

Dass die Bedingung  $\nabla f(\vec{x}) = 0$  nicht hinreichend für Extrema ist, zeigt neben dem eindimensionalen Beispiel  $f(x) = x^3$  auch die Funktion  $f(x, y) = x^2 - y^2$ :



Der Punkt  $(0,0)$  ist auch hier der einzige stationäre Punkt, aber hier liegt weder ein Maximum noch ein Minimum vor.

Die Entscheidung, ob ein stationärer Punkt ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum (oder keins von beidem) ist, hängt an der zweiten Ableitung, also an der Hesse-Matrix. Wir betrachten die mehrdimensionale Taylor-Formel zweiter Ordnung: In einem stationärem Punkt  $\vec{x}_0$  gilt

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \langle \vec{x} - \vec{x}_0, Hf(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle + o(\|\vec{x} - \vec{x}_0\|^2), \quad \vec{x} \rightarrow \vec{x}_0.$$

Wir sehen also, dass es auf das Vorzeichen des Terms

$$\langle \vec{x} - \vec{x}_0, Hf(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) \rangle = (\vec{x} - \vec{x}_0)^T Hf(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

ankommt.

**Definition 11.11** (Definitheit von Matrizen). Eine symmetrische Matrix  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  heißt

$$\begin{aligned} \text{positiv definit} &: \iff \forall \vec{x} \neq \vec{0} : \vec{x}^T A \vec{x} > 0 \\ \text{positiv semidefinit} &: \iff \forall \vec{x} : \vec{x}^T A \vec{x} \geq 0 \\ \text{negativ definit} &: \iff \forall \vec{x} \neq \vec{0} : \vec{x}^T A \vec{x} < 0 \\ \text{negativ semidefinit} &: \iff \forall \vec{x} : \vec{x}^T A \vec{x} \leq 0 \end{aligned}$$

und gibt es  $\vec{x}, \vec{y}$  mit  $\vec{x}^T A \vec{x} > 0$  und  $\vec{y}^T A \vec{y} < 0$ , so heißt  $A$  indefinit

**Satz 11.12** (Klassifikation stationärer Punkte). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine  $C^2$ -Funktion und  $\vec{x}_0 \in \text{int } D$  ein stationärer Punkt von  $f$ . Dann gilt:

- (a) Ist  $\vec{x}_0$  ein lokales Minimum von  $f$ , so ist  $Hf(\vec{x}_0)$  positiv semidefinit, ist es ein lokales Maximum, so ist  $Hf(\vec{x}_0)$  negativ semidefinit.
- (b) Ist  $Hf(\vec{x}_0)$  positiv definit, so ist  $\vec{x}_0$  ein striktes lokales Minimum, ist  $Hf(\vec{x}_0)$  negativ definit, so ist  $\vec{x}_0$  ein striktes lokales Maximum. Ist  $Hf(\vec{x}_0)$  indefinit, so ist  $\vec{x}_0$  ein Sattelpunkt, d.h. es gibt in jeder Umgebung von  $\vec{x}_0$  Punkte  $\vec{x}^+$  und  $\vec{x}^-$  mit  $f(\vec{x}^-) < f(\vec{x}_0) < f(\vec{x}^+)$ .

**Beispiel.** Wir betrachten die Funktion  $f(x, y) = y^2(x - 1) + x^2(x + 1)$ . Der Gradient ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} y^2 + 2x(x + 1) + x^2 \\ 2y(x - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + 3x^2 + 2x \\ 2y(x - 1) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen wir die stationären Punkte. Dazu müssen wir  $\nabla f(x, y) = 0$  lösen. Die zweite dieser Gleichungen liefert  $y = 0$  oder  $x = 1$ . Der Fall  $x = 1$  liefert in der ersten Gleichung allerdings  $y^2 + 4 + 1 = 0$ , was keine reelle Lösung hat. Es kann also nur der Fall  $y = 0$  auftreten. Dies gibt in der ersten Gleichung  $0 = 0 + 3x^2 + 2x = x(3x + 2)$ , was die beiden Lösungen  $x_1 = 0$

und  $x_2 = -2/3$  hat. Es gibt also genau die beiden stationären Punkte

$$\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Um die Art der stationären Punkte zu bestimmen, berechnen wir die Hesse-Matrix als

$$Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 6x + 2 & 2y \\ 2y & 2(x - 1) \end{pmatrix}$$

In den stationären Punkten ist

$$Hf(\vec{x}_0) = Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad Hf(\vec{x}_1) = Hf(-\frac{2}{3}, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix}.$$

In  $\vec{x}_0$  ist die Hesse-Matrix indefinit, denn es gilt

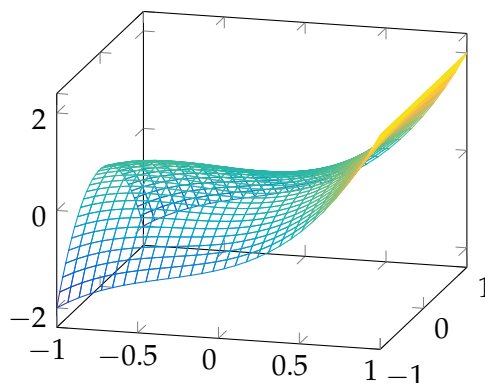
$$\vec{e}_1^T Hf(0, 0) \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$\vec{e}_2^T Hf(0, 0) \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 < 0.$$

In  $\vec{x}_1$  hingegen ist die Matrix negativ definit, denn für jeden Vektor  $\vec{x} = (x, y) \neq (0, 0)$  gilt

$$\begin{aligned} \vec{x}^T Hf(\vec{x}_1) \vec{x} &= \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= -2x^2 - \frac{10}{3}y^2 < 0. \end{aligned}$$

Wir halten fest: Die Funktion  $f$  hat in  $\vec{x}_0$  einen Sattelpunkt und in  $\vec{x}_1$  ein striktes lokales Maximum.



## 12 Implizite Funktionen und Extrema unter Nebenbedingungen

In diesem Abschnitt fragen wir uns, wann man Systeme von nicht-linearen Gleichungen auflösen kann. Genauer: Wir betrachten  $\vec{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $m < n$ , und frage uns, wann kann man die Gleichung

$$\vec{g}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

nach ein paar der Variablen  $x_i$  auflösen? Dabei bedeutet „auflösen“, eine Funktion  $\vec{f}$  existiert, so dass z.B.

$$\begin{pmatrix} g_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{pmatrix} x_{n-m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_{n-m}) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_{n-m}) \end{pmatrix}$$

Die Funktion  $\vec{f}$  bildet dabei vom  $\mathbb{R}^{n-m}$  in den  $\mathbb{R}^m$  ab. Man nennt in diesem Fall die Funktion  $\vec{f}$  *implizit durch  $\vec{g}$  definiert*.

**Beispiel.** Die Kreisgleichung  $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$  mit  $r > 0$  beschreibt einen Kreis mit Radius  $r$ . Hier ist  $n = 2$  und  $m = 1$  und wir können auf viele verschiedene Arten nach einer der beiden Variablen auflösen, insbesondere gibt es keine Funktion  $f$ , die für alle  $x, y$  mit  $g(x, y) = 0$  erfüllt, dass  $f(x) = y$  gilt. Wir haben z.B.

$$\begin{aligned} y &= \pm \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{für } -r \leq x \leq r \\ x &= \pm \sqrt{r^2 - y^2} \quad \text{für } -r \leq y \leq r \end{aligned}$$

In diesem Beispiel haben die Punkte, in denen nicht aufgelöst werden kann, die Eigenschaft, dass die Ableitung von  $g$  nach der Variable, nach der wir auflösen wollen, Null ist.

**Satz 12.1** (Satz über implizite Funktionen). *Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\vec{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  (mit  $1 \leq m \leq n$ ) eine  $C^1$ -Funktion. Die Variablen  $(\vec{x}, \vec{y})$  seien aufgeteilt in  $\vec{x} \in \mathbb{R}^{n-m}$  und  $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ . Sei weiterhin  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \in D$  eine Lösung von  $\vec{g}(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{0}$ , d.h. es gelte  $\vec{g}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) = \vec{0}$ , und die Jacobi-Matrix (bezüglich der Variablen  $\vec{y}$  im Punkt  $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$ )*

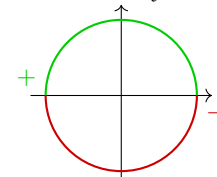
$$\frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial y_m}(\vec{x}_0, \vec{y}_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m}$$

*sei invertierbar. Dann gilt: Es gibt Umgebungen  $U \subset \mathbb{R}^{n-m}$  von  $\vec{x}_0$  und  $V \subset \mathbb{R}^m$  von  $\vec{y}_0$  mit  $U \times V \subset D$ , sowie eine eindeutige bestimmte Funktion  $\vec{f} : U \rightarrow V$  mit*

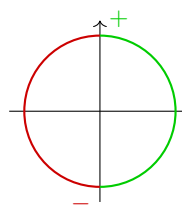
$$\vec{f}(\vec{x}_0) = \vec{y}_0 \quad \text{und} \quad \vec{g}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in U.$$

Es geht hier nicht darum, Gleichungen „explizit“ zu lösen, in dem Sinne, dass ein Formelausdruck für eine Lösung hingeschrieben werden kann, sondern nur um die Existenz von Lösungen.

Auflösen nach  $y$ :



Auflösen nach  $x$ :



Die Funktion  $\vec{f}$  ist eine  $C^1$ -Funktion und es gilt

$$Jf(\vec{x}) = - \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{y}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right)^{-1} \left( \frac{\partial \vec{g}}{\partial \vec{x}}(\vec{x}, \vec{f}(\vec{x})) \right).$$

Die letzte Aussage des Satzes ist besonders bemerkenswert: Wir können Ableitungen von  $\vec{f}$  ausrechnen, ohne  $\vec{f}$  explizit zu kennen!

*Beispiel.* Schauen wir wieder auf die Kreisgleichung  $g(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$  und nehmen den Lösungspunkt  $(x^0, y^0) = (0, r)$ . Die Jacobi-Matrix von  $g$  bezüglich  $y$  ist einfach eine skalare Funktion

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2y, \text{ also } \frac{\partial g}{\partial y}(0, r) = 2r \neq 0.$$

Der Satz über implizite Funktionen garantiert hier also, dass wir die Gleichung  $g(x, y) = 0$  in  $(0, r)$  lokal nach  $y$  auflösen können, d.h. es gibt eine Funktion  $f$ , welche für  $x$  in einer Umgebung von  $x^0 = 0$  die Gleichung  $g(x, f(x)) = 0$  erfüllt. Die Ableitung dieser Funktion existiert ebenfalls und wir können sie auch mit der Kettenregel bestimmen: Wir schreiben  $y(x)$  statt  $f(x)$  für die auflösende Funktion und bekommen

$$\begin{aligned} g(x, y(x)) &= 0 \\ \implies \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \implies \frac{dy}{dx} &= - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}}{\frac{\partial g}{\partial y}} \\ &= - \frac{2x}{2y} = - \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Im Punkt  $(x^0, y^0) = (0, r)$  haben wir also die Ableitung  $y'(0) = \frac{0}{r} = 0$ . Wir können dies auch mit der auflösenden Funktion  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$  überprüfen: Es gilt

$$f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = - \frac{x}{f(x)}.$$

Kommen wir nun zur Frage: Wie können wir Maxima und Minima einer Funktion  $f$  einer Variablen  $\vec{x}$  bestimmen, wenn wir nur die Werte  $\vec{x}$  einsetzen können, die durch weitere Gleichungen  $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$  eingeschränkt sind? Man spricht in diesem Fall von *Extremalproblemen unter Nebenbedingungen*. Genauer: Wir haben  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Wir wollen das Problem

$$\min_{\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}} f(\vec{x})$$

lösen. Die Menge

$$G := \left\{ \vec{x} \in D \mid \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0} \right\}$$

ist die Menge der *zulässigen Punkte* oder auch *zulässige Menge*. Die Funktion  $f$  heißt *Zielfunktion*.

Betrachten wir zuerst ein Beispiel:

Wir haben übrigens hier die Differentialgleichung  $y' = \frac{x}{y}$  für Kreise gefunden.

Analog können wir auch Maximierungsprobleme

$$\max_{\vec{g}(\vec{x})=\vec{0}} f(\vec{x})$$

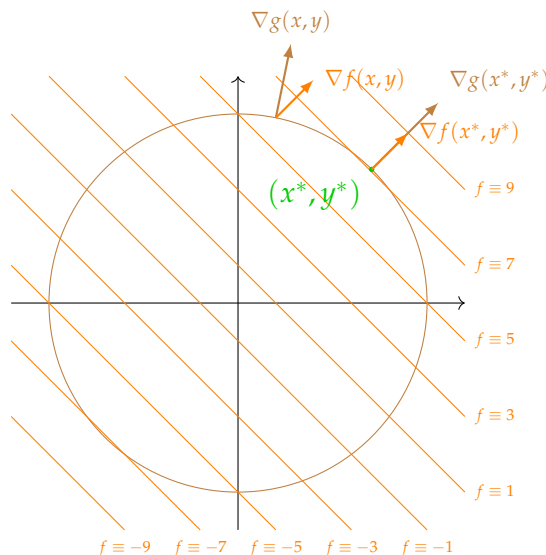
behandeln.



*Beispiel.* Es seien  $f(x, y) = x + y$  und  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 25$  und wir betrachten das Maximierungsproblem

$$\max_{x^2+y^2=25} x + y.$$

Die geometrische Situation ist einfach: Die zulässige Menge ist eine Kreislinie mit Radius 5 und die Zielfunktion ist linear mit Gradient  $(1, 1)^T$ . Wir haben also folgende Situation:



Wir erkennen, dass das Optimum im grünen Punkt liegt. In diesem Punkt ist der Gradient von  $f$  natürlich nicht Null, aber er zeigt in die gleiche Richtung wie der Gradient der Nebenbedingung (von der wir ja die Höhenlinie  $\{g(x, y) = 0\}$  gezeichnet haben).

Die Beobachtung, dass der Gradient der Zielfunktion  $f$  „in die gleiche Richtung zeigen“ muss, wie Gradienten der Nebenbedingungen, ist auch allgemein richtig:

**Satz 12.2** (Lagrange Multiplikatoren). *Es seien  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\vec{g} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  jeweils  $C^1$ -Funktionen. Dann gilt: Ist  $\vec{x}^0 \in D$  ein Extremum von  $f$  unter der Bedingung  $g(\vec{x}) = \vec{0}$ , so gibt es einen Vektor  $\vec{\lambda}^0$  von sogenannten Lagrange Multiplikatoren, so dass gilt*

$$\begin{aligned} \nabla f(\vec{x}^0) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^0 \nabla g_i(\vec{x}^0) &= \vec{0} \\ \vec{g}(\vec{x}^0) &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Man kann sich die notwendige Bedingung für ein Extremum mit Hilfe der *Lagrange-Funktion* zu  $f$  und  $\vec{g}$  merken. Diese ist  $L : D \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) := f(\vec{x}) + \vec{\lambda}^T \vec{g}(\vec{x}) = f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\vec{x}).$$

Die beiden Gleichungen aus Satz 12.2 (also das *Optimalitätssystem*) bekommt man, indem man die Ableitungen von  $L$  nach  $\vec{x}$  und nach  $\vec{\lambda}$  Null setzt:

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{x}}L(\vec{x}, \vec{\lambda}) &= \nabla f(\vec{x}) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}) = \vec{0} \\ \nabla_{\vec{\lambda}}L(\vec{x}, \vec{\lambda}) &= \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

Das Optimalitätssystem sind übrigens  $m + n$  nichtlineare Gleichungen mit  $m + n$  Unbekannten. Um Extrema zu bestimmen muss man zwar die Multiplikatoren  $\vec{\lambda}$  bestimmen, ihr Wert spielt allerdings keine Rolle.

Wenden wir das Verfahren einmal an einem Beispiel an:

*Beispiel* (Minimum-Norm Lösungen). Es sei  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  mit  $n \geq m$  und  $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ . Wir suchen eine Lösung zu

$$\min \|\vec{x}\|_2^2 \quad \text{unter der Bedingung} \quad A\vec{x} = \vec{b}.$$

Das Problem ist von der Form

$$\min f(\vec{x}) \quad \text{mit} \quad \vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$$

mit  $f(\vec{x}) = \|\vec{x}\|_2^2$ ,  $\vec{g}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$ . Satz 12.2 sagt uns, dass wir  $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^m$  und ein zulässiges  $\vec{x}^0 \in \mathbb{R}^n$  finden sollten, so dass  $\nabla f(\vec{x}^0) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla g_i(\vec{x}^0)$ . Wir berechnen

$$\nabla f(\vec{x}^0) = 2\vec{x}^0, \quad \text{und} \quad \nabla g_i(\vec{x}^0) = \vec{a}_i$$

wobei  $\vec{a}_i$  der Vektor ist der in der  $i$ -ten Zeile von  $A$  liegt.

Wir bekommen die Gleichung

$$2\vec{x}^0 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \vec{a}_i = A^T \vec{\lambda}. \quad (*)$$

Da wir auch noch wissen, dass  $\vec{x}^0$  zulässig sein muss, haben wir auch noch die Gleichung  $A\vec{x}^0 = \vec{b}$ . Setzen wir ineinander ein, bekommen wir für den Lagrange-Multiplikator die Gleichung  $AA^T \vec{\lambda} = 2\vec{b}$ . Es gilt  $AA^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$  und nehmen wir an, dass  $AA^T$  invertierbar ist, so folgt  $\vec{\lambda} = 2(AA^T)^{-1}\vec{b}$ . Aus (\*) folgt nun

$$\vec{x}^0 = A^T(AA^T)^{-1}\vec{b}.$$

Die Lösung eines unterbestimmten Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$  welche die kleinste Norm hat, ist also  $A^T(AA^T)^{-1}\vec{b}$ .

Der Formalismus würde hier wie folgt aussehen: Die Lagrange-Funktion ist

$$L(\vec{x}, \vec{\lambda}) = \|\vec{x}\|_2^2 + \vec{\lambda}^T (A\vec{x} - \vec{b})$$

und das Optimalitätssystem lautet

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{x}}L(\vec{x}^0, \vec{\lambda}^0) &= 2\vec{x}^0 + A^T \vec{\lambda}^0 = 0 \\ \nabla_{\vec{\lambda}}L(\vec{x}^0, \vec{\lambda}^0) &= A\vec{x}^0 - \vec{b} = 0.\end{aligned}$$

Die Jacobimatrix von  $\vec{g}(\vec{x}) = A\vec{x} - \vec{b}$  ist  $J\vec{g}(\vec{x}) = A$  und daher ist  $\nabla g_i(\vec{x})$  das Transponierte der  $i$ -te Zeile von  $A$ .

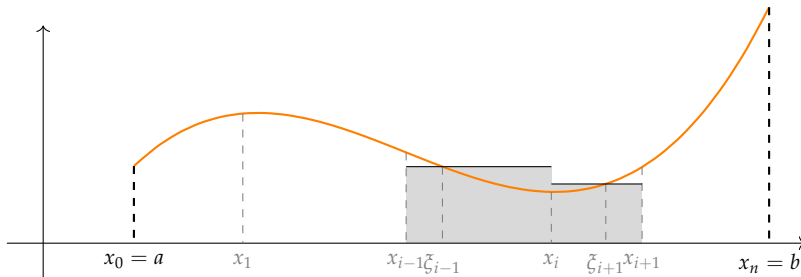
### 13 Das bestimmte Integral

Wenden wir uns jetzt der Integration zu. Während es bei Differentialrechnung um Änderungen geht, geht es bei der Integralrechnung um Flächen und Volumina. Wir fangen mit der Berechnung der Fläche unter einer Kurve an: Es sei in diesem Abschnitt  $I = [a, b]$ . Wir betrachten eine beschränkte Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Wir nähern die Fläche unter der Kurve durch Rechtecke an.

Wir zerlegen  $I$  in Teile durch eine *Zerlegung*

$$Z = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$$

und nennen  $F(Z) := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$  die *Feinheit* der Zerlegung  $Z$ . Mit  $\mathbf{Z}(I)$  sei die Menge aller Zerlegungen von  $I$  bezeichnet. Wir bilden nun mit Hilfe der Zerlegung  $Z$  eine Fläche aus Rechtecken, die die Fläche unter dem Graphen approximiert. Wir wählen in jedem Teilintervall  $[x_i, x_{i+1}]$  einen Punkt  $\xi_i$  aus und bilden das Rechteck mit der Höhe  $\xi_i$ :



Die Fläche eines einzelnen Rechtecks ist  $f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$  (Höhe mal Grundfläche) und wir erhalten als Approximation die Fläche unter dem Graphen

$$R_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Dies ist eine *Riemannsche Summe* zur Zerlegung  $Z$  (mit Zwischenpunkten  $\xi_i$ ).

**Definition 13.1.** Zu einer Zerlegung  $Z$  heißt

$$U_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \inf \{f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

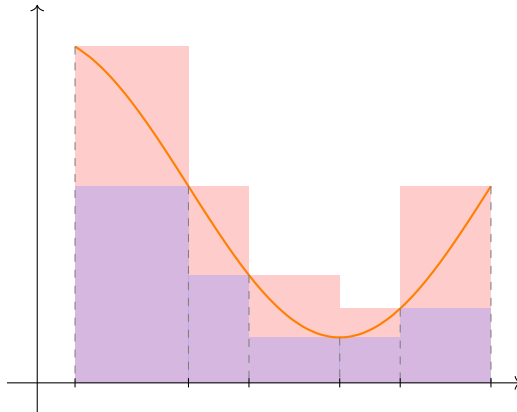
die *Untersumme* von  $f$  und entsprechend

$$O_f(Z) := \sum_{i=0}^{n-1} \sup \{f(x) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}\} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

die *Obersumme*.

Die Rechtecke zur Untersumme sind hier blau und die zur Obersumme sind rot eingezeichnet:

Dabei legen wir fest, dass Flächen die unterhalb der x-Achse liegen, negativen Flächeninhalt haben. Das stellt sich als sehr praktisch heraus.



Für jede Riemannsumme gilt immer  $U_f(Z) \leq R_f(Z) \leq O_f(Z)$ . Wird eine Zerlegung durch hinzufügen von Punkten verfeinert, so werden Obersummen kleiner und Untersummen größer. D.h. bei diesem Prozess bilden die Untersummen eine nach oben beschränkte wachsende Folge und die Obersummen eine nach unten beschränkte fallende Folge. Wir definieren also:

**Definition 13.2.** Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. Das (Riemannsche) *Unterintegral* von  $f$  über  $I$  ist

$$\int_a^b f(x) dx := \sup_{Z \in \mathcal{Z}} U_f(Z)$$

und das (Riemannsche) *Oberintegral* ist

$$\overline{\int_a^b} f(x) dx := \inf_{Z \in \mathcal{Z}} O_f(Z).$$

Die Funktion  $f$  heißt Riemann *integrierbar* über  $I$ , wenn  $\int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$  gilt und in diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b f(x) dx = \overline{\int_a^b} f(x) dx$$

das (Riemann-) *Integral* von  $f$  über  $I$ .

**Beispiel.** (a) Wir integrieren eine konstante Funktion  $f(x) \equiv c$ . In diesem Fall stimmen Ober- und Unterintegral für alle Zerlegungen überein, es gilt nämlich

$$\begin{aligned} U_f(Z) &= O_f(Z) = \sum_{i=0}^n c(x_{i+1} - x_i) \\ &= c \cdot ((x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1})) \\ &= c \cdot (x_n - x_0) = c \cdot (b - a). \end{aligned}$$

Es folgt also: Konstante Funktionen sind integrierbar mit

$$\int_a^b c dx = c \cdot (b - a).$$

- (b) Integrieren wir jetzt  $f(x) = x$  für die Zerlegung  $Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\}$ , also  $x_i = \frac{i}{n}$ . Wir bekommen

$$\begin{aligned} U_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i}{n} \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} O_f(Z_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i+1}{n} \left( \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) = \frac{1}{n^2} \left( \frac{n(n-1)}{2} + n \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\sup_Z U_f(Z) = \frac{1}{2}, \quad \inf_Z O_f(Z) = \frac{1}{2}$$

und also ist  $f(x) = x$  integrierbar mit

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

- (c) Ist  $c \in [a, b]$  und  $f(x) = \begin{cases} 0 & : x \neq c \\ 1 & : x = c \end{cases}$ . Auch diese Funktion ist integrierbar mit  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , denn für jede Zerlegung  $Z$  gilt

$$U_f(Z) = 0 < O_f(Z) \leq 2F(Z)$$

und daher sind Ober- und Unterintegral beide Null.

**Satz 13.3.** (a) Für  $a \leq c \leq b$  und  $f$  integrierbar auf  $[a, b]$  gilt

Intervalladditivität des Integrals

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- (b) Für integrierbare Funktionen  $f$  und  $g$  und Skalar  $\alpha$  ist auch  $f + \alpha g$  integrierbar und es gilt

Linearität des Integrals

$$\int_a^b (f(x) + \alpha g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \alpha \int_a^b g(x) dx$$

(c) Gilt  $f(x) \geq 0$  für alle  $x \in [a, b]$  für integrierbares  $f$ , so gilt auch  

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

Positivität des Integrals

(d) Für auf  $I = [a, b]$  integrierbares  $f$  gelten die Abschätzungen

$$\left( \inf_{x \in I} f(x) \right) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \left( \sup_{x \in I} f(x) \right) \cdot (b - a)$$

und

Standardabschätzung für Integrale

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq \left( \sup_{x \in I} |f(x)| \right) \cdot (b - a).$$

Die Intervalladditivität gilt für beliebige  $a, b, c$  wenn wir für  $a < b$  festlegen

$$\int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx, \quad \int_a^a f(x) dx = 0.$$

**Satz 13.4.** Ist  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt, so gilt

$$\begin{aligned} f \text{ monoton} &\implies f \text{ integrierbar, und} \\ f \text{ stetig} &\implies f \text{ integrierbar.} \end{aligned}$$

Schauen wir uns noch einmal die Definition von Ober- und Unterintegral an, so stellen wir fest: Eine integrierbare Funktion kann man an endlich vielen Punkten beliebig umdefinieren und sie bleibt integrierbar und der Wert des Integrals ändert sich nicht. Insbesondere sind auch stückweise stetige Funktionen integrierbar.

Die Berechnung von Integralen mit Hilfe von Ober- und Unterintegral ist aufwändig. Einfacher ist es dank des folgenden Satzes:

**Satz 13.5** (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Es sei  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gelten:

(a) Ist  $F(x) := \int_a^x f(t) dt$ , so ist  $F$  differenzierbar mit  $F' = f$ .

(b) Ist  $F$  eine Funktion mit  $F' = f$ , so gilt  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

**Definition 13.6.** Eine Funktion  $F$  heißt *Stammfunktion* von  $f$ , wenn  $F' = f$  gilt.

Sind  $F_1$  und  $F_2$  Stammfunktionen von  $f$ , so gilt  $(F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f - f = 0$  daher gilt nach den Mittelwertsätzen, dass  $F_1 - F_2 = \text{const.}$  Wir sehen: Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich höchstens um eine additive Konstante.

Ist  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ , so ist auch jedes  $F + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  eine Stammfunktion von  $f$ . Es ergibt daher keinen Sinn von „der Stammfunktion von  $f$ “ zu sprechen, das es immer unendlich viele gibt.

Hier eine Skizze des Beweises des Hauptsatzes:

Zu (a): Es sei  $h \neq 0$  und  $x$  so, dass  $x$  und  $x+h$  beide in  $I$  liegen. Wir zeigen, dass  $F' = f$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1}{h} (F(x+h) - F(x)) - f(x) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt - h \cdot f(x) \right| \\
 &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\
 &= \frac{1}{|h|} \left| \int_x^{x+h} f(t) - f(x) dt \right| \\
 &\leq \frac{1}{|h|} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| dt \\
 &\leq \frac{1}{|h|} |x+h-x| \sup \{ |f(t) - f(x)| \mid x \leq t \leq x+h \}.
 \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass der letzte Ausdruck für  $h \rightarrow 0$  für stetige Funktionen  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gegen Null geht.

Zu (b): Ist  $F$  eine beliebige Stammfunktion von  $f$ , so gilt nach

(a)  $F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$  für ein  $c$ . Also ist

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt + c - \left( \int_a^a f(t) dt + c \right) = \int_a^b f(t) dt.$$

## 14 Integrationsregeln

Nach dem Hauptsatz kann man Integrale bestimmen, indem man Stammfunktionen findet. Das ist in einigen Fällen einfach, wenn man die grundlegenden Ableitung im Kopf hat. Ist  $f(x) = x^n$ , so ist zum Beispiel  $F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$  eine Stammfunktion. Man kann jede Tabelle für Ableitungen umgekehrt als Tabelle für Stammfunktionen lesen. Im Allgemeinen ist es jedoch nicht einfach (und im übrigen auch nicht immer möglich), Stammfunktionen explizit zu bestimmen.

Es gibt ein paar Regeln, die dabei helfen. Für diese Regeln ist es praktisch wenn man die (etwas ungenaue) Notation des *unbestimmten Integrals* einführt: Zu einer Funktion  $f$  bezeichnet man mit  $\int f$  (oder  $\int f(x)dx$ ) eine beliebige Stammfunktion von  $f$ . Das ist natürlich problematisch, da es ja immer unendlich viele Stammfunktionen gibt, so dass man oft eine Integrationskonstante mitführt und z.B. schreibt

$$\int x^2 = \frac{1}{3}x^3 + C \text{ oder auch } \int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C.$$

Kommen wir zu erst zur Regel der partiellen Integration (welche direkt aus der Produktregel für Ableitungen folgt):

**Satz 14.1** (Partielle Integration). Sind  $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  zwei  $C^1$ -Funktionen, so gilt

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

*Beweis.* Die Produktregel lautet

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$$

Das bedeutet aber, dass  $g = u \cdot v$  eine Stammfunktion von  $u' \cdot v + u \cdot v'$  ist. Daher gilt

$$\int_a^b u'(x)v(x) - u(x)v'(x)dx = g(b) - g(a) = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^b.$$

□

Mit unbestimmten Integralen geschrieben lautet die Regel der partiellen Integration

$$\int uv' = uv - \int u'v.$$

*Beispiel.* (a) Wir wollen eine Stammfunktion von  $f(x) = xe^x$  bestimmen. Wir setzen  $u(x) = x$  und  $v'(x) = e^x$ . Dann gilt  $u'(x) = 1$  und wir nehmen als eine Stammfunktion von  $v'$  die Funktion  $v(x) = e^x$ . Damit haben wir

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \int u(x)v'(x)dx \\ &= u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx \\ &= xe^x - \int 1 \cdot e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C. \end{aligned}$$



- (b) Für eine Stammfunktion von  $f(x) = \sin(x)^2$  setzen wir  $u(x) = v'(x) = \sin(x)$  und nehmen  $u'(x) = \cos(x)$  und  $v(x) = -\cos(x)$ . Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \sin(x)^2 dx &= \int u(x)v'(x) dx \\ &= \sin(x) \cdot (-\cos(x)) - \int \cos(x) \cdot (-\cos(x)) dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + \int \cos(x)^2 dx.\end{aligned}$$

Es gilt  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  und daher  $\cos(x)^2 = 1 - \sin(x)^2$ . Damit bekommen wir

$$\int \sin(x)^2 dx = -\sin(x) \cos(x) + \int 1 - \sin(x)^2 dx$$

und formen um zu

$$\begin{aligned}2 \int \sin(x)^2 dx &= -\sin(x) \cos(x) - \int 1 dx \\ &= -\sin(x) \cos(x) + x + C\end{aligned}$$

und es folgt

$$\int \sin(x)^2 dx = \frac{1}{2} (x - \sin(x) \cos(x)) + C.$$

Ob wir nun  $+C$  oder  $+C/2$  schreiben spielt keine Rolle.

Auch zur Kettenregel für Ableitungen gibt es eine Integrationsregel:

**Satz 14.2** (Substitutionsregel). Es sei  $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$  eine  $C^1$ -Funktion und  $f : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann gilt

$$\int_a^b f(h(t))h'(t)dt = \int_{h(a)}^{h(b)} f(x)dx.$$

*Beweis.* Es sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$ . Dann ist das Integral auf der rechten Seite gleich  $F(h(b)) - F(h(a)) = (F \circ h)(x) \Big|_{t=a}^{t=b}$  und da  $(F \circ h)'(t) = (F' \circ h)(t) \cdot h'(t) = f(h(t))h'(t)$  gilt, folgt die Aussage aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.  $\square$

Mit unbestimmten Integralen wird die Regel geschrieben als

$$\int f(h(t))h'(t)dt = F(h(t)).$$

Hier ein Beispiel, wie man die Substitutionsregel in der Praxis anwendet, wenn man erkennt, dass der Integrand eine passende Form hat:

*Beispiel.* Wir betrachten das Integral  $\int_a^b t \cos(t^2 + 1) dx$ . Mit  $f(x) = \cos(x)$  und  $h(t) = t^2 + 1$  bekommen wir  $t \cos(t^2 + 1) = \frac{1}{2} h'(t) f(h(t))$  und daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b t \cos(t^2 + 1) dt &= \frac{1}{2} \int_{h(a)}^{h(b)} f(x) dx = \frac{1}{2} \int_{a^2+1}^{b^2+1} \cos(x) dx \\ &= \frac{1}{2} (\sin(b^2 + 1) - \sin(a^2 + 1)). \end{aligned}$$

Häufiger benutzt man die Substitutionsregel etwas anders: Um ein Integral  $\int_c^d f(x) dx$  zu berechnen, substituiert man  $x = h(t)$  mit stetig differenzierbarem  $h$ . Man bestimmt  $a$  und  $b$  so, dass  $h(a) = c$  und  $h(b) = d$  und bekommt dann

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(h(t)) h'(t) dt$$

und wenn man ein gutes  $h$  gewählt hat, kann es sein, dass man das Integral auf der rechten Seite einfach bestimmen kann. Für unbestimmte Integrale ist das Vorgehen im Wesentlichen das gleiche:

*Beispiel.* Wir betrachten das Integral  $\int e^{\sqrt{x}} dx$ . Wir substituieren  $t = \sqrt{x}$ , d.h. wir haben  $h(t) = t^2 = x$ . Damit ist formal  $dx = 2t dt$  und es gilt

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^t \cdot 2t dt = 2 \int t e^t = 2(t-1)e^t + C$$

Um jetzt die Stammfunktion in  $x$  auszudrücken machen wir die Rücksubstitution  $t = \sqrt{x}$  und bekommen

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} + C.$$

Oft ist eine gute Substitution nicht einfach zu finden und auch nicht offensichtlich:

*Beispiel.* Im Integral  $\int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx$  substituieren wir  $x = a \cos(t)$ . Es ist  $dx = -a \sin(t) dt$  und die Umrechnung der Grenzen ergibt:

$$\begin{aligned} x = a &\iff t = 0 \\ x = -a &\iff t = \pi. \end{aligned}$$

Also ist (wegen  $1 - \cos(t)^2 = \sin(t)^2$ )

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx &= - \int_{\pi}^0 \sqrt{1 - \cos(t)^2} (a \sin(t)) dt \\ &= a \int_0^{\pi} \sin(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Man kann sich dieses Vorgehen merken, indem man  $x = h(t)$  setzt und formal differenziert um  $dx = h'(t) dt$  zu bekommen.

Eine Stammfunktion von  $te^t$  hatten wir schon mit Hilfe der partiellen Integration bestimmt.

Von  $\sin(t)^2$  haben wir schon eine Stammfunktion  $\frac{1}{2}(t - \sin(t) \cos(t))$  bestimmt. Wir bekommen also

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx &= \frac{a}{2} (t - \sin(t) \cos(t)) \Big|_{t=0}^{\pi} \\ &= \frac{a}{2} [(\pi - \sin(\pi) \cos(\pi)) - (0 - \sin(0) \cos(0))] \\ &= \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

Bei der Berechnung muss man aufpassen, dass man beim rein formalen Rechnen keine Fehler macht:

*Beispiel.* Da  $\log'(x) = 1/x$  gilt, folgt für  $a, b > 0$  gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(x) \Big|_{x=a}^b.$$

Außerdem gilt für  $x < 0$  und  $f(x) = \log(-x)$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x}$  und daher gilt für  $a, b < 0$ , dass  $\int_a^b \frac{1}{x} dx = \log(-x) \Big|_{x=a}^b$ . Anders ausgedrückt:  $\log(|x|)$  eine Stammfunktion von  $1/x$  auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Achtung: Integrale der Form  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$  sind nicht erklärt, da der Integrand nicht beschränkt ist. (Formales rechnen mit der Stammfunktion führt auf das sinnlose Ergebnis  $\int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = \log(1) - \log(1) = 0$ .)

**Satz 14.3** (Mittelwertsatz der Integralrechnung). Es sei  $I = [a, b]$  und  $\varphi : I \rightarrow [0, \infty[$  Riemann-integrierbar. Dann gilt: Für jede stetige Funktion  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  gibt es ein  $\xi \in I$ , so dass gilt

$$\int_a^b f(x) \varphi(x) dx = f(\xi) \int_a^b \varphi(x) dx.$$

*Beweis.*

Wir setzen

$$M := \sup_{x \in I} f(x), \quad m := \inf_{x \in I} f(x).$$

Dann gilt  $m\varphi \leq \varphi f \leq M\varphi$  und es folgt

$$m \int_a^b \varphi(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) f(x) dx \leq M \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Daher gibt es ein  $\mu \in [m, M]$  mit

$$\int_a^b \varphi(x) f(x) dx = \mu \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Schließlich garantiert der Zwischenwertsatz (Satz 6.4) die Existenz eines  $\xi$  mit  $f(\xi) = \mu$ .  $\square$

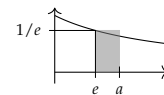
Mit Hilfe des letzten Beispiels und elementaren Abschätzungen können wir die unbedeutende, aber überraschende Ungleichung

$$\pi^e < e^\pi$$

zeigen: Für  $a > 0$  gilt  $\log(a) - 1 = \int_e^a \frac{1}{x} dx$  und da  $x \mapsto 1/x$  strikt fallend ist, gilt für  $a > e$  immer

$$\log(a) - 1 = \int_e^a \frac{1}{x} dx < \frac{1}{e}(a - e) = \frac{a}{e} - 1,$$

siehe folgende Grafik:

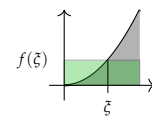


Multiplikation mit  $e$  und anwenden von  $\exp$  zeigt  $a^e < e^a$  für  $a > e$ .

Im Spezialfall  $\varphi(x) = 1$  gibt es also ein  $\xi \in I$ , so dass

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a).$$

Das bedeutet, dass die Fläche unter dem Graphen gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen  $b - a$  und  $f(\xi)$  ist:



## 15 Kurvenintegrale

Schauen wir uns jetzt an, wie Integrale von Kurven  $\vec{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  definiert werden können. Dabei nennen wir eine Kurve *geschlossen*, wenn  $\vec{c}(a) = \vec{c}(b)$  gilt, also wenn ihr Anfangspunkt  $\vec{c}(a)$  gleich ihrem Endpunkt  $\vec{c}(b)$  ist.

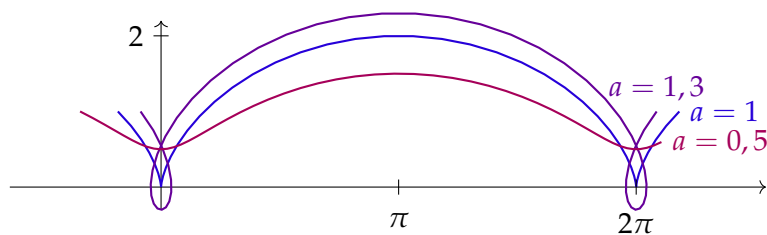
*Beispiel.* 1. Wir kennen schon den *Einheitskreis*  $\vec{c}: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

2. Die Abbildung  $\vec{c}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} rt - a \sin(t) \\ r - a \cos(t) \end{pmatrix}$$

mit  $a \geq 0$  heißt *Zykloide*. Hier einige Plots davon für  $r = 1$  und verschiedene Werte von  $a$ :



Es gilt

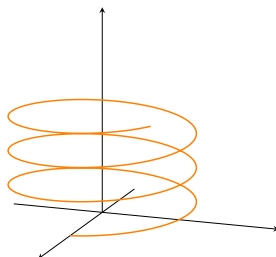
$$\vec{c}'(t) = \begin{pmatrix} r - a \cos(t) \\ a \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass für  $r = a$  und  $t = 2\pi k$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )  $\vec{c}'(t) = \vec{0}$  gilt. Das sind genau die Stellen mit den Knicken in der Kurve.

3. Für  $r, h > 0$  ist

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} r \cos(2\pi t) \\ r \sin(2\pi t) \\ ht \end{pmatrix}$$

eine *Schraubenlinie* mit Radius  $r$  und „Ganghöhe“  $h$ .

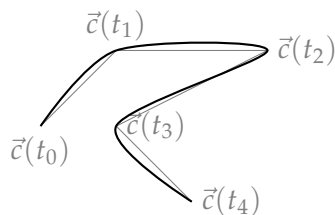


**Definition 15.1.** Wir nennen eine Kurve  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  *glatt*, wenn für alle  $t \in [a, b]$  gilt  $\vec{c}'(t) \neq \vec{0}$ .

Wir können die Länge einer Kurve mit einem Integral definieren. Dazu approximieren wir die Kurve durch Polygonzüge: Zu einer Zerlegung  $Z = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b\}$  ist

$$L_{\vec{c}}(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \|\vec{c}(t_{j+1}) - \vec{c}(t_j)\|_2$$

die Länge des Polygonzuges der Kurve  $\vec{c}$  zu  $Z$ .



**Definition 15.2.** Ist die Menge  $\{L_{\vec{c}}(Z) \mid Z \in \mathbf{Z}([a, b])\}$  nach oben beschränkt, so heißt  $\vec{c}$  *rektifizierbar* und die *Länge* (auch *Bogenlänge*) von  $\vec{c}$  ist definiert durch

$$L(\vec{c}) := \sup \{L_{\vec{c}}(Z) \mid Z \in \mathbf{Z}([a, b])\}.$$

**Satz 15.3.** Jede  $C^1$ -Kurve  $\vec{c}$  ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\vec{c}) = \int_a^b \|\vec{c}'(t)\|_2 dt.$$

Beweisskizze: Wir betrachten eine Zerlegung  $Z$  und schreiben

$$L_{\vec{c}}(Z) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{\|\vec{c}(t_{j+1}) - \vec{c}(t_j)\|_2}{t_{j+1} - t_j} (t_{j+1} - t_j).$$

Mit dem Mittelwertsatz bekommen wir ein  $\xi_j \in [t_j, t_{j+1}]$  mit

$$\frac{\vec{c}(t_{j+1}) - \vec{c}(t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \vec{c}'(\xi_j)$$

und wir erkennen eine Riemann-Summe für das gesuchte Integral!

Wir können eine Kurve „umparametrisieren“, ohne ihre Form zu ändern: Ein *Parameterwechsel* der Kurve  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist eine bijektive, wachsende Abbildung  $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$  und die umparameterisierte Kurve ist  $\vec{c} \circ h : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Satz 15.4.** Für eine  $C^1$ -Kurve  $\vec{c}$  und einen  $C^1$  Parameterwechsel gilt

$$L(\vec{c}) = L(\vec{c} \circ h).$$

*Beweis.*

Die Zykloide ist für  $a = 1$  nicht glatt (obwohl  $\vec{c}$  differenzierbar ist), denn es ergeben sich an den Stellen mit  $\vec{c}'(t) = 0$  Knicke.

Wegen  $(\vec{c} \circ h)'(\tau) = \vec{c}'(h(\tau))h'(\tau)$  gilt

$$\begin{aligned} L(\vec{c} \circ h) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{c}'(h(\tau))h'(\tau)\|_2 d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{c}'(h(\tau))\|_2 h'(\tau) d\tau \\ &= \int_a^b \|\vec{c}'(t)\|_2 dt = L(\vec{c}). \end{aligned}$$

□

**Definition 15.5.** Für eine  $C^1$ -Kurve  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt

$$S(t) := \int_a^t \|\vec{c}'(\tau)\|_2 d\tau$$

die *Bogenlängenfunktion* von  $\vec{c}$ .

*Beispiel.* Wir berechnen die Länge einer Schraubenlinie mit Radius  $r$  und Ganghöhe  $h$ . Hier ist  $\vec{c}(t) = (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)^T$ . Es gilt  $\vec{c}'(t) = (-r2\pi \sin(2\pi t), r2\pi \cos(2\pi t), h)^T$  und daher ist

$$\|\vec{c}'(t)\|_2 = \sqrt{r^2(2\pi)^2 \sin^2(2\pi t) + r^2(2\pi)^2 \cos^2(2\pi t) + h^2} = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2}.$$

Die Bogenlängenfunktion ist also

$$S(t) = \int_0^t \|\vec{c}'(\tau)\|_2 d\tau = \int_0^t \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} d\tau = \sqrt{(2\pi r)^2 + h^2} t$$

und daher ist die Länge einer Umdrehung  $S(1) = \sqrt{r^2 + h^2}$ .

Kommen wir jetzt zum Kurvenintegral 1. Art. Dieses ist für Skalarfelder  $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, welche wir „entlang der Kurve“ integrieren wollen. Schauen wir uns noch einmal die Definition der Länge einer Kurve mit Hilfe von Polgonzügen an, und gewichten dabei den Abschnitt von  $\vec{c}(t_j)$  bis  $\vec{c}(t_{j+1})$  mit  $s(\vec{c}(t_j))$ , so bekommen wir die Summe

$$\sum_{j=0}^{m-1} s(\vec{c}(t_j)) \|\vec{c}(t_{j+1}) - \vec{c}(t_j)\|_2.$$

Wie schon bei der Bogenlänge ist dies eine Riemann-Summe und zwar für das Integral

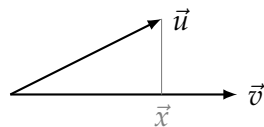
$$\int_a^b s(\vec{c}(t)) \|\vec{c}'(t)\|_2 dt.$$

Daher definieren wir:

**Definition 15.6** (Kurvenintegral 1. Art). Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow D$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann ist das *Kurvenintegral 1. Art* von  $f$  längs  $\vec{c}$

$$\int_{\vec{c}} f(\vec{x}) ds := \int_a^b f(\vec{c}(t)) \|\vec{c}'(t)\|_2 dt.$$

Wollen wir ein Vektorfeld  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  entlang einer Kurve  $\vec{c}$  integrieren, so suchen wir den „Anteil von  $\vec{f}(\vec{c}(t))$  in Richtung  $\vec{c}'(t)$ “. Wir müssen also das Feld  $\vec{f}$  in Richtung der Kurve projizieren. Betrachten wir folgende Situation:



Aus der Definition des Skalarproduktes wissen wir

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \|\vec{v}\|_2 \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})).$$

In der Zeichnung gilt daher

$$\cos(\angle(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{\|\vec{x}\|_2}{\|\vec{u}\|_2}.$$

Da  $\vec{x}$  in Richtung von  $\vec{v}$  zeigt, folgt

$$\vec{x} = \|\vec{x}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|_2}.$$

Es folgt also, dass

$$\langle \vec{u}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|_2} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \cos(\angle(\vec{u}, \vec{v}))$$

die (vorzeichenbehaftete) Länge der Projektion von  $\vec{u}$  auf  $\vec{v}$  ist. Für die „Arbeit“ müssen wir also  $\vec{f}(\vec{c}(t_j))$  auf die Richtung  $\vec{c}'(t_j)$  projizieren.

**Definition 15.7** (Kurvenintegral 2. Art). Sei  $D \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld und  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve. Dann ist das *Kurvenintegral 2. Art* definiert durch

$$\int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \int_a^b \langle \vec{f}(\vec{c}(t)), \vec{c}'(t) \rangle dt.$$

Ist die Kurve  $\vec{c}$  geschlossen, so schreibt man auch

$$\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}.$$

Das Kurvenintegral erster Art würde man z.B. einsetzen, wenn man die Gesamtmasse eines Drahtes bestimmt: ist  $\vec{c}(t)$  der gebogene Draht und  $s(\vec{x})$  die Massendichte am Punkt  $\vec{x}$ , so entspricht das Kurvenintegral 1. Art der Gesamtmasse.

Stellen Sie sich dafür vor, dass eine Masse entlang einer Kraftfeldes bewegt werden soll. Die Arbeit, die dafür verrichtet werden muss ist „Kraft  $\times$  Weg“, wobei aber nur die Kraft in Richtung des Weges zählt.

Ist  $\vec{c}$  glatt, kann man das Kurvenintegral 2. Art als eins 1. Art schreiben: Mit dem Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}(t) := \vec{c}'(t) / \|\vec{c}'(t)\|_2$  gilt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_a^b \langle \vec{f}(\vec{c}(t)), \vec{c}'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \langle \vec{f}(\vec{c}(t)), \vec{T}(t) \rangle \|\vec{c}'(t)\|_2 dt \\ &= \int_{\vec{c}} \langle \vec{f}, \vec{T} \rangle ds. \end{aligned}$$

**Beispiel.** Wir betrachten  $\vec{f}(x, y) = (y, 0)^T$  und die Kurve  $\vec{c}(t) = (r \cos(t), 1 + r \sin(t))^T$  mit  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Es ist  $\vec{c}'(t) = (-r \sin(t), r \cos(t))^T$  und also

$$\begin{aligned} \oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \langle \vec{f}(\vec{c}(t)), \vec{c}'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 1 + r \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r \sin(t) \\ r \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-r \sin(t) - r^2 \sin(t)^2) dt \\ &= \left[ r \cos(t) - \frac{r^2}{2} (t - \sin(t) \cos(t)) \right]_{t=0}^{2\pi} = -\pi r^2. \end{aligned}$$



## 16 Potentialtheorie

**Definition 16.1** (Wirbelfreiheit, Wegunabhängigkeit). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen. Ein stetiges Vektorfeld  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt *wirbelfrei*, wenn jedes geschlossene Kurvenintegral 2. Art über  $\vec{f}$  Null ist, d.h., wenn für jede geschlossene stückweise  $C^1$ -Kurve  $\vec{c}$  gilt  $\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = 0$ .

Wir sagen, dass ein Kurvenintegral 2. Art *wegunabhängig* ist, wenn für je zwei stückweise  $C^1$ -Kurven  $\vec{c}_1, \vec{c}_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit gleichen Anfangs- und Endpunkten (d.h. mit  $\vec{c}_1(a) = \vec{c}_2(a)$  und  $\vec{c}_1(b) = \vec{c}_2(b)$ ) gilt

$$\int_{\vec{c}_1} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{c}_2} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}.$$

Es gilt:

$\vec{f}$  wirbelfrei  $\iff$  Alle Integrale  $\int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x}$  sind wegunabhängig.

Dies sieht man wie folgt ein: Ist  $f$  wirbelfrei und sind  $\vec{c}_1$  und  $\vec{c}_2$  zwei Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt, so ist der Weg  $\vec{c}$ , welcher erst  $\vec{c}_1$  vorwärts und dann  $\vec{c}_2$  rückwärts durchläuft ein geschlossener Weg. Daher gilt

$$0 = \oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{c}_1} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} - \int_{\vec{c}_2} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}.$$

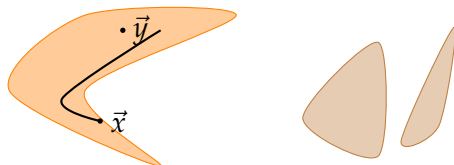
Umgekehrt hat ein geschlossener Weg die gleichen Anfangs- und Endpunkte wie ein Weg, der sich gar nicht bewegt und hat daher das Integral 0.

Untersuchen wir nun, welche Vektorfelder wegunabhängige Integrale haben.

**Definition 16.2** (Zusammenhängende Mengen). Eine Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *zusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten  $\vec{x}, \vec{y} \in D$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow D$  gibt, mit  $\vec{c}(a) = \vec{x}$  und  $\vec{c}(b) = \vec{y}$ .

Eine offene und zusammenhängende Menge nennt man *Gebiet*.

Die orangene Menge auf der linken Seite ist zusammenhängend, die braune Menge auf der rechten Seite nicht



**Definition 16.3** (Gradientenfeld, Potential). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Wir sagen, dass  $\vec{f}$  ein *Gradientenfeld* ist, wenn es ein  $C^1$ -Skalarfeld  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, so dass  $\vec{f}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x})$  gilt. In diesem Fall nennen wir  $\varphi$  ein *Potential* von  $\vec{f}$ .

Potentiale sind nur bis auf additive Konstanten bestimmt.

**Satz 16.4** (Hauptsatz für Kurvenintegrale). Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $\vec{f}$  ein stetiges Vektorfeld auf  $D$ .

(a) Hat  $\vec{f}$  ein Potential  $\varphi$ , so gilt für alle stückweise  $C^1$ -Kurven  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow D$

$$\int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \varphi(\vec{c}(b)) - \varphi(\vec{c}(a))$$

und insbesondere sind die Kurvenintegrale wegunabhängig.

(b) Ist  $\vec{f}$  wirbelfrei, so existiert ein Potential  $\varphi$  von  $\vec{f}$ . Man bekommt ein solches Potential indem man  $\vec{x}_0 \in D$  wählt und definiert

$$\varphi(\vec{x}) = \int_{\vec{c}_{\vec{x}_0, \vec{x}}} \vec{f}(\vec{y}) d\vec{y}$$

wobei  $\vec{c}_{\vec{x}_0, \vec{x}}$  eine stückweise  $C^1$ -Kurve ist, welche  $\vec{x}_0$  und  $\vec{x}$  verbindet.

*Beweis.*

Zu (a): Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_{\vec{c}} \nabla \varphi(\vec{x}) d\vec{x} \\ &= \int_a^b \nabla \varphi(\vec{c}(t)) \vec{c}'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} (\varphi(\vec{c}(t))) dt = \varphi(\vec{c}(b)) - \varphi(\vec{c}(a)). \end{aligned}$$

Zu (b): Ist  $\vec{f}$  wirbelfrei, so sind Integrale wegunabhängig (und daher ist die Definition von  $\varphi$  überhaupt sinnvoll. Um den Gradienten von diesem  $\varphi$  zu berechnen, definieren wir die gerade Verbindungsstrecke von  $\vec{x}$  und  $\vec{x} + t\vec{h}$  durch  $\vec{c}(\tau) = \vec{x} + \tau\vec{h}$  mit  $\tau \in [0, t]$  mit  $\vec{c}'(\tau) = \vec{h}$ . Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} (\varphi(\vec{x} + \vec{h}) - \varphi(\vec{x})) &= \frac{1}{t} \int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{y}) d\vec{y} \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \langle \vec{f}(\vec{c}(\tau)), \vec{c}'(\tau) \rangle d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t \langle \vec{f}(\vec{x} + \tau\vec{h}), \vec{h} \rangle d\tau \\ &= \langle \frac{1}{t} \int_0^t \vec{f}(\vec{x} + \tau\vec{h}) d\tau, \vec{h} \rangle \rightarrow \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{h} \rangle \quad \text{für } t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

und daraus folgt  $\vec{f}(\vec{x}) = \nabla \varphi(\vec{x})$ . □

Wir wissen schon, dass für jedes Skalarfeld  $\varphi$  (in 2 und 3 Dimensionen) immer  $\text{rot}(\nabla \varphi) \equiv \vec{0}$  (bzw. 0) gilt. Wir folgern:

$$\begin{aligned} \vec{f} \text{ hat ein Potential} &\implies \vec{f} = \nabla \varphi \text{ für ein } \varphi \\ &\implies \text{rot } \vec{f} = \text{rot}(\nabla \varphi) \equiv \vec{0} \text{ bzw. } 0. \end{aligned}$$

Die Wirbelfreiheit  $\text{rot } \vec{f} \equiv \vec{0}$  ist also eine notwendige „Integrabilitätsbedingung“ für die Existenz eines Potentials.

*Beispiel.* Wir versuchen herauszufinden, ob

$$\vec{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy + z^3 \\ x^2 + 3z \\ 3xz^2 + 3y \end{pmatrix}$$

ein Potential hat. Untersuchen wir zuerst die notwendige Bedingung  $\text{rot } \vec{f} \equiv \vec{0}$ . Es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \\ \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} 3 - 3 \\ 3z^2 - 3z^2 \\ 2x - 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Es steht der Existenz eines Potentials, also einer Funktion  $\varphi$  mit  $f = \nabla \varphi$ , nichts entgegen. Dieses  $\varphi$  muss erfüllen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = f_3.$$

Die erste Gleichung ist  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy + z^3$ . Integrieren wir dies bezüglich der Variable  $x$ , so bekommen wir

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + xz^3 + c(y, z). \quad (*)$$

Beachte, dass die Integrationskonstante hier immer noch von  $y$  und  $z$  abhängen darf.

Die zweite Gleichung ist  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = x^2 + 3z$ . Unsere Erkenntnis von oben aus (\*) gibt uns den Vergleich

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = x^2 + 0 + \frac{\partial c}{\partial y}(y, z) \stackrel{!}{=} x^2 + 3z.$$

Dies gibt uns  $\frac{\partial c}{\partial y}(y, z) = 3z$ . Integrieren wir dies nach  $y$ , so bekommen wir

$$c(y, z) = 3yz + d(z)$$

mit einer Integrationskonstanten, welche immer noch von  $z$  abhängt. Wir wissen also jetzt

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + xz^3 + 3yz + d(z) \quad (**)$$

Schauen wir in die dritte Zeile und bekommen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z) = 3xz^2 + 3y + d'(z) \stackrel{!}{=} 3xz^2 + 3y.$$

Wir schließen, dass  $d(z) \equiv \text{const.}$  geht und daher ist

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y + xz^3 + 3yz + c$$

für jedes  $c$  ein Potential für  $\vec{f}$  ist.

Was im allgemeinen nicht gilt ist die Implikation  $\text{rot } \vec{f} = \vec{0} \implies \vec{f}$  ist wirbelfrei. Ein Gegenbeispiel gibt  $\vec{f}(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}(-y, x)^T$ . Hier gilt  $\text{rot } \vec{f} = 0 - 0 = 0$ . Für den geschlossenen Weg  $\vec{c}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ) gilt aber  $\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 2\pi \neq 0$ . Das Problem hier ist, dass der Definitionsbereich von  $\vec{f}$  ein „Loch“ hat (er ist nämlich  $\mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ ) und der Weg läuft einmal um dieses Loch herum.

Da dieses  $\vec{f}$  ein Potential hat, sind Kurvenintegrale sehr einfach bestimmen. Ist  $\vec{f}$  z.B. das elektrische Feld und  $\varphi$  das zugehörige Potential, so ist die Spannung zwischen zwei Punkte

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral über eine beliebige Kurve  $\vec{c}$  von  $Q$  nach  $P$  und nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale gilt

$$\begin{aligned} \int_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} &= \varphi(Q) - \varphi(P) \\ &= 3^2 \cdot 5 + 3 \cdot (-2)^3 + 3 \cdot 5 \cdot (-2) - (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2^3 + 3 \cdot 1 \cdot 2) \\ &= 45 - 24 - 30 - 15 = -24. \end{aligned}$$

*Beispiel.* In 2D ist die Integrabilitätsbedingung  $\text{rot } \vec{f} \equiv 0$  sehr einfach einzusehen. Gibt es ein Potential  $\varphi$ , so gilt  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f_1$  und  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = f_2$ . Es gilt dann also nach dem Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit von zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0.$$

Betrachten wir für  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$  das Vektorfeld

$$\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Wir haben schon einmal berechnet, dass gilt  $\text{rot } \vec{f}(x, y) = 2$  und daher ist das Feld nicht wirbelfrei und es gibt auch kein Potential. Dies sieht man auch daran, dass Integrale im Allgemeinen nicht wegunabhängig sind. Dazu betrachten wir zwei Wege, die von  $(1, 0)^T$  nach  $(-1, 0)^T$  verlaufen, nämlich  $\vec{c}_1, \vec{c}_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,

$$\vec{c}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\vec{c}'_1(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c}'_2(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned}
 \int_{\vec{c}_1} \vec{f}(x, y) d(x, y) &= \int_0^\pi \langle \vec{f}(\vec{c}_1(t)), \vec{c}_1'(t) \rangle dt \\
 &= \int_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^\pi \sin(t)^2 + \cos(t)^2 dt = \pi \\
 \int_{\vec{c}_2} \vec{f}(x, y) d(x, y) &= \int_0^\pi \langle \vec{f}(\vec{c}_2(t)), \vec{c}_2'(t) \rangle dt \\
 &= \int_0^\pi \left\langle \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
 &= \int_0^\pi -\sin(t)^2 - \cos(t)^2 dt = -\pi.
 \end{aligned}$$

Ebenso hätten wir auch den geschlossenen Weg  $\vec{c} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{c}(t) = (\cos(t), \sin(t))^T$  betrachten können, der einmal links entlang des Einheitskreises um den Ursprung herumläuft und könnten ausrechnen, dass

$$\oint_{\vec{c}} \vec{f}(x, y) d(x, y) = 2\pi$$

gilt.

## 17 Bereichsintegrale

Jetzt betrachten wir Integrale von Skalarfeldern  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  über Teilmengen  $D \subset \mathbb{R}^n$ , d.h. wir wollen Integrale  $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}$  erklären. Während für  $D \subset \mathbb{R}$  das Integral  $\int_D f(x) dx$  die (signierte) Fläche unter dem Graphen ist, sollte für  $D \subset \mathbb{R}^2$  sich ein *Volumen* für ein Integral der Form  $\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}$  ergeben. Man kann das entsprechende  $n+1$ -dimensionale Volumen genau so wie im eindimensionalen Fall per Unter- und Obersummen von Riemannsummen bezüglich Rechtecken (und nicht Intervallen) definieren.

Wir schreiben für das Integral von  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  über  $D \subset \mathbb{R}^n$  als

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Das  $n$ -dimensionale Volumen eines  $D \subset \mathbb{R}^n$  wird mit  $\text{vol}(D)$  bezeichnet und wird als Integral der konstanten Funktion  $f \equiv 1$  über  $D$  definiert:

$$\text{vol}(D) = \int_D 1 d\vec{x}.$$

Im Allgemeinen gilt immer folgende Abschätzung:

$$\left| \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} \right| \leq \sup_{x \in D} \{|f(\vec{x})|\} \text{vol}(D).$$

Eine grundlegende Technik zur Berechnung von mehrdimensionalen Integralen über Rechtecke gibt der folgende Satz:

**Satz 17.1** (Satz von Fubini). *Es sei  $D = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$  ein Rechteck  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  integrierbar. Existieren die beiden Integrale*

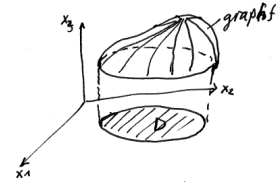
$$F(x) := \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy, \quad G(y) := \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx,$$

dann gilt

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx dy.$$

**Beispiel.** Es sei  $D := [0, 1] \times [0, 2]$ ,  $f(x, y) := 2 - xy$ . Dann ist

$$\begin{aligned} \int_D f(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_0^1 \int_0^2 (2 - xy) dy dx = \int_0^1 \left[ 2y - \frac{1}{2}xy^2 \right]_{y=0}^2 dx \\ &= \int_0^1 (4 - 2x) dx = \left[ 4x - x^2 \right]_{x=0}^1 = 4 - 1 = 3. \end{aligned}$$



Anders herum ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} &= \int_0^2 \int_0^1 (2 - xy) dx dy = \int_0^2 [2x - \frac{1}{2}x^2 y]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^2 (2 - \frac{1}{2}y) dy = [2y - \frac{1}{4}y^2]_{y=0}^2 = 4 - 1 = 3.\end{aligned}$$

Analog kann man  $n$ -dimensionale Integrale über  $n$ -dimensionale Quader durch  $n$ -faches Ausrechnen eindimensionaler berechnen.

Oft will man über Gebiete integrieren, die keine Quader sind, sondern welche krummlinig berandet sind. Für bestimmte Gebiete lässt sich immer noch eine ähnliche Technik wie im Satz von Fubini anwenden.

**Definition 17.2.** (a)  $D \subset \mathbb{R}^2$  heißt *Normalbereich*, falls sich  $D$  in der Form

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$$

oder

$$D = \{(x, y) \mid \tilde{a} \leq y \leq \tilde{b}, \tilde{g}(y) \leq x \leq \tilde{h}(y)\}$$

mit stetigen Funktionen  $g, h, \tilde{g}, \tilde{h}$  darstellen lässt.

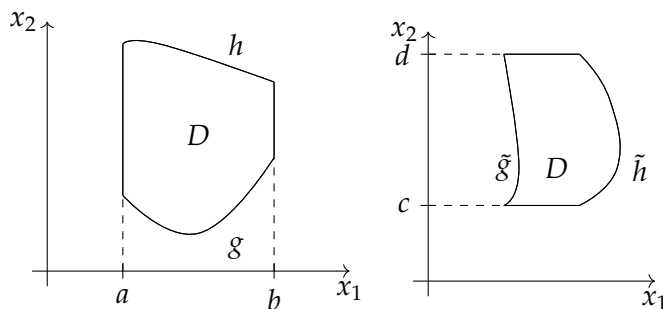
(b) Entsprechend ist  $D \subset \mathbb{R}^3$  ein *Normalbereich*, falls eine Darstellung der Form

$$D = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a \leq x_i \leq b, g(x_i) \leq x_j \leq h(x_i), u(x_i, x_j) \leq x_k \leq v(x_i, x_j)\},$$

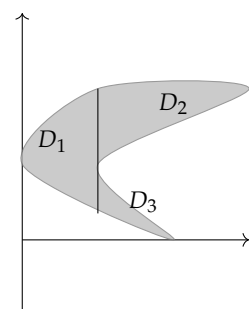
gilt, wobei  $(i, j, k)$  eine Permutation von  $(1, 2, 3)$  ist und  $g, h, u, v$  stetig sind.

(c)  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt *projizierbar* in Richtung  $x_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ ) falls es eine Menge  $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$  und stetige Funktionen  $u, v$  gibt, so dass

$$D = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{y} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)^T \in B, u(\vec{y}) \leq x_i \leq v(\vec{y})\}.$$



Mengen, die keine Normalbereiche sind, können oft in Normalbereiche zerlegt werden:



**Satz 17.3.** Ist  $f$  stetig auf dem Normalbereich

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\},$$

so gilt

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Für projizierbare Mengen in höheren Dimensionen gelten analoge Formeln:

$$\int_D f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_B \int_{u(\vec{y})}^{v(\vec{y})} f(\vec{x}) dx_i d\vec{y}.$$

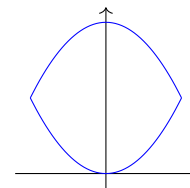
Wir bekommen damit die einfache Formel für den Flächeninhalt des Normalbereichs  $D$ :  $\text{vol}(D) = \int_a^b h(x) - g(x) dx$ .

**Beispiel.** Wir betrachten einen Normalbereich, der von zwei Parabeln begrenzt wird:

$$D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}.$$

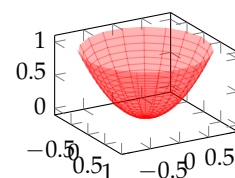
Wir integrieren die Funktion  $f(x, y) = x + 2y$ :

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) d\vec{x} &= \int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} (x + 2y) dy dx \\ &= \int_{-1}^1 [xy + y^2]_{y=x^2}^{y=2-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 (x(2-x^2) + (2-x^2)^2 - x^3 - x^4) dx \\ &= \int_{-1}^1 (-2x^3 - 4x^2 + 2x + 4) dx \\ &= \left[ -\frac{1}{2}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + x^2 + 4x \right]_{x=-1}^1 = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$



Wir berechnen das Volumen eines Rotationsparaboloids:  
**Beispiel.** Wir betrachten das Volumen

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$





Für das Volumen integrieren wir die 1 über  $V$ :

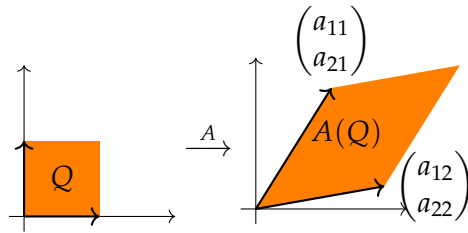
$$\begin{aligned}
 \text{vol}(V) &= \int_V 1 d\vec{x} \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{x^2+y^2}^1 1 dz dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ y - x^2 y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left[ (1 - x^2) y - \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left( (1 - x^2) \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{3} (1 - x^2)^{3/2} + (1 - x^2) \sqrt{1 - x^2} - \frac{1}{3} (1 - x^2)^{3/2} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \left( 2(1 - x^2)^{3/2} - \frac{2}{3} (1 - x^2)^{3/2} \right) dx \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{4}{3} (1 - x^2)^{3/2} dx \\
 &= \frac{1}{6} \left[ x \sqrt{1 - x^2} (5 - 2x^2) + 3 \arcsin(x) \right]_{x=-1}^1 = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

(wobei wir das letzte Integral mit WolframAlpha bestimmt haben).

Die Substitutionsregel für Bereichsintegrale heißt „Transformationssatz“: Dieser Satz beruht darauf, wie sich das Volumen des Einheitsquadrats unter einer linearen Abbildung verändert. Wir betrachten nur den zweidimensionalen Fall. Hier ist eine lineare Abbildung beschrieben durch eine Matrix deren Spalten zwei Vektoren im  $\mathbb{R}^2$  sind

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \\ \nearrow \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

Das Einheitsquadrat  $Q = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$  wird durch  $A$  auf das Parallelogramm abgebildet, welches durch die Spaltenvektoren von  $A$  aufgespannt wird:



Das Volumen dieses Parallelogramms ist genau die *Determinante* der Matrix  $A$ , nämlich

$$\text{vol}(A(Q)) = \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Die Determinante gibt also an, wie viel eine Fläche durch Abbildung mit  $A$  skaliert wird. Die Determinante gibt es auch für allgemeine  $n \times n$ -Matrizen und wird genauer in der Vorlesung über lineare Algebra behandelt. Wir formulieren die Transformationsformel in  $n$  Dimensionen.

**Satz 17.4.** Es sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  und  $\vec{\Phi} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine  $C^1$ -Abbildung und  $D \subset U$  kompakt, so dass  $\vec{\Phi}$  das Innere von  $D$  bijektiv auf das Bild  $\vec{\Phi}(D)$  abbildet. Dann gilt für jedes stetige  $f : \vec{\Phi}(D) \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\vec{\Phi}(D)} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_D f(\vec{\Phi}(\vec{u})) |\det D\vec{\Phi}(\vec{u})| d\vec{u}.$$

Wir illustrieren den Satz am Beispiel von zweidimensionalen Polarkoordinaten:

*Beispiel.* Wir betrachten folgenden Abbildung: Für  $\vec{u} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix}$  sei

$$\vec{x} = \Phi(\vec{u}) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung bildet das Rechteck  $D = [0, R] \times [0, 2\pi]$  bijektiv auf  $B_R(0)$  (den Kreis um den Ursprung mit Radius  $R$ ) ab. Die Jacobi-Matrix von  $\vec{\Phi}$  ist

$$D\vec{\Phi}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist

$$\det(D\vec{\Phi}(\vec{u})) = r \cos(\varphi)^2 + r \sin(\varphi)^2 = r.$$

Daher können wir Integrale über den Kreis  $B_R(0) = \vec{\Phi}(D)$  wie folgt ausrechnen:

$$\int_{B_R(0)} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_0^{2\pi} \int_0^R f(r \cos(\varphi), r \sin(\varphi)) \cdot r \cdot dr d\varphi.$$

## 18 Gekrümmte Flächen und deren Flächeninhalte

Kommen wir jetzt zu Integralen über gekrümmte Oberflächen. Dafür müssen wir (wie schon bei Kurven) zu erst klären, was wir unter einer (gekrümmten) Fläche verstehen.

**Definition 18.1.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet und  $\vec{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine  $C^1$ -Abbildung und wir schreiben für  $\vec{u} \in D$ :  $\vec{x} = \vec{p}(\vec{u}) \in \mathbb{R}^3$ .

Sind die Vektoren

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \text{ und } \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u})$$

Das sind die Spalten der Jacobi-Matrix von  $\vec{p}$ .

für jedes  $\vec{x}$  linear unabhängig (d.h. sie liegen nicht auf einer Linie), dann nennen wir die Menge

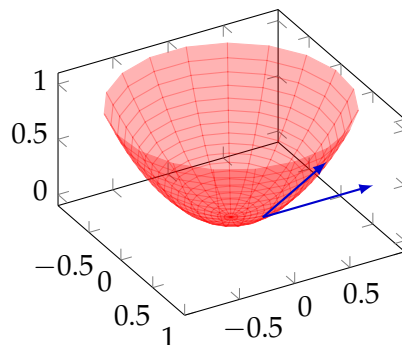
$$F := \{\vec{p}(\vec{u}) \mid \vec{u} \in D\}$$

eine *Fläche*. Die Abbildung  $\vec{p}$  ist eine *Parametrisierung* der Fläche  $F$ .

*Beispiel.* (a) Die Abbildung  $\vec{p} : [0, \infty[ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$\vec{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r^2 \end{pmatrix}$$

ist ein Rotationsparaboloid:



Die beiden Vektoren

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 2r \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

sind wie gefordert linear unabhängig (und sind Tangentialvektoren an die Parameterlinien).

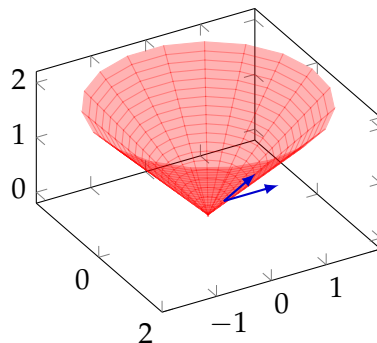
(b) Einen Kegel bekommen wir mit  $\vec{p} : [0, \infty[ \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{p}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix}.$$

Die Vektoren sind

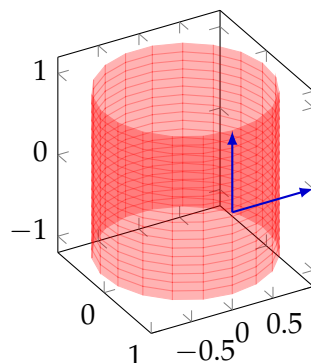
$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und die Fläche ist



- (c) Einen Zylinder mit Radius  $a > 0$  bekommen wir mit  $\vec{p} : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\vec{p}(h, \varphi) = \begin{pmatrix} a \cos(\varphi) \\ a \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}.$$



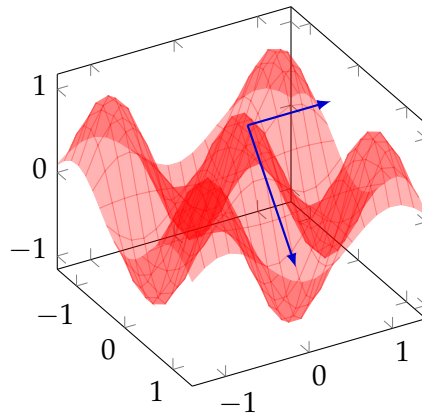
Die beiden Vektoren sind

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial h} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -a \sin(\varphi) \\ a \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (d) Jede skalare Funktion  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  für ein  $D \subset \mathbb{R}^2$  gibt über

$$\vec{p}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \varphi(\vec{u}) \end{pmatrix}$$

eine parametrisierte Fläche, nämlich den Graphen von  $\varphi$ . Hier für die Funktion  $\varphi(u_1, u_2) = \cos(\pi u_1) \cos(\pi u_2)$ :



Die beiden Vektoren sind

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \end{pmatrix}.$$

**Definition 18.2.** Die Ebene, die im Punkt  $\vec{x}_0 = \vec{p}(\vec{u}_0)$  von den Vektoren  $\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}_0)$  und  $\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}_0)$  aufgespannt wird ist

$$T_{\vec{x}_0}F = \{ \vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}_0) + \mu \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}_0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

heißt *Tangentialebene* an die Fläche  $F = \vec{p}(D)$  im Punkt  $\vec{x}_0$ .

Für das Integral über eine Oberfläche ist es wichtig, zu wissen, wie viel ein Flächenstück in  $D$  durch die Abbildung  $\vec{p}$  verzerrt wird. Betrachten wir also ein kleines Rechteck in  $D$ , nämlich

$$R = [u_1^0, u_1^0 + \Delta u_1^0] \times [u_2^0, u_2^0 + \Delta u_2^0].$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \vec{p}(\vec{u}^0 + \begin{pmatrix} \Delta u_1^0 \\ 0 \end{pmatrix}) &= \vec{p}(\vec{u}^0) + \Delta u_1^0 \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}_0) + \dots \\ \vec{p}(\vec{u}^0 + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta u_2^0 \end{pmatrix}) &= \vec{p}(\vec{u}^0) + \Delta u_2^0 \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}_0) + \dots \end{aligned}$$

Das heißt, die Fläche von  $A = \vec{p}(R)$  ist ungefähr die Fläche, des Parallelograms, welches von den Vektoren  $\Delta u_1^0 \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}_0)$  und  $\Delta u_2^0 \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}_0)$  aufgespannt wird.

**Lemma 18.3.** Es seien  $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ . Dann ist die Fläche des Parallelograms  $P$  welches durch  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannt wird (also das mit den Ecken  $\vec{0}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}$ ) gegeben durch

$$\text{Fläche von } P = \|\vec{a} \times \vec{b}\|_2$$

wobei

$$\vec{a} \times \vec{b} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

das Kreuzprodukt von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

Der Vektor  $\vec{a} \times \vec{b}$  steht übrigens auch senkrecht auf  $\vec{a}$  und auf  $\vec{b}$ .

Mit diesem Lemma bekommen wir:

$$\text{Fläche von } A \approx \Delta u_1^0 \Delta u_2^0 \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}_0) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}_0) \right\|_2.$$

Anders ausgedrückt: Die Skalierung von Flächeninhalten durch die Abbildung  $\vec{p}$  entspricht genau dem Faktor  $\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}_0) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}_0) \right\|_2$ .

Wir definieren also:

**Definition 18.4.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parameterdarstellung einer Fläche  $F$  und  $K \subset D$  kompakt. Dann ist der *Flächeninhalt* von  $\vec{p}(K)$  gegeben durch

$$\int_{\vec{p}(K)} d\sigma = \int_K \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}) \right\|_2 d\vec{u}.$$

*Beispiel.* (a) Wir berechnen die Fläche des Zylindermantels mit Hilfe der obigen Definition: Es

$$\vec{p}(\varphi, h) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

und wir brauchen den Definitionsbereich  $K = [0, 2\pi] \times [0, H]$  für einen Zylinder der Höhe  $H$ . Die beiden Ableitungen von  $\vec{p}$  haben wir schon berechnet und es ist

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial h} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial h} \right\|_2 = \sqrt{r^2 \cos^2(\varphi) + r^2 \sin^2(\varphi)} = r.$$

Also ist die Oberfläche

$$\int_{\text{Zylinder}} d\sigma = \int_K r d\varphi dh = \int_0^{2\pi} \int_0^H r dh d\varphi = 2\pi r H.$$

(b) Für die Fläche, die durch den Graph einer Funktion  $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, ist  $\vec{p}(x, y) = (x, y, \varphi(x, y))^T$  und daher

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial y} \right\|_2 = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2}.$$

Daher ist die Oberfläche von  $\vec{p}(K)$

$$\int_{\vec{p}(K)} d\sigma = \int_K \sqrt{1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

## 19 Oberflächenintegrale 1. und 2. Art

Wie für Kurven, gibt es auch für Flächen in 3D zwei Arten von Integralen: Bei Integralen erster Art wird ein Skalarfeld über die Fläche integriert, bei Integralen zweiter Art wird ein Vektorfeld integriert.

**Definition 19.1.** Es sei  $\vec{x} = \vec{p}(\vec{u})$  eine  $C^1$ -Parametrisierung einer Fläche  $F = \vec{p}(K)$  ( $K \subset D \subset \mathbb{R}^2$  kompakt,  $D$  Gebiet).

(a) Ist  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, so heißt

$$\int_F f(\vec{x}) d\sigma := \int_K f(\vec{p}(\vec{u})) \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}) \right\|_2 d\vec{u}$$

das *Oberflächenintegral erster Art*.

(b) Ist  $\vec{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetiges Vektorfeld, so heißt

$$\int_F \vec{f}(\vec{x}) d\vec{\sigma} := \int_K \langle \vec{f}(\vec{p}(\vec{u})), \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}) \rangle d\vec{u}$$

das *Oberflächenintegral zweiter Art*.

Dazu ein paar Bemerkungen:

1. Der Vektor

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u})$$

steht senkrecht auf der Oberfläche und kodiert gleichzeitig die lokale Flächenverzerrung über seine Länge. Der sogenannte *Normaleneinheitsvektor* ist

$$\vec{n}(\vec{x}) = \vec{n}(\vec{p}(\vec{u})) := \frac{\frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u})}{\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}) \right\|_2}.$$

Er ist nur bis auf das Vorzeichen bestimmt. (Vertauscht man z.B.  $u_1$  und  $u_2$  so bekommt man den Vektor  $-\vec{n}(\vec{x})$ .)

2. Mit Hilfe der Normaleneinheitsvektors ergibt sich

$$\int_F \vec{f}(\vec{x}) d\vec{\sigma} := \int_F \langle \vec{f}(\vec{x}), \vec{n}(\vec{x}) \rangle d\sigma.$$

(Man merkt sich dafür „ $d\sigma = \left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_1}(\vec{u}) \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial u_2}(\vec{u}) \right\|_2 d\vec{u}$ “.

3. Ist die Fläche *geschlossen* (d.h., grob gesagt, dass es keinen Rand gibt, wie z.B. bei der Kugeloberfläche) so schreibt man

$$\oint_F f(\vec{x}) d\sigma, \quad \text{bzw.} \quad \oint_F \vec{f}(\vec{x}) d\vec{\sigma}.$$

Bei Oberflächenintegralen zweiter Art über geschlossenen Flächen ist es Konvention, dass immer der *äußere* Normalenvektor genommen wird.

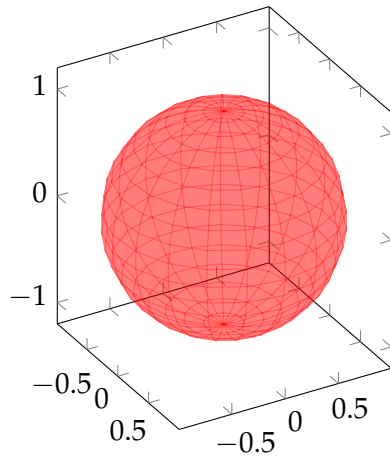


4. Die Integrale erster und zweiter Art haben einfache Interpretationen:

- (a) Ist  $s(\vec{x})$  die Dichte einer Fläche, so ist  $\int_F s(\vec{x}) d\sigma$  die *Gesamtmasse* der Fläche.
- (b) Ist  $\vec{f}(\vec{x})$  eine Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, so ist  $\int_F \vec{f}(\vec{x}) d\vec{\sigma}$  der *Gesamtfluss* von  $\vec{f}$  durch  $F$ .

*Beispiel.* Wir betrachten die Kugeloberfläche, d.h. den Rand der Einheitskugel  $K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\|_2 \leq 1\}$ . Die Oberfläche ist  $\partial K = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\|_2 = 1\}$ . Wir parametrisieren die Kugeloberfläche durch

$$(\varphi, \theta) \mapsto \vec{p}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$



Als Tangentialvektoren bekommen wir

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} -\cos(\varphi) \sin(\theta) \\ -\sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta)^2 - 0 \\ 0 + \sin(\varphi) \cos(\theta)^2 \\ \sin(\varphi)^2 \sin(\theta) \cos(\theta) + \cos(\varphi)^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta)^2 - 0 \\ 0 + \sin(\varphi) \cos(\theta)^2 \\ \sin(\theta) \cos(\theta) \end{pmatrix} = \cos(\theta) \vec{p}(\varphi, \theta) \end{aligned}$$

und

$$\left\| \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} \right\|_2 = |\cos(\theta)| \|\vec{p}(\varphi, \theta)\| = \cos(\theta).$$

Der Betrag fällt weg, das  $\cos(\theta) \geq 0$  für  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Damit können wir jetzt einfach die Kugeloberfläche berechnen, indem wir die 1 über  $\partial K$  integrieren:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial K} 1 d\sigma &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 1 \cos(\theta) d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\varphi) d\varphi \\ &= 2\pi(1 - (-1)) = 4\pi.\end{aligned}$$

Der Fluss des konstanten Vektorfeldes  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{e}_1$  ist

$$\begin{aligned}\oint_{\partial K} \vec{e}_1 d\vec{\sigma} &= \oint_{\partial K} \langle \vec{e}_1, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \langle \vec{e}_1, \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} \rangle d\varphi d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\varphi) \cos(\theta)^2 d\varphi d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} \cos(\varphi)^2 d\varphi = 0,\end{aligned}$$

da das erste Integral verschwindet.

Schließlich berechnen wir den Fluss des Vektorfeldes  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$  durch die Oberfläche der Einheitskugel. Für das Oberflächenintegral bekommen wir

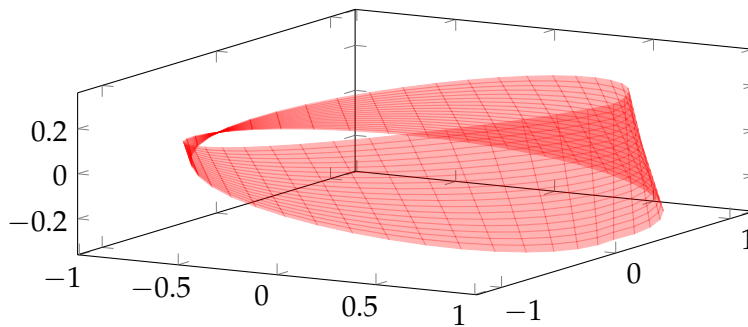
$$\begin{aligned}\oint_{\partial K} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{\sigma} &= \oint_{\partial K} \langle \vec{x}, \vec{n} \rangle d\sigma \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \langle \vec{x}(\vec{p}(\varphi, \theta)), \frac{\partial \vec{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial \theta} \rangle d\varphi d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \langle \vec{p}(\varphi, \theta), \cos(\theta) \vec{p}(\varphi, \theta) \rangle d\varphi d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \underbrace{\|\vec{p}(\varphi, \theta)\|_2}_{=1} d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \\ &= 2\pi \sin(\theta) \Big|_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} = 2\pi(1 + 1) = 4\pi.\end{aligned}$$

Um Oberflächenintegrale zweiter Art zu definieren benötigt man einen eindeutig bestimmten Einheitsnormalenvektor. Bisher

haben wir diesen über die Parametrisierung  $\vec{p}$  definiert, und dabei auch festgelegt, welche Durchflussrichtung durch die Fläche wir betrachten. (Bei der Kugel war es der Einheitsnormalenvektor, der nach außen zeigt, d.h. das Integral gab den Gesamtfluss von innen nach außen an.) Anders ausgedrückt: Die Wahl eines der beiden Einheitsnormalenvektors haben wir eine der beiden Seiten der Fläche ausgezeichnet, also eine als Vorder- und die andere als Rückseite festgelegt. Man nennt dies „die Orientierung der Fläche festlegen“. Nicht alle Flächen erlauben eine solche Orientierung!

*Beispiel.* Eine Fläche, die sich nicht global orientieren lässt, ist das *Möbiusband*. Dies ist gegeben durch die Parametrisierung  $\vec{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D = [0, 2\pi] \times [-b, b]$

$$p(\varphi, r) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin(\varphi/2) \\ -\sin(\varphi/2) \\ +\cos(\varphi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - r \sin(\varphi/2)) \cos(\varphi) \\ (1 - r \sin(\varphi/2)) \sin(\varphi) \\ r \cos(\varphi/2) \end{pmatrix}.$$



Diese Fläche hat die Eigenschaft, dass sich durch die Wahl eines Einheitsnormalenvektors keine eindeutige Seite festlegen lässt.

Man kann sich dieses Möbiusband selbst herstellen, indem man einen Papierstreifen an den Enden zusammenklebt, nachdem man sie halb gegeneinander verdreht hat. Das Ergebnis ist eine Fläche, welche nur eine Seite und einen Rand hat.

## 20 Die Sätze von Green, Gauß und Stokes

Fangen wir nun mit den drei wichtigen Integralsätzen an. Zuerst der Satz von Green, der das Kurvenintegral zweiter Art über den Rand eines Gebietes in zwei Dimensionen mit einem Bereichsintegral über das ganze Gebiet in Beziehung setzt.

**Satz 20.1** (Integralsatz von Green). Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet,  $K \subset D$  kompakt und in beide Richtungen projizierbar. Weiterhin sei  $\vec{f}_D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein  $C^1$ -Vektorfeld und der Rand  $\partial K$  von  $K$  sei parametrisiert durch eine stückweise  $C^1$ -Kurve  $\vec{c}: [a, b] \rightarrow D$ , so dass  $K$  links der Kurve (in Bezug auf die Durchlaufrichtung) liegt. Dann gilt

$$\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_K \nabla \times \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Ein paar Bemerkungen zum Satz:

1. Der Satz von Green gilt auch für allgemeinere Bereiche, nämlich solche, die sich in endliche viele Bereiche zerlegen lassen, die sich jeweils in beide Richtungen projizieren lassen.
2. Mit Hilfe des Tangenteneinheitsvektor  $\vec{T}(t) := \frac{\vec{c}'(t)}{\|\vec{c}'(t)\|_2}$  gilt nach Randbemerkung in Abschnitt 15

$$\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \oint_{\vec{c}} \langle \vec{f}, \vec{T} \rangle ds.$$

Damit ist der Satz von Green

$$\int_K \nabla \times \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \oint_{\partial K} \langle \vec{f}, \vec{T} \rangle ds.$$

3. Wir können der Satz noch weiter umformulieren, nämlich mit dem Einheitsnormalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \vec{T} = \begin{pmatrix} T_2 \\ -T_1 \end{pmatrix}$$

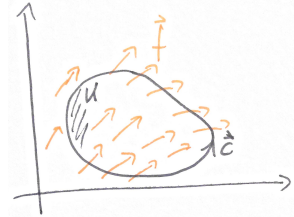
der entsteht, wenn den Tangenteneinheitsvektor um  $90^\circ$  nach rechts drehen. Damit ist

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K} \langle \vec{f}, \vec{n} \rangle ds &= \oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} T_2 \\ -T_1 \end{pmatrix} \right\rangle ds = \oint_{\partial K} f_1 T_2 - f_2 T_1 ds \\ &= \oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \vec{T} \right\rangle ds. \end{aligned}$$

In dieser Vorlesung benutzen wir die Schreibweisen

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{f} &= \nabla \times \vec{f} \\ \operatorname{div} \vec{f} &= \nabla \cdot \vec{f}. \end{aligned}$$

Die Situation ist also wie folgt:



Man wende dazu den Satz auf die Teilgebiete an und bemerke, dass sich die Integrale über die doppelten Randstücke gegenseitig aufheben, da sie entgegengesetzt durchlaufen werden:



Mit der vorherigen Bemerkung bekommen wir jetzt

$$\begin{aligned}\oint_{\partial K} \langle \vec{f}, \vec{n} \rangle ds &= \oint_{\partial K} \left\langle \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}, \vec{T} \right\rangle ds = \int_K \nabla \times \begin{pmatrix} -f_2 \\ f_1 \end{pmatrix} d\vec{x} \\ &= \int_K \frac{\partial f_1}{\partial x_1} - \left(-\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\right) d\vec{x} = \int_K \nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x}.\end{aligned}$$

Diese letzte Gleichung

$$\oint_{\partial K} \langle \vec{f}, \vec{n} \rangle ds = \int_K \nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x}$$

ist der *Integralsatz von Gauß (Divergenzsatz)* in zwei Dimensionen.

Hier ist eine bemerkenswerte Folgerung aus dem Satz von Green: Gilt  $\nabla \times \vec{f} = 0$  in ganz  $K$  und läuft der Weg  $\vec{c}$  ganz um  $K$  herum, so gilt  $\oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = 0$ .

Mit dem Satz von Green kann man Flächeninhalte berechnen, indem man nur den Rand von  $K$  betrachtet: Ist  $\vec{f}$  ein Vektorfeld mit  $\nabla \times \vec{f} \equiv 1$ , so ist

$$\text{vol}(K) = \int_K 1 d\vec{x} = \int_K \nabla \times \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}.$$

Nimmt man z.B.  $\vec{f}(x) = (0, x)^T$ , so gilt  $\nabla \times \vec{f}(x, y) = 1$  und es folgt

$$\text{vol}(K) = \oint_{\vec{c}} \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = \int_a^b c_1(t) c_2'(t) dt.$$

Der Integralsatz von Gauß gilt auch in drei Dimensionen.

**Satz 20.2** (Integralsatz von Gauß in  $n = 3$ ). *Es sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  kompakt und in alle drei Richtungen projizierbar. In jedem Punkt  $\vec{x}$  des Randes  $\partial G$  sei die äußere Einheitsnormale  $\vec{n}(\vec{x})$  erklärt. Dann gilt für jedes  $C^1$ -Vektorfeld  $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  (mit  $G \subset D$ )*

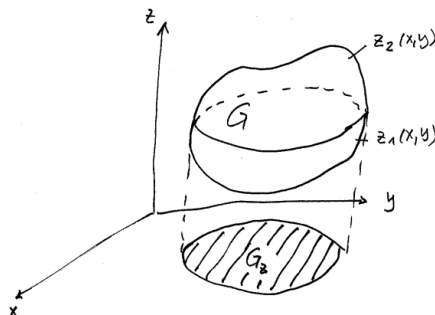
$$\int_G \nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \oint_{\partial G} \langle \vec{f}, \vec{n} \rangle d\vec{o} = \oint_{\partial G} \vec{f}(\vec{x}) d\vec{o}.$$

*Beweis.*

■ Wir betrachten die Situation wie in dieser Skizze

Der Divergenzsatz hat eine sehr anschauliche Interpretation: Das Randintegral auf der linken Seite ist der Fluss über den Rand von  $K$  und das Bereichsintegral auf der rechten Seite ist die Summe der Quellen und Senken in  $K$ .

Tatsächlich gilt der Integralsatz von Gauß auch in beliebiger Dimension, aber da wir keine Integrale über höherdimensionale Flächen eingeführt haben, formulieren wir ihn nur für  $n = 3$ .



das heißt, wir betrachten die Projektion von  $G$  in  $z$ -Richtung. Es gilt

$$\int_G \frac{\partial f_3}{\partial z} d\vec{x} = \int_{G_z} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial f_3}{\partial z} dz d(x,y) = \int_{G_z} [f_3(x,y,z_2(x,y)) - f_3(x,y,z_1(x,y))] d(x,y). \quad (*)$$

Die obere Schale ist parametrisiert durch

$$\vec{p}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_2(x,y) \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in G_z, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \vec{p}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Also sind der äußere Normalenvektor und die äußere Einheitsnormale

$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{p}}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial z_2}{\partial x} \\ -\frac{\partial z_2}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}(x,y,z_2(x,y)) = \frac{\begin{pmatrix} -\frac{\partial z_2}{\partial x} \\ -\frac{\partial z_2}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2}}.$$

Nach der Definition des Oberflächenintegrals erster Art ist

$$\begin{aligned} \int_{G_z} f_3(x,y,z_2(x,y)) d(x,y) &= \int_{\text{obere Schale}} \frac{f_3(x,y,z)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)^2}} d\vec{o} \\ &= \int_{\text{obere Schale}} f_3(\vec{x}) \langle \vec{e}_3, \vec{n} \rangle d\vec{o}. \end{aligned}$$

Für die untere Schale bekommt man analog

$$\int_{G_z} f_3(x,y,z_1(x,y)) d(x,y) = - \int_{\text{untere Schale}} f_3(\vec{x}) \langle \vec{e}_3, \vec{n} \rangle d\vec{o}.$$

Nach (\*) ist die Differenz der beiden Integrale genau

$$\int_G \frac{\partial f_3}{\partial z} d\vec{x} = \oint_{\partial G} f_3(\vec{x}) \langle \vec{e}_3, \vec{n} \rangle d\vec{o}.$$

Analog bekommt man eine entsprechende Gleichung für die anderen Richtungen, d.h. für  $i = 1, 2, 3$  gilt

$$\int_G \frac{\partial f_i}{\partial x_j} d\vec{x} = \oint_{\partial G} f_i(\vec{x}) \langle e_j, \vec{n} \rangle d\sigma.$$

Summieren wir diese drei Gleichungen auf, bekommen wir den Integralsatz von Gauß.  $\square$

*Beispiel.* Wir haben schon den Fluss von  $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{x}$  durch die Oberfläche der Einheitskugel  $K$  berechnet, nämlich

$$\oint_{\partial K} \vec{x} d\vec{\sigma} = 4\pi.$$

Nach dem Integralsatz von Gauß gilt

$$\oint_{\partial K} \vec{x} d\vec{\sigma} = \int_K \nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x}.$$

Rechnen wir einmal die rechte Seite aus: Dafür berechnen wir die Divergenz  $\nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$  und daher ist (da das Volumen der Einheitskugel in drei Dimensionen  $\frac{4}{3}\pi$  ist)

$$\int_K \nabla \cdot \vec{f}(\vec{x}) d\vec{x} = \int_K 3 d\vec{x} = 3 \text{vol}(K) = 4\pi.$$

Aus dem Integralsatz von Gauß folgen die Integralformeln von Green, welche die Richtungsableitung von einer Funktion  $f$  in Richtung der äußeren Einheitsnormalen  $\vec{n}$  benutzen, welche definiert ist als

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}} := \langle \nabla f, \vec{n} \rangle.$$

**Satz 20.3.** Es sei  $G \subset \mathbb{R}^3$  wie im Integralsatz von Gauß. Dann gelten für  $G \subset D$  und zwei  $C^2$ -Funktionen  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  die Formeln

$$\begin{aligned} \int_G (f \Delta g + \langle \nabla f, \nabla g \rangle) d\vec{x} &= \oint_{\partial G} f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} d\sigma \\ \int_G (f \Delta g - g \Delta f) d\vec{x} &= \oint_{\partial G} \left( f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}} - g \frac{\partial f}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Nun zum Satz von Stokes (ebenfalls nur in drei Raumdimensionen formuliert). Dieser setzt das Oberflächenintegral zweiter Art eines Vektorfeldes über eine gekrümmte Fläche mit dem Kurvenintegral zweiter Art über den Rand dieser Fläche in Beziehung.

**Satz 20.4.** Es sei  $\vec{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein  $C^1$ -Vektorfeld auf dem Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^3$ ,  $F$  eine Fläche in  $D$ , d.h. es ist  $F = \vec{p}(K)$ ,  $K \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\vec{p} : K \rightarrow D$ . Wir schreiben wie gewohnt  $\vec{x} = \vec{p}(\vec{u})$ . Der Rand  $\partial K$  von  $K$  sei durch eine

Erinnere:  $\Delta$  ist der Laplace-Operator  $\Delta g = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}$  und es gilt  $\Delta g = \nabla \cdot (\nabla g)$ .

Für den Beweis der ersten Formel nimmt man statt  $f$  einfach  $f \nabla g$  im Integralsatz von Gauß, und um die zweite Formel zu beweisen, vertauscht man in der ersten die Rollen von  $f$  und  $g$  und addiert die Ergebnisse.

stückweise  $C^1$ -Kurve  $\vec{c}$  parametrisiert, deren Bild  $\vec{c} := \vec{p}(\vec{c}(t))$  den Rand von  $\partial F$  der Fläche  $F$  parametrisiert. Dann gilt

$$\int_F \nabla \times \vec{f}(\vec{x}) d\sigma = \oint_{\partial F} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x}.$$

**Beispiel.** Wir betrachten das Vektorfeld  $\vec{f}(x, y, z) = (-y, x, -z)^T$ . Als Fläche betrachten wir die obere Hälfte der Einheitskugel, also die Halbkugel  $F$  dargestellt durch

$$\vec{x} = \vec{p}(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi/2.$$

Der Rand davon ist der Rand der Einheitskreisscheibe in der  $x$ - $y$ -Ebene, parametrisiert durch

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

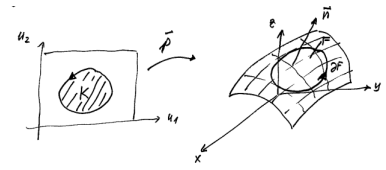
Wir berechnen

$$\begin{aligned} \oint_{\vec{c}} \vec{f}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} &= \oint_{\vec{c}} \langle \vec{f}(\vec{c}(t)), \vec{c}'(t) \rangle dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin(t)^2 + \cos(t)^2) dt = 2\pi. \end{aligned}$$

Die Rotation ist  $\nabla \times \vec{f} = (0, 0, 2)^T$  und damit bekommen wir (wie der Satz von Stokes vorhersagt)

$$\begin{aligned} \int_F \nabla \times \vec{f}(\vec{x}) d\sigma &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} \right\rangle \cos(\theta) d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi/2} 2 \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Die Situation ist also wie in dieser Skizze





## 21 Fourier-Reihen

Wir kennen schon einige Reihen, nämlich Reihen von Zahlen  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ , Potenzreihen  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$  und dabei speziell Taylor-Reihen  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$  welche glatte Funktionen lokal approximieren. Fourier-Reihen sind Reihen von trigonometrischen Funktionen, die periodische Funktionen global approximieren.

In diesem Abschnitt werden wir auch komplexe Zahlen als Werte unserer Funktionen zulassen (das wird die Sache tatsächlich vereinfachen). Ableitungen und Integrale von komplexwertigen Funktionen werden einfach separat für Real- und Imaginärteil erklärt.

**Definition 21.1.** Eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  heißt *periodisch mit Periode  $T$*  (oder  $T$ -periodisch), wenn für alle  $t \in \mathbb{R}$  gilt  $f(t + T) = f(t)$ .

Die Funktionen  $\sin(t)$ ,  $\cos(t)$ ,  $e^{it}$  und alle Linearkombinationen  $a_k \cos(t) + b_k \sin(t)$  sind  $2\pi$ -periodisch. Die Funktion  $U(t) = \cos(\omega t)$  hat die Periode  $T = 2\pi/\omega$  und also die Frequenz  $\nu = 1/T = \omega/(2\pi)$ .

Hier ein paar weitere Bemerkungen:

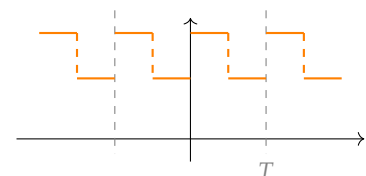
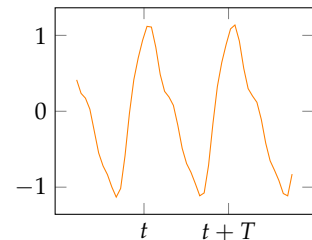
- (a) Ist  $f$  periodisch mit Periode  $T$ , so auch mit Periode  $kT$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Ist  $f$  periodisch mit Perioden  $T_1$  und  $T_2$ , so auch mit Periode  $T_1 + T_2$ .
- (b) Wenn es eine kleinste Periode  $T > 0$  gibt, so sind  $kT$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  alle Perioden.
- (c) Jede periodische und stetige Funktion die nicht konstant ist, hat eine kleinste Periode.
- (d) Sind  $f$  und  $g$   $T$ -periodisch, so ist auch  $\alpha f + \beta g$   $T$ -periodisch.
- (e) Ist  $f$   $T$ -periodisch, so ist  $\tilde{f}(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}t\right)$   $2\pi$ -periodisch.
- (f) Eine  $T$ -periodische Funktion ist durch ihre Werte auf einem beliebigen Intervall der Form  $[x_0, x_0 + T[$  vollständig festgelegt.
- (g) Ist  $f$   $T$ -periodisch und integrierbar, so ist für alle  $a$

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt.$$

**Definition 21.2.** Ist  $g : [0, T[ \rightarrow \mathbb{C}$  oder  $g : [0, T/2[ \rightarrow \mathbb{C}$ , so kann  $g$  auf verschiedenen Arten zu einer  $T$ -periodischen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  fortgesetzt werden:

- (a) **Direkte Fortsetzung** auf Definitionsgebiet  $[0, T[$ :

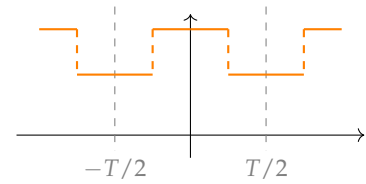
$$f(t) := g(t - kT), \text{ für } t \in [kT, (k+1)T[.$$



- (b) **Gerade Fortsetzung** auf Definitionsgebiet  $[0, T/2]$ : Zuerst definieren wir  $\tilde{g} : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & : 0 \leq t \leq T/2 \\ g(-t) & : -T/2 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

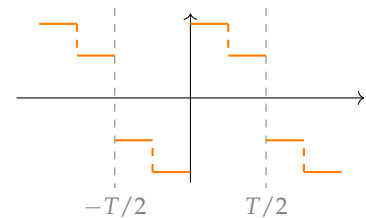
und dann setzen wir  $\tilde{g}$  durch direkte Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$  fort.



- (c) **Ungerade Fortsetzung** auf Definitionsgebiet  $]0, T/2[$ : Zuerst definieren wir  $\tilde{g} : [-T/2, T/2] \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$\tilde{g}(t) = \begin{cases} g(t) & : 0 < t < T/2 \\ -g(-t) & : -T/2 < t < 0 \\ 0 & : t = 0, -T/2 \end{cases}$$

und dann setzen wir  $\tilde{g}$  durch direkte Fortsetzung auf  $\mathbb{R}$  fort.



**Definition 21.3** (Fourier-Reihen). (a) Eine Reihe der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

mit  $a_k, b_k \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$  heißt *Fourier-Reihe* mit Periode  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ . Dabei ist  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  die *Kreisfrequenz*.

- (b) Die zugehörigen Partialsummen

$$f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)]$$

heißen *trigonometrische Polynome*.

Wir können Fourier-Reihen in komplexer Schreibweise einfacher darstellen: Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(k\omega t) &= \frac{1}{2} (e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}) \\ \sin(k\omega t) &= \frac{1}{2j} (e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\begin{aligned} f_n(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{a_k}{2} (e^{jk\omega t} + e^{-jk\omega t}) + \frac{b_k}{2j} (e^{jk\omega t} - e^{-jk\omega t}) \right] \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{a_k - jb_k}{2} e^{jk\omega t} + \frac{a_k + jb_k}{2} e^{-jk\omega t} \right] \\ &= \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk\omega t} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{a_0}{2}, & \gamma_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k), & \gamma_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \\ a_0 &= 2\gamma_0, & a_k &= \gamma_k + \gamma_{-k}, & b_k &= j(\gamma_k - \gamma_{-k})\end{aligned}$$

für  $k = 1, \dots, n$ . Die entsprechende Fourier-Reihe ist dann

$$\begin{aligned}f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega t) + b_k \sin(k\omega t)] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk\omega t}.\end{aligned}$$

**Beispiel** (Dirichlet-Kern). Wir betrachten das trigonometrische Polynom

$$f_n(t) = 1 + 2\cos(t) + 2\cos(2t) + \dots + 2\cos(nt),$$

also  $a_k = 2$ ,  $b_k = 0$  und  $\omega = 1$ . Die Koeffizienten der komplexen Form sind

$$\gamma_0 = \frac{1}{2}a_0 = 1, \quad \gamma_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = 1, \quad \gamma_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) = 1.$$

Also ist

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{jkt}.$$

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel kann man zeigen, dass gilt

$$f_n(t) = \begin{cases} 2n+1 & : t = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} & : \text{sonst.} \end{cases}$$

**Satz 21.4.** Es sei  $T > 0$ .

(a) Die Funktionen  $e_k(t) = e^{jk\omega t}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\omega = 2\pi/T$  bilden in folgendem Sinn ein Orthonormalsystem: Bezüglich des Skalarproduktes

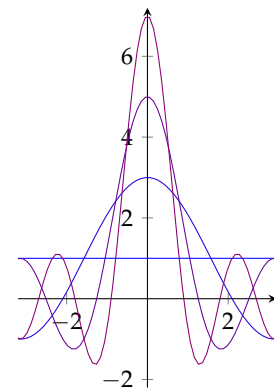
$$\langle u, v \rangle := \frac{1}{T} \int_0^T u^*(t)v(t)dt$$

gilt

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} := \begin{cases} 1 & : k = l \\ 0 & : k \neq l \end{cases}.$$

(b) Wenn die Fourier-Reihe  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk\omega t}$  gleichmäßig auf  $[0, T]$  gegen eine Funktion  $f$  konvergiert, so ist  $f$  stetig und es gilt

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jk\omega t} dt = \langle e_k, f \rangle.$$



Das Symbol  $\delta_{kl}$  wird Kronecker-Delta genannt.

Gleichmäßige Konvergenz gegen  $f$  bedeutet, dass es zu jedem  $\epsilon > 0$  eine  $N$  gibt, so dass für alle  $n, m > N$  und alle  $t$  gilt  $|\sum_{k=-m}^n \gamma_k e^{jk\omega t} - f(t)| < \epsilon$ .

**Beweis.**

Zu (a): Es gilt

$$\langle e_k, e_k \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jk\omega t} e^{jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dt = 1$$

und für  $k \neq l$  gilt

$$\begin{aligned} \langle e_k, e_l \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jk\omega t} e^{jl\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{j(l-k)\omega t} dt \\ &= \frac{1}{T} \left[ \frac{1}{j(l-k)\omega} e^{j(l-k)\omega t} \right]_{t=0}^T = \frac{1}{T} \frac{1}{j(l-k)\omega} \left[ e^{j(l-k)\omega T} - 1 \right] = 0 \end{aligned}$$

da  $\omega T = 2\pi$  gilt.

Zu (b): Wir nehmen an, dass  $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk\omega t}$  gilt. Jetzt berechnen wir das Skalarprodukt von  $f$  mit einem  $e_l$  und bemerken

$$\begin{aligned} \langle e_l, f \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{-jl\omega t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T e^{-jl\omega t} e^{jk\omega t} dt}_{\delta_{lk}} \\ &= \gamma_l. \end{aligned}$$

□

Für Fourier-Reihen in Sinus und Kosinus gelten

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(k\omega t) \cos(l\omega t) dt &= \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ \frac{T}{2} & : k = l \neq 0 \\ T & : k = l = 0 \end{cases} , \\ \int_0^T \sin(k\omega t) \sin(l\omega t) dt &= \begin{cases} 0 & : k \neq l \\ \frac{T}{2} & : k = l \neq 0 \end{cases} ' \\ \int_0^T \sin(k\omega t) \cos(l\omega t) dt &= 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten in der Fourier-Reihe sind

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt, \quad k \geq 0 \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega t) dt, \quad k \geq 0. \end{aligned}$$

## 22 Fourier-Reihen: Beispiele und Eigenschaften

Wir nennen eine Funktion  $f$  *gerade*, wenn  $f(t) = f(-t)$  gilt und *ungerade*, wenn  $f(t) = -f(-t)$  gilt. Es gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ gerade} &\implies \int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt \\ f \text{ ungerade} &\implies \int_{-a}^a f(t) dt = 0. \end{aligned}$$

Da  $\cos$  gerade ist und  $\sin$  ungerade ist bekommt man durch genaue Betrachtung der Symmetrien:

**Satz 22.1.** Es sei  $f$  eine stückweise stetige und  $T$ -periodische Funktion,  $T > 0$  und  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ gerade} &\implies a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt \\ &\quad b_k = 0 \\ f \text{ ungerade} &\implies a_k = 0 \\ &\quad b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(k\omega t) dt. \end{aligned}$$

*Beweis.*

Wir schauen uns nur den Fall einer geraden Funktion an: Es ist

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(k\omega t) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega t) dt$$

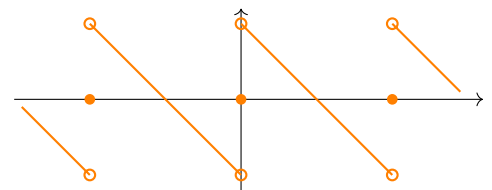
und da der Integrand gerade ist und das Integrationsintervall symmetrisch um 0 ist, folgt die Behauptung. Für  $b_k$  ist der Integrand  $f(t) \sin(k\omega t)$  und damit ungerade und folglich ist das Integral 0.  $\square$

*Beispiel.* (a) Die Sägezahn-Funktion mit Periode  $T = 2\pi$  (also  $\omega = 1$ ) ist

$$S(t) := \begin{cases} 0 & : t = 0, 2\pi \\ \frac{1}{2}(\pi - t) & : 0 < t < 2\pi \end{cases}$$

direkt fortgesetzt auf ganz  $\mathbb{R}$ . Da  $S$  ungerade ist, folgt

$$\begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\pi-t}{2} \sin(kt) dt = \frac{1}{k} \end{aligned}$$



(wie man mit partieller Integration nachrechnet). Daher hat die Sägezahn-Funktion die Fourier-Reihe

$$S(t) = \sin(t) + \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \dots$$

(b) Die Rechteckschwingung ist

$$R(t) = \begin{cases} 0 & : t = 0, \pi, 2\pi \\ 1 & : 0 < t < \pi \\ -1 & : \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

direkt fortgesetzt auf  $\mathbb{R}$ . Diese Funktion ist ebenfalls ungerade und wir bekommen

$$a_k = 0$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(kt) dt = \begin{cases} 0 & : k \text{ gerade} \\ \frac{4}{k\pi} & : k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daher gilt

$$R(t) = \frac{4}{\pi} \left( \frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$$

(c) Wir setzen eine Parabel periodisch fort:

$$f(t) = t^2, \quad -\pi < t < \pi.$$

Da  $f$  gerade ist, folgt

$$b_k = 0$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \cos(kt) dt = \begin{cases} \frac{2\pi^2}{3} & : k = 0 \\ (-1)^k \frac{4}{k^2} & : k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Also gilt

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{4 \cos(t)}{1} + \frac{4 \cos(2t)}{2^2} - \frac{4 \cos(3t)}{3^2} + \dots$$

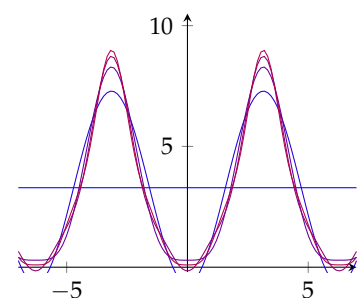
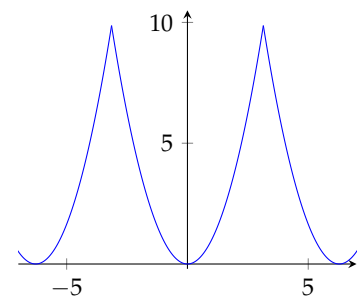
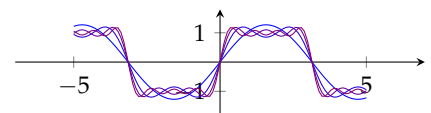
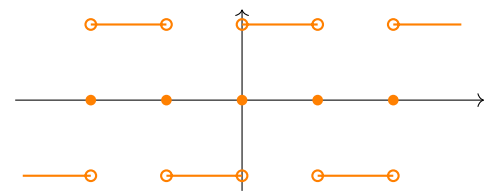
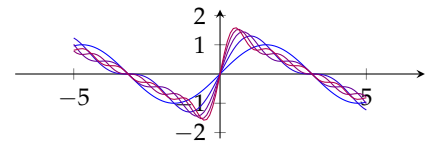
**Satz 22.2** (Rechenregeln für Fourier-Reihen). Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetige,  $T$ -periodische Funktionen mit

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk\omega t}, \quad g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k e^{jk\omega t}.$$

Dann gilt:

(a) Linearität:

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha \gamma_k + \beta \delta_k) e^{jk\omega t}.$$



(b) *Konjugation:*

$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k}^* e^{jk\omega t}.$$

(c) *Zeitumkehr:*

$$f(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{-k} e^{jk\omega t}.$$

(d) *Streckung:* Für  $c > 0$

$$f(ct) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk(c\omega)t}.$$

(e) *Verschiebung und Modulation:* Für  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$

$$f(t+a) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \gamma_k e^{jk\omega a} \right) e^{jk\omega t},$$

$$e^{jn\omega t} f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_{k-n} e^{jk\omega t}.$$

(f) *Ableitung:*

$$f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (jk\omega \gamma_k) e^{jk\omega t}.$$

**Satz 22.3** (Konvergenz von Fourier Reihen). Es sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  stückweise stetig differenzierbar und  $T$ -periodisch mit den Fourier-Koeffizienten  $\gamma_k$ . Dann gelten die folgenden Aussagen für die Funktion  $F_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk\omega t}$ :

(a) Die Reihe für  $F_f$  konvergiert für jedes  $t$  und es gilt

$$F_f(t) = \frac{1}{2} \left( \lim_{\tau \searrow t} f(\tau) + \lim_{\tau \nearrow t} f(\tau) \right).$$

(b) In allen kompakten Intervallen  $[a, b]$  in denen  $f$  stetig ist, ist die Konvergenz der Reihe gleichmäßig.

(c) In allen Unstetigkeitsstellen überschwingen die Partialsummen

$$S_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk\omega t}$$

um ca. 18% der Sprunghöhe.

Diese Eigenschaft wird Gibbs-Phänomen genannt.

Das Skalarprodukt aus Satz 21.4 induziert die sogenannte  $L^2$ -Norm

$$\|u\|_2 := \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T |u(t)|^2 dt},$$

welche auch „quadratisches Mittel“ genannt wird.

**Satz 22.4.** Es sei  $f$  stückweise stetig und  $T$ -periodisch mit Fourier-Koeffizienten  $\gamma_k$  (bzw. reellen Koeffizienten  $a_k, b_k$ ).

(a) Für die Partialsumme  $S_n(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k e^{jk\omega t}$  gilt

$$\|f - S_n\|_2 = \inf_{g \text{ trig. Poly. Grad} \leq n} \|f - g\|_2.$$

(b) Es gilt die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=-n}^n |\gamma_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^n \left( \frac{|a_k|^2}{2} + \frac{|b_k|^2}{2} \right) \leq \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

(c) Es gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{|a_k|^2}{2} + \frac{|b_k|^2}{2} \right) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt = \|f\|_2^2.$$

**Satz 22.5.** Haben zwei  $T$ -periodische, stückweise stetige Funktionen  $f$  und  $g$  dieselben Fourier-Koeffizienten, so stimmen sie in allen Punkten, in denen beide stetig sind überein.

Für zwei  $T$ -periodische Funktionen definieren wir:

**Definition 22.6.** Es seien  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $T$ -periodisch und stückweise stetig. Dann ist die (periodische) Faltung von  $f$  und  $g$  definiert durch

$$(f * g)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T f(s)g(t-s)ds.$$

Die Fourier-Koeffizienten einer Faltung sind besonders einfach auszurechnen:

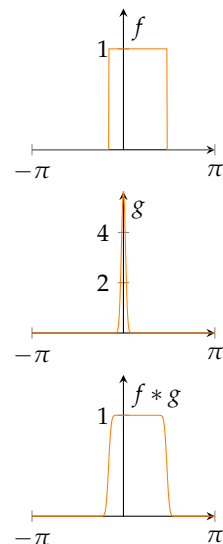
**Satz 22.7** (Faltungssatz für Fourier-Reihen). Es bezeichne hier  $\gamma_k(h)$  den  $k$ -ten Fourier-Koeffizient der Funktion  $h$ . Dann gilt für zwei stückweise stetige und  $T$ -periodische Funktionen  $f$  und  $g$

$$\gamma_k(f * g) = \gamma_k(f)\gamma_k(g).$$

*Beweis.*

Mit anderen Worten: Die abgebrochene Fourier-Reihe ist die (bzgl. der quadratischen Mittels) beste Approximation an eine Funktion mit trigonometrischen Polynomen.

Anders ausgedrückt: Das quadratische Mittel der (komplexen) Fourier-Koeffizienten ist gleich dem quadratischen Mittel der Funktion.





Mit dem Satz von Fubini bekommen wir

$$\begin{aligned}
 \gamma_k(f * g) &= \frac{1}{T} \int_0^T (f * g)(t) e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{T} \int_0^T f(s) g(t-s) ds e^{-jk\omega t} dt \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T f(s) e^{-jk\omega s} \underbrace{\int_0^T g(t-s) e^{-jk\omega(t-s)} dt}_{= \int_0^T g(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau} ds \\
 &= \frac{1}{T^2} \int_0^T f(s) e^{-jk\omega s} \left( \int_0^T g(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau \right) ds = \gamma_k(f) \gamma_k(g).
 \end{aligned}$$

□

*Beispiel.* Der Dirichlet-Kern ist  $f_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{jkt}$  und ist  $2\pi$ -periodisch.

Er hat die Fourier-Koeffizienten

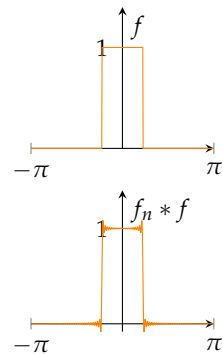
$$\gamma_k(f_n) = \begin{cases} 1 & : k = -n, \dots, n \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Also sind die Fourier-Koeffizienten von  $f_n * g$  nach dem Faltungssatz

$$\gamma_k(f_n * g) = \begin{cases} \gamma_k(g) & : k = -n, \dots, n \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

und daher bewirkt die Faltung mit dem Dirichlet-Kern ist also einfach das Abschneiden die Fourier-Reihe

$$(f * f_n)(t) = \sum_{k=-n}^n \gamma_k(f) e^{jk\omega t}.$$



## 23 Uneigentliche Integrale

Bisher haben wir nur beschränkte Funktionen über abgeschlossene Intervalle integriert. Oftmals hat man es jedoch mit unbeschränkten Funktionen oder Integralen über unbeschränkte Gebiete zu tun. Es gibt zwei verschiedene Fälle:

1. Integrale über unbeschränkte Gebiete, z.B.

$$\int_a^\infty f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^\infty f(x)dx.$$

2. Integrale von unbeschränkten Funktionen auf beschränkten Gebieten:

$$\int_a^b f(x)dx$$

wobei  $f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, aber ggf.  $f(x) \rightarrow \infty$  für  $x \rightarrow a$  (oder  $x \rightarrow b$ , oder auch auch beides).

Wir definieren diese Integrale als Grenzwerte von Integralen über beschränkte Funktionen auf beschränkten Gebieten.

**Definition 23.1.** Es sei  $D \subset \mathbb{R}$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann heißt  $f$  *lokal integrierbar*, wenn  $f$  über jedes Intervall  $[a, b]$  integrierbar ist.

**Definition 23.2** (Uneigentliche Integrale). Es sei  $D = [a, \infty[$ ,  $= ]-\infty, b]$ ,  $\mathbb{R}$  und  $f$  über  $D$  lokal integrierbar. Dann sind die uneigentlichen Integrale definiert durch

Die Funktion  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x$  ist lokal integrierbar, die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1/x$  (mit  $f(0) = 0$ ) hingegen ist *nicht* lokal integrierbar.

$$\begin{aligned} \int_a^\infty f(x)dx &:= \lim_{z \rightarrow \infty} \int_a^z f(x)dx \\ \int_{-\infty}^b f(x)dx &:= \lim_{z \rightarrow -\infty} \int_z^b f(x)dx \\ \int_{-\infty}^\infty f(x)dx &:= \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^\infty f(x)dx \end{aligned}$$

wenn die Grenzwerte existieren.

Analog: Ist  $D = [a, b[$ ,  $= ]a, b]$ ,  $= ]a, b[$  und  $f$  über  $D$  lokal

integrierbar, so sind die uneigentlichen Integrale definiert durch

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &:= \lim_{z \nearrow b} \int_a^z f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{z \searrow a} \int_z^b f(x) dx \\ \int_a^b f(x) dx &:= \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx\end{aligned}$$

Wenn ein uneigentliches Integral existiert, sagt man auch es ist *konvergent*.

*Beispiel.* (a) Wir betrachten  $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$ . Ist  $\alpha = 1$ , so gilt

$$\int_1^z \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_{x=1}^z = \ln(z)$$

aber da  $\ln(z) \rightarrow \infty$  für  $z \rightarrow \infty$  gilt, existiert das Integral  $\int_1^\infty x^{-1} dx$  nicht.

Für  $\alpha < 1$  gilt  $x^{-\alpha} \geq x^{-1}$  für  $x \geq 1$  und daher existiert  $\int_1^\infty x^{-\alpha} dx$  auch in diesem Fall nicht.

Für  $\alpha > 1$  gilt hingegen

$$\begin{aligned}\int_1^z x^{-\alpha} dx &= \left[ \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha} \right]_{x=1}^z \\ &= \frac{1}{1-\alpha} [z^{1-\alpha} - 1] \rightarrow -\frac{1}{1-\alpha} \text{ für } z \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

(b) Betrachte  $\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2} dx$ . Wir nehmen  $x_0 = 0$  und bemerken, dass die beiden Integrale  $\int_{-\infty}^0 |x|e^{-x^2} dx$  und  $\int_0^\infty |x|e^{-x^2} dx$  den gleichen Wert haben. Es gilt also (da  $-e^{-x^2}$  eine Stammfunktion von  $2xe^{-x^2}$  ist)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty |x|e^{-x^2} dx &= 2 \int_0^\infty xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z 2xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{z \rightarrow \infty} [-e^{-x^2}]_0^z = \lim_{z \rightarrow \infty} (-e^{-z^2}) - (-1) = 1.\end{aligned}$$

Man beachte, dass das uneigentliche Integral  $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$  *nicht* durch  $\lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z f(x) dx$  definiert ist. In Definition 23.2 werden beide Grenzen *unabhängig voneinander* gegen unendlich geschickt. Entsprechend ist ein uneigentliches Integral über  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

Hätte man das so definiert, so würde z.B.  $\int_{-\infty}^\infty x dx$  existieren und  $= 0$  sein, da für jedes  $z$  gilt  $\int_{-z}^z x dx = \frac{1}{2}(z^2 - z^2) = 0$ .

welches in  $x_0 \in ]a, b[$  unbeschränkt ist *nicht* definiert über

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} \left[ \int_a^{x_0-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx \right].$$

Es gibt aber folgenden Begriff:

**Definition 23.3.** Wenn der folgende Grenzwert existiert, nennt man das Integral

$$\text{CHW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{z \rightarrow \infty} \int_{-z}^z f(x) dx$$

den *Cauchy'schen Hauptwert*.

Ist entsprechend  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bei  $x_0 \in ]a, b[$  unbeschränkt, und existiert der folgende Grenzwert, so nennt man auch das folgende Integral

$$\text{CHW} \int_a^b f(x) dx := \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_a^{x_0-\epsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\epsilon}^b f(x) dx$$

*Cauchy'schen Hauptwert*.

*Beispiel.* (a) Das Integral  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  konvergiert nicht, aber der Cauchy'sche Hauptwert ist

$$\text{CHW} \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0.$$

(b) Auch das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 dx$  konvergiert nicht, aber hier existiert auch der Cauchy'sche Hauptwert nicht.

Es gibt Kriterien, die dabei helfen, zu erkennen, ob ein Integral konvergiert. Wir formulieren sie nur für den Fall des Intervalls  $[a, \infty[$  (die anderen Fälle sind analog).

**Satz 23.4** (Konvergenzkriterien für uneigentliche Integrale). Es sei  $f : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  lokal integrierbar.

1. Das Integral  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  konvergiert genau dann, wenn für alle  $\epsilon > 0$  ein  $C > a$  existiert, so dass für alle  $z_1, z_2 > C$  gilt  $|\int_{z_1}^{z_2} f(x) dx| < \epsilon$ .
2. Das Integral  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  konvergiert, wenn das Integral  $\int_a^{\infty} |f(x)| dx$  konvergiert.
3. Ist  $|f(x)| \leq g(x)$  und ist  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  konvergent, so ist  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  absolut konvergent.

Der Integrand ist in  $x = 0$  nicht definiert. Da es sich aber nur um einen Punkt handelt, spielt das keine Rolle - wir könnten den Integranden in diesem einen Punkt aber definieren, wie wir möchten...

In diesem Fall nennt man das Integral auch *absolut konvergent*.

4. Gilt  $0 \leq g(x) \leq f(x)$  und ist  $\int_a^\infty g(x)dx$  divergent, so auch das Integral  $\int_a^\infty f(x)dx$ .

*Beispiel.* (a) Wir untersuchen das sogenannte *Dirichlet-Integral*  $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt$ :  
Wir berechnen zuerst für  $z_1, z_2 > 0$  mit partieller Integration

$$\int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(t)}{t} dt = \left[ -\frac{\cos(t)}{t} \right]_{t=z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \frac{\cos(t)}{t^2} dt.$$

Da  $|\cos(t)| \leq 1$  gilt, folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sin(t)}{t} dt \right| &\leq \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \int_{z_1}^{z_2} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \left[ -\frac{1}{t} \right]_{t=z_1}^{z_2} \\ &= \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} = \frac{2}{z_1}. \end{aligned}$$

Aus dem vorigen Satz folgt die Konvergenz des Integrals. Allerdings ist das Integral nicht absolut konvergent!

Der Wert des Dirichlet-Integrals ist übrigens  $\frac{\pi}{2}$ .

- (b) Das *Exponentialintegral*  $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$  ist für alle  $x < 0$  konvergent. Das sieht man wie folgt: Es gilt  $te^t \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow -\infty$ . Daher gibt es  $C > 0$ , so dass  $|te^t| \leq C$  für alle  $t < -x$ . Damit können wir abschätzen

$$\left| \frac{e^t}{t} \right| = \left| \frac{te^t}{t^2} \right| \leq \frac{C}{t^2}.$$

Das Integral  $\int_{-\infty}^x t^{-2} dt$  existiert, und daher existiert auch das Exponentialintegral.

*Beispiel* (Die  $\Gamma$ -Funktion). Wir definieren die Funktion  $\Gamma : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  durch das uneigentliche Integral

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Ist  $0 < x < 1$ , so ist der Exponent  $-1 < x-1 < 0$  und daher ist der Integrand an der unteren Grenze unbeschränkt. Wir können jedoch für  $0 < t \leq 1$  abschätzen

$$|e^{-t} t^{x-1}| \leq t^{x-1}.$$

Damit bekommen wir

$$\int_\epsilon^1 |e^{-t}| t^{x-1} dt \leq \int_\epsilon^1 t^{x-1} dt = \left[ \frac{1}{x} t^x \right]_{t=\epsilon}^1 = \frac{1}{x} (1 - \epsilon^x) \rightarrow 0 \quad \text{für } \epsilon \searrow 0.$$

An der oberen Integralgrenze ist wie bei Exponentialintegral  $|e^{-t} t^{x-1}| \leq C/t^2$ , was die absolute Konvergenz des Integrals sichert.

Das Exponentialintegral und auch das Integral  $\int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$  sind Beispiele für Integrale, die man nicht mit elementaren Funktionen ausdrücken kann.

Das Integral kann man zwar nicht elementar auswerten (jedenfalls nicht für alle  $x$ ), aber man kann folgende Beobachtung machen: Mit partieller Integration bekommt man

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left[ \int_{\epsilon}^R t^x e^{-t} dt \right] \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left[ \left[ -t^x e^{-t} \right]_{t=\epsilon}^R - \int_{\epsilon}^R x t^{x-1} (-e^{-t}) dt \right] \\ &= x \Gamma(x).\end{aligned}$$

Außerdem gilt  $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ . Es folgt also

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \dots = n!.$$

Die Gamma-Funktion interpoliert also die Fakultät.

*Beispiel.* Um das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  zu berechnen macht man folgenden Trick. Wir berechnen das Quadrat des Integrals:

$$\begin{aligned}\left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy.\end{aligned}$$

Dieses Integral berechnen wir in Polarkoordinaten (vgl. Abschnitt 17): Es ist  $x = r \cos(\varphi)$  und  $y = r \sin(\varphi)$  und  $dx dy = r dr d\varphi$ . Wegen  $x^2 + y^2 = r^2$  folgt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi \\ &= 2\pi \left[ -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_{r=0}^{\infty} = 2\pi \left[ \lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-r^2} + \frac{1}{2} \right] = \pi.\end{aligned}$$

Es folgt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

## 24 Die Fourier-Transformation

Fourier-Reihen lassen sich für periodische Funktionen einsetzen. Untersuchen wir die Abhängigkeit von der Periode  $T$  genauer: Die Fourier-Koeffizienten sind

$$\gamma_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau$$

(wobei wie immer  $\omega = 2\pi/T$ ). Setzen wir diese in die Fourier-Reihe ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{jk\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega t} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{\omega}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega t} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Wir schreiben nun  $\Delta\omega = \omega = 2\pi/T$  und  $\omega_k = k\Delta\omega = k\omega$  und bekommen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_k t} \left( \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-j\omega_k \tau} d\tau \right) \Delta\omega.$$

Wir setzen  $F_T(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$  und kriegen

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_k t} F_T(\omega_k) \Delta\omega.$$

Diese Summe erkennen wir als eine Riemann-Summe für das Integral  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} F_T(\omega) d\omega$ ! Gehen wir (rein formal) zur Grenze  $T \rightarrow \infty$  über (d.h. wir betrachten den Übergang zu unperiodischen Funktionen), entspricht das dem Grenzwert  $\omega \rightarrow 0$  und wir bekommen

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Dies motiviert die Definition:

**Definition 24.1** (Fourier-Transformation). Die Funktion

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

heißt *Fourier-Transformierte* (oder *Spektralfunktion*) von  $f$ . Die Darstellung

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

heißt *spektrale Zerlegung* von  $f$ .

Wir schreiben auch

$$F(\omega) = \hat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

Der Operator  $\mathcal{F}$  der die Funktion  $f$  auf ihre Fourier-Transformierte  $F$  abbildet heißt *Fourier-Transformation*.

Es gibt noch viele andere Konventionen für die Fourier-Transformationen: Manchmal ist

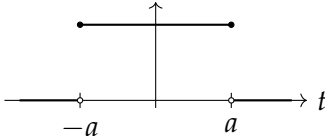
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

(und dann gilt  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$ ) und manchmal auch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-2\pi j\omega\tau} d\tau$$

(und dann gilt  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{2\pi j\omega t} d\omega$ ).

*Beispiel* (Rechteckimpuls). Für  $a > 0$  und

$$f(t) = \begin{cases} 1 & ; -a \leq t \leq a \\ 0 & ; |t| > a \end{cases}$$


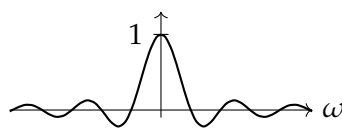
ist die Fourier-Transformierte für  $\omega \neq 0$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-a}^a e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= \left[ -\frac{1}{j\omega} e^{-j\omega\tau} \right]_{\tau=-a}^a \\ &= -\frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}) \\ &= \frac{2}{\omega} \sin(\omega a). \end{aligned}$$

Für  $\omega = 0$  ergibt sich wegen  $\exp(0) = 1$  sofort  $\hat{f}(0) = \int_{-a}^a 1 d\tau = 2a$ .

Die Funktion

$$\text{sinc}(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & ; x \neq 0 \\ 1 & ; x = 0 \end{cases}$$



Die Integrale sind alle uneigentlich und als Cauchy'sche Hauptwerte zu verstehen.

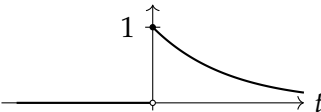
Aus der Euler-Formel  $e^{jx} = \cos(x) + j \sin(x)$  bekommen wir durch Addition bzw. Subtraktion von  $e^{jx}$  und  $e^{-jx}$  die Identitäten  $\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{jx} + e^{-jx})$  und  $\sin(x) = \frac{1}{2j}(e^{jx} - e^{-jx})$ .



heißt *Sinus cardinalis* und damit ist

$$\hat{f}(\omega) = 2a \operatorname{sinc}(\omega a).$$

*Beispiel* (Spektrum einer Kondensatorentladung). Wir betrachten zu  $a > 0$

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & ; t \geq 0 \\ 0 & ; t < 0. \end{cases}$$


Die sinc-Funktion findet Anwendungen im Filter-Design und bei der Theorie des Abtastens von Signalen.

Die Fourier-Transformierte ist

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt \\ &= \left[ -\frac{1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \right]_{t=0}^{\infty} \\ &= 0 - \left( -\frac{1}{a+j\omega} \right) = \frac{1}{a+j\omega}. \end{aligned}$$

Die Abbildung, die  $f$  auf die Fourier-Transformierte  $\hat{f}$  abbildet, heißt *Fourier-Transformation* und ist *linear*, d.h., es gilt

- (a)  $\widehat{(f+g)}(\omega) = \hat{f}(\omega) + \hat{g}(\omega)$  (Superpositionsprinzip)  
 (b) Für  $\alpha \in \mathbb{C}$  ist  $\widehat{(\alpha f)}(\omega) = \alpha \hat{f}(\omega)$  (Skalierung/Homogenität)

Folgt beides aus den entsprechenden Regeln für Integrale, nämlich  $\int (f+g) dt = \int f dt + \int g dt$  und  $\int \alpha f dt = \alpha \int f dt$ .

Weitere Rechenregeln sind:

**Satz 24.2.** (a) **Streckung:** Für  $c \neq 0$  gilt

$$\mathcal{F}\{f(ct)\}(\omega) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{c}\right).$$

(b) **Verschiebungssätze:** Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) &= e^{-j\omega a} \mathcal{F}\{f\}(\omega) \\ \mathcal{F}\{e^{jat} f(t)\}(\omega) &= \mathcal{F}\{f\}(\omega - a). \end{aligned}$$

(c) **Ableitung:**

$$\mathcal{F}\{f'\}(\omega) = j\omega \mathcal{F}\{f\}(\omega).$$

*Beweis.*

(a) Mit der Substitutionsregel folgt mit  $s = ct$  (also „ $ds = c dt$ “)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(ct)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(ct)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega s/c} \frac{ds}{c} = \frac{1}{c} \mathcal{F}\{f\}\left(\frac{\omega}{c}\right).\end{aligned}$$

(b) Für die erste Gleichung substituieren wir  $t - a = s$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f(t-a)\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega(s+a)} ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-j\omega s} e^{-j\omega a} ds = e^{-j\omega a} \mathcal{F}\{f\}(\omega).\end{aligned}$$

Für die zweite Gleichung rechnen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{e^{jat}f(t)\}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jat}f(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-a)t} dt = \mathcal{F}\{f\}(\omega-a).\end{aligned}$$

(c) Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f'\}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \underbrace{\left[f(t)e^{j\omega t}\right]_{t=-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-j\omega)e^{-j\omega t} dt \\ &= j\omega \mathcal{F}\{f\}(\omega).\end{aligned}$$

Hierfür brauchen wir natürlich, dass  $f(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \pm\infty$ .

□

**Satz 24.3** (Parseval-Gleichung). Es gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega.$$

Die Fourier-Transformation ist auch für Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definiert:

$$\hat{f}(\vec{\omega}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\vec{x}) e^{-j\langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle} d\vec{x}.$$

Wegen  $e^{j\langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle} = \exp(j \sum_{k=1}^n \omega_k x_k) = \prod_{k=1}^n e^{j\omega_k x_k}$  gilt

$$\hat{f}(\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) e^{-j\omega_1 x_1} dx_1 \cdots e^{-j\omega_n x_n} dx_n,$$

d.h. die Fourier-Transformation wird in jeder Koordinate angewendet. Für die Umkehrung gilt

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\vec{\omega}) e^{j\langle \vec{\omega}, \vec{x} \rangle} d\vec{\omega}.$$

## 25 Integration rationaler Funktionen

Rationale Funktionen sind Quotienten zweier Polynome:  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  mit  $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,  $q(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$ . Für solche Funktionen lassen sich prinzipiell immer Stammfunktionen angeben. Diese Tatsache basiert darauf, dass man die Integrale solcher Funktionen auf vier Grundtypen zurückführen kann. Diese sind

Typ 1: Polynome. Wir wissen

$$\int \sum_{k=0}^s c_k x^k dx = \sum_{k=0}^s \frac{c_k}{k+1} x^{k+1} + C.$$

Typ 2: Inverse Monome mit reellen Nullstellen:

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^\ell} = \begin{cases} \ln(|x-x_0|) + C & : \ell = 1 \\ \frac{1}{1-\ell} \frac{1}{(x-x_0)^{\ell-1}} + C & : \ell = 2, 3, \dots \end{cases}$$

Typ 3: Inverse Monome mit komplexen Nullstellen  $\pm j$ : Wir setzen

$$I_\ell := \int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell}.$$

Für  $\ell = 1$  gilt (wegen  $\arctan'(x) = 1/(x^2+1)$ )

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+1} = \arctan(t) + C.$$

Für  $\ell > 1$  können wir  $I_\ell$  rekursiv berechnen. Dafür machen wir die Vorüberlegung

$$\begin{aligned} \int \frac{2t}{(t^2+1)^\ell} dt &\stackrel{u=t^2+1}{=} \int \frac{du}{u^\ell} = \frac{1}{1-\ell} \frac{1}{u^{\ell-1}} + C \\ &= \frac{1}{1-\ell} \frac{1}{(t^2+1)^{\ell-1}} + C. \end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} I_{\ell-1} &= \int \frac{dt}{(t^2+1)^{\ell-1}} = \int \frac{t^2+1}{(t^2+1)^\ell} dt \\ &= \int \frac{t}{2} \frac{2t}{(t^2+1)^\ell} dt + \int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell} = \int \frac{t}{2} \frac{2t}{(t^2+1)^\ell} dt + I_\ell. \end{aligned}$$

Im ersten Integral wenden wir partielle Integration an (mit  $v = \frac{t}{2}$  und  $u' = 2t/(t^2+1)^\ell$ ) und bekommen

$$\int \frac{t}{2} \frac{2t}{(t^2+1)^\ell} dt = \frac{t}{2} \frac{1}{1-\ell} \frac{1}{(t^2+1)^{\ell-1}} - \underbrace{\int \frac{1}{1-\ell} \frac{1}{(t^2+1)^{\ell-1}} \frac{1}{2} dt}_{= \frac{1}{2(1-\ell)} I_{\ell-1}}.$$

Dies gibt

$$I_{\ell-1} = \frac{t}{2} \frac{1}{1-\ell} \frac{1}{(t^2+1)^{\ell-1}} - \frac{1}{2(1-\ell)} I_{\ell-1} + I_\ell$$

Diese Formeln sind nicht ganz korrekt. Die Funktionen sind ja nur in  $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$  definiert und wir können links und rechts von  $x_0$  zwei verschiedenen additiven Konstanten  $C_-$  und  $C_+$  wählen und erhalten immer noch eine Stammfunktion. Wir werden dies im Folgenden aber nicht berücksichtigen.

und das führt auf die Rekursion

$$I_\ell = \frac{1}{2(1-\ell)} \left[ (3-2\ell)I_{\ell-1} - \frac{t}{(t^2+1)^{\ell-1}} \right].$$

Es folgt z.B.

$$\begin{aligned} \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \frac{1}{2} \left( \frac{t}{t^2+1} + \arctan(t) \right) + C, \\ \int \frac{dt}{(t^2+1)^3} &= \frac{1}{8} \left( \frac{t(3t^2+5)}{(t^2+1)^2} + 3 \arctan(t) \right) + C. \end{aligned}$$

Typ 4: Inverse Monome mit allgemeinen komplexen Nullstellen

$$\int \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^\ell} dx, \quad \ell \in \mathbb{N}, b \neq 0.$$

Wir formen um zu

$$\int \frac{cx+d}{[(x-a)^2+b^2]^\ell} dx = \frac{c}{2} \int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^\ell} dx + (d+ca) \int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]}.$$

Im ersten Integral substituieren wir  $u = (x-a)^2 + b^2$   
(„ $du = 2(x-a)dx$ “)

$$\begin{aligned} \int \frac{2(x-a)}{[(x-a)^2+b^2]^\ell} dx &= \int \frac{du}{u^\ell} \\ &= \begin{cases} \ln[(x-a)^2+b^2] + C & : \ell = 1 \\ \frac{1}{1-\ell} \frac{1}{[(x-a)^2+b^2]^{\ell-1}} + C & : \ell = 2, 3, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Das zweite Integral kann mit  $t = (x-a)/b$  auf ein Integral vom Typ 3 zurückgeführt werden:

$$\int \frac{dx}{[(x-a)^2+b^2]} = \frac{1}{b^{2\ell-1}} \int \frac{dt}{(t^2+1)^\ell} = \frac{1}{b^{2\ell-1}} I_\ell.$$

Kommen wir jetzt dazu, wie man eine rationale Funktion  $R(x) = p(x)/q(x)$  in Teile zerlegt, deren Integrale vom Typ 1 bis 4 sind:

Schritt I. Ist der Grad von  $p$  größer gleich dem Grad von  $q$ , mache Polynomdivision:

$$R(x) = p_1(x) + \frac{p_2(x)}{q(x)}$$

wobei jetzt der Grad von  $p_2$  echt kleiner als der von  $q$  ist.

Schritt II. Im Fall  $R(x) = p(x)/q(x)$  wobei der Grad von  $p$  echt kleiner als der von  $q$  ist

- Bestimme alle Nullstellen von  $q$  und deren Vielfachheiten.

Hier wird es im allgemeinen schwer: Es gibt keine Formeln für die Nullstellen von Polynomen vom Grad größer gleich fünf. Hier ist also auch der Computer schnell überfragt, wenn es um exakte Formeln geht.

- Schreibe  $q$  als Produkt von Linearfaktoren. Beachte: Ist  $q$  Polynom mit reellen Koeffizienten, so gibt es zu einer komplexen Nullstelle  $a + jb$  immer auch die konjugierte Nullstelle  $a - jb$ . Daher gibt es in der Linearfaktorzerlegung den Term

$$(x - (a + jb))(x - (a - jb)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = (x - a)^2 + b^2$$

Insgesamt zerfällt  $q$  also in

$$q(x) = \prod_{k=1}^{n_1} (x - x_k)^{r_k} \cdot \prod_{k=n_1+1}^{n_2} [(x - a_k)^2 + b_k]^{r_k}$$

wobei  $x_k$  eine reelle Nullstelle der Vielfachheit  $r_k$  und  $z_k = a_k + jb_k$  eine komplexe Nullstelle der Vielfachheit  $r_k$  ist.

Schritt III. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist dann

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{k=1}^{n_1} \left[ \frac{\alpha_{k1}}{x - x_k} + \frac{\alpha_{k2}}{(x - x_k)^2} + \dots + \frac{\alpha_{kr_k}}{(x - x_k)^{r_k}} \right] + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} \left[ \frac{\gamma_{k1}x + \delta_{k1}}{[(x - a_k)^2 + b_k]} + \dots + \frac{\gamma_{kr_k}x + \delta_{kr_k}}{[(x - a_k)^2 + b_k]^{r_k}} \right].$$

Um die Koeffizienten  $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \delta_k$  zu bestimmen bringt man die rechte Seite auf den Hauptnenner (welcher ja nach Konstruktion genau das Polynom  $q$  ist) und macht Koeffizientenvergleich.

Dieser Schritt ist per Hand sehr mühsam, für den Computer jedoch kein Problem.

*Beispiel.* Es sei

$$R(x) = \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Die Nullstellen des Nenners  $q$  sind  $x_1 = 0$  mit Vielfachheit 2 und  $z_{1,2} = \pm j$  je mit Vielfachheit 1. Der Ansatz für die Partialbruchzerlegung ist also

$$\begin{aligned} \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} &= \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{\gamma_1 x + \delta_1}{x^2+1} \\ &= \frac{a_1 x(x^2+1) + a_2(x^2+1) + x^2(\gamma_1 x + \delta_1)}{q(x)} \\ &= \frac{x^3(a_1 + \gamma_1) + x^2(a_2 + \delta_1) + x a_1 + a_2}{q(x)}. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\left. \begin{array}{l} a_1 + \gamma_1 = 0 \\ a_2 + \delta_1 = 0 \\ a_1 = -1 \\ a_2 = 1 \end{array} \right\} \implies \gamma_1 = 1, \quad \delta_1 = -1,$$

und es folgt

$$\frac{1-x}{x^2(x^2+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Die ersten beiden Integrale sind vom Typ 1 und das zweite ist vom Typ 4 (mit  $c = 1, d = 1, a = 0$  und  $b = 1$ ) Daher ist das Integral

$$\int \frac{1-x}{x^2(x^2+1)} dx = -\ln(|x|) - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - \arctan(x) + C.$$

Man kann auch alle rationalen Funktionen von  $\sin(x)$  und  $\cos(x)$  integrieren, in dem man sie mit einer genialen Substitution auf Integrale von rationalen Funktionen in einer neuen Variablen  $t$  zurückführt (welche mit der eben vorgestellten Technik berechnet werden können):

**Satz 25.1.** Ist  $R$  eine rationale Funktion, so gilt

$$\int R(\sin(x), \cos(x)) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2dt}{1+t^2}.$$

*Beweis.*

Es gelten die Doppelwinkelformeln

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x), \quad \cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2.$$

Daraus bekommen wir (wenn wir noch  $\sin^2 + \cos^2 = 1$  ausnutzen und mit  $1/\cos(x/2)^2$  erweitern)

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \frac{2 \sin(x/2) \cos(x/2)}{\sin(x/2)^2 + \cos(x/2)^2} \\ &= \frac{2 \tan(x/2)}{1 + \tan(x/2)^2}, \\ \cos(x) &= \frac{\cos(x/2)^2 - \sin(x/2)^2}{\cos(x/2)^2 + \sin(x/2)^2} \\ &= \frac{1 - \tan(x/2)^2}{1 + \tan(x/2)^2}. \end{aligned}$$

Diese Substitution wird auch *Weierstraß-Substitution* genannt.

Wir substituieren im Integral also  $t = \tan(x/2)$  (also  $x = 2 \arctan(t)$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ) und bekommen wegen  $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$  und  $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$  die Behauptung.  $\square$

*Beispiel.* (a) Wir berechnen eine Stammfunktion von  $\frac{1}{\sin(x)}$  mit der Weierstraß-Substitution:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin(x)} dx &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + C = \ln\left(\left|\tan \frac{x}{2}\right|\right) + C. \end{aligned}$$

(b) Als weiteres Beispiel integrieren wir die Funktion  $1/(\sin(x) +$

$\cos(x) + 1$ ):

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sin(x) + \cos(x) + 1} &= \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1} \frac{2dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{2dt}{2t+1-t^2+1+t^2} \\ &= \int \frac{2dt}{2t+2} = \int \frac{dt}{t+1} \\ &= \ln(|t+1|) + C = \ln\left(\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1\right|\right) + C.\end{aligned}$$



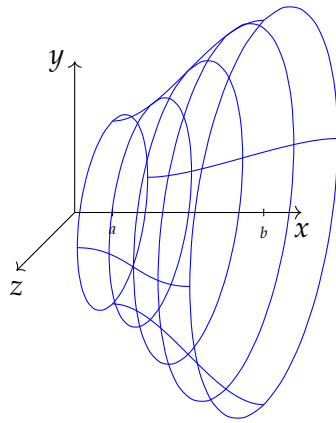
## 26 Rotationskörper

In diesem Abschnitt behandeln wir weitere Anwendungen von Integrationstheorie mit elementaren Mitteln. Wir wollen insbesondere Volumen von Rotationskörpern berechnen, sowie deren Oberflächen. Mit “elementaren Mitteln” ist dabei die Anwendung des Riemann-Integrals, sowie weiterer elementargeometrische Flächeninhalte, wie z.B. dem Wissen das ein Kreis mit Radius  $r$  die Fläche  $\pi r^2$  hat.

**Definition 26.1.** Ein *Rotationskörper* in drei Dimensionen entsteht, in dem wir den Graphen einer nicht negativen Funktion  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$  um die  $x$ -Achse “rotieren”, genauer, ist die Menge

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\}$$

gemeint.



Um das Volumen dieses Körpers zu berechnen, gehen wir wie beim Riemann-Integral vor: Wir unterteilen

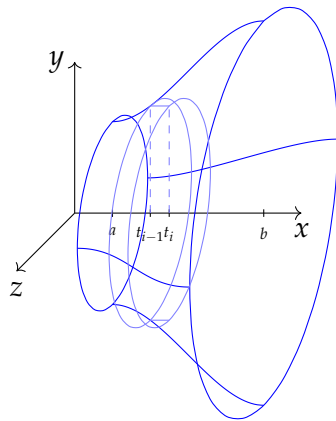
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

und betrachten diesmal nicht die Rechtecke unter bzw. über der Kurve, sondern die zugehörigen *Zylinder*, die entstehen, wenn wir diese Rechtecke um die  $x$ -Achse rotieren lassen. Dabei nehmen wir das größte Rechteck unterhalb mit Höhe

$$m_i := \inf\{f(t) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\}$$

und das kleinste Rechteck oberhalb mit Höhe

$$M_i := \sup\{f(t) \mid t_{i-1} \leq t \leq t_i\}.$$



Wenn wir das Rechteck mit der Grundseite  $[t_{i-1}, t_i]$  und der Höhe  $m_i$  um die  $x$ -Achse rotieren, bekommen wir einen Zylinder dessen Grundfläche ein Kreis mit Radius  $m_i$  ist und dessen Höhe  $t_i - t_{i-1}$  beträgt. Sein Volumen ist also

$$\pi m_i^2 (t_i - t_{i-1}).$$

und entsprechend für den Zylinder mit Radius  $M_i$ . Summieren wir die Volumina alle auf, so bekommen wir

$$\pi \sum_{i=1}^n m_i^2 (t_i - t_{i-1}) \leq \text{Volumen von } A \leq \pi \sum_{i=1}^n M_i^2 (t_i - t_{i-1}).$$

Die Summen links und rechts erkennen wir als Unter- bzw. Ober-summen für das Integral der Funktion  $x \mapsto \pi f(x)^2$  und daher bekommen wir:

**Satz 26.2.** Ist  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$  Riemann-integrierbar und

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)\},$$

so ist das Volumen von  $A$  gegeben durch das Integral

$$\text{Volumen von } A = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

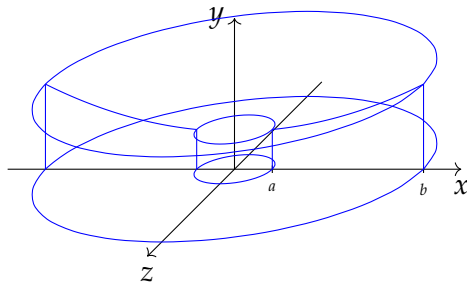
*Beispiel.*

Berechnen wir das Volumen einer Kugel: Hierzu rotieren wir die Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{1 - x^2}$  um die  $x$ -Achse. Unser Satz gibt uns für das Volumen

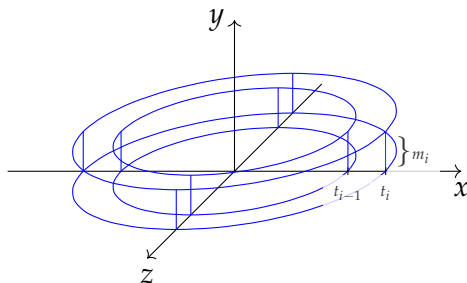
$$\begin{aligned} \pi \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx &= \pi \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^1 \\ &= \pi \left( 1 - \frac{1}{3} - \left( -1 + \frac{1}{3} \right) \right) = \pi \left( \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Betrachten wir einen weiteren, etwas anderen Fall: Es sei  $f : [a, b] \rightarrow [0, \infty[$  mit  $a \geq 0$  und wir rotieren den Graphen von  $f$  um die  $y$ -Achse, d.h. wir betrachten die Menge

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq \sqrt{x^2 + z^2} \leq b, 0 \leq y \leq f(\sqrt{x^2 + z^2})\}.$$



Für eine Unterteilung  $t_0, \dots, t_n$  wie eben, betrachten wir nun die Zylinderschalen, die entstehen, wenn wir das Rechteck mit Grundseite  $[t_{i-1}, t_i]$  und Höhe  $m_i = f(t_i)$  um die  $y$ -Achse rotieren lassen. Diese Zylinderschale entsteht, indem wir vom Zylinder mit Radius  $t_i$  und Höhe  $m_i$  einen Zylinder mit Radius  $t_{i-1}$  und gleiches Höhe abziehen.



Sein Volumen ist also

$$\pi t_i^2 m_i - \pi t_{i-1}^2 m_i = \pi m_i (t_i^2 - t_{i-1}^2)$$

und somit bekommen wir durch aufsummieren dieser Zylinderschalen

$$\pi \sum_{i=1}^n m_i (t_i^2 - t_{i-1}^2).$$

Dies ist leider keine Ober- oder Untersummen oder Riemann-Summe für irgendeine Funktion. Wir können aber umformen zu

$$\pi \sum_{i=1}^n m_i (t_i + t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) = \pi \sum_{i=1}^n m_i t_i (t_i - t_{i-1}) + \pi \sum_{i=1}^n m_i t_{i-1} (t_i - t_{i-1})$$

Dies beiden Summen auf der rechten Seite sind Riemann-Summen und es folgt

$$\text{Volumen von } B = 2\pi \int_a^b x f(x) dx.$$

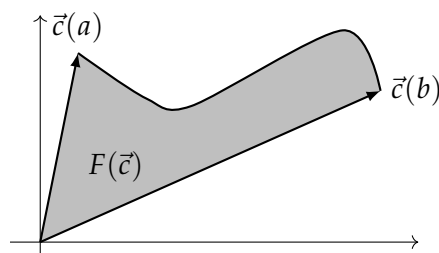
*Beispiel.* Auch hier können wir das Volumen der Kugel berechnen: Wir nehmen die Funktion  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$  und rotieren die um die  $y$ -Achse, was nur die obere Halbkugel ergibt.

Das Volumen davon ist (mit der Substitution  $u = x^2$ , also  $du = 2x dx$ )

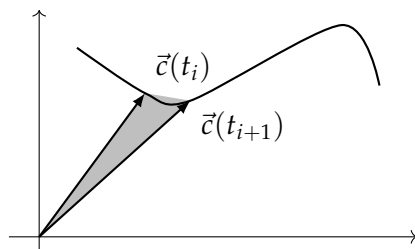
$$\begin{aligned} 2\pi \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx &= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} \sqrt{1-u} du \\ &= \pi \left[ -\frac{2}{3} (1-u)^{3/2} \right]_{u=0}^1 \\ &= \pi \left[ 0 + \frac{2}{3} \right] = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Wir bekommen also für die ganze Kugel wieder das Volumen  $4\pi/3$ .

Als letzte Anwendung der Integralrechnung beantworten wir die Frage, welche Fläche  $F(\vec{c})$  der Ortsvektor  $\vec{c}(t)$  einer Kurve  $\vec{c} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  überstreicht:



Wir zerlegen  $a = t_0 < \dots < t_n = b$  und betrachten das folgende Dreieck:



Die Fläche des Dreiecks ist die Hälfte der Fläche des entsprechenden Parallelogramms. Wir schreiben  $\vec{c}(t) = (x(t), y(t))^T$  und bekommen für die Dreiecksfläche

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |\vec{c}(t_i) \times \vec{c}(t_{i+1})| &= \frac{1}{2} \det \begin{pmatrix} x(t_i) & x(t_{i+1}) \\ y(t_i) & y(t_{i+1}) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} |x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_i)|. \end{aligned}$$

Die Summe aller Dreiecksflächen ist also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} |x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_i)| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{|x(t_i)y(t_{i+1}) - x(t_{i+1})y(t_i)|}{t_{i+1} - t_i} (t_{i+1} - t_i) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} \left| x(t_i) \frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} - y(t_i) \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right| (t_{i+1} - t_i). \end{aligned}$$

Lassen wir die Feinheit der Zerlegung gegen Null gehen bekommen wir also das Integral

$$F(\vec{c}) := \frac{1}{2} \int_a^b |x(t)y'(t) - x'(t)y(t)| dt$$

für die Fläche. Dies ist die *Leibniz'sche Sektorformel*.

*Beispiel.* Wir betrachten die „Herzkurve“

$$\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos(t)(1 + \cos(t)) \\ a \sin(t)(1 + \cos(t)) \end{pmatrix}$$

Für die Fläche bekommen wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [a \cos(t)(1 + \cos(t)) a (\cos(t) + 2 \cos(t)^2 - 1) \\ & \quad + a \sin(t)(1 + 2 \cos(t)) a \sin(t)(1 + \cos(t))] dt \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(t))^2 a^2 dt \\ & = \frac{3}{2} a^2 \pi. \end{aligned}$$

