

Handout

Analysis 2

Dirk Lorenz

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung	3
1 Potenzreihen	5
2 Metriken und Normen	10
3 Topologische Grundbegriffe	15
3.1 Offene Mengen in metrischen Räumen	15
3.2 Topologische Räume	18
4 Grenzwerte in topologischen und metrischen Räumen	21
4.1 Konvergenz	21
4.2 Vollständigkeit	23
5 Stetige Abbildungen	26
5.1 Stetigkeit in metrischen Räumen	26
5.2 Stetigkeit in topologischen Räumen	28
6 Funktionenfolgen und lineare Abbildungen	30
6.1 Noch einmal gleichmäßige Konvergenz	30
6.2 Lineare Abbildungen	32
7 Kompaktheit	35
7.1 Kompakte Mengen in metrischen Räumen	35
7.2 Der Satz von Heine-Borel	37
8 Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$	41
8.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$	41
8.2 Rektifizierbare Kurven	43
9 Partielle Ableitungen	47
9.1 Richtungs- und partielle Ableitungen	47
9.2 Höhere partielle Ableitungen	50
10 Differenzierbarkeit	53
10.1 Jacobi-Matrix und Gradient	53
10.2 Totale und partielle Differenzierbarkeit	55

11	Sätze über Ableitungen	58
11.1	Ableitungsregeln	58
11.2	Der Mittelwertsatz	60
12	Höhere Ableitungen	63
12.1	Fréchet-Ableitungen	63
12.2	Höhere Ableitungen und Multiindizes	65
13	Taylor-Entwicklung	68
14	Lokale Extrema	72
15	Lösen von nichtlinearen Gleichungen	77
15.1	Der Banachsche Fixpunktsatz	77
15.2	Anwendungen des Fixpunktsatzes	80
16	Implizite Funktionen	82
17	Der Umkehrsatz	86
18	Einführung in Differentialgleichungen: Modellierung von Epidemie-Dynamik	91
19	Gewöhnliche Differentialgleichungen	96
19.1	Motivation	96
19.2	Definitionen, Richtungsfelder	99
20	Trennung der Variablen	102
21	Lineare Differentialgleichungen in einer Dimension	107
22	Lipschitz-Bedingung und Eindeutigkeit von Lösungen	112
23	Existenz-Sätze	117
24	Differentialgleichungen höherer Ordnung	122
25	Lineare Differentialgleichungen in mehreren Dimensionen	127
26	Lineare Gleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	131
27	Phasenportraits	137
28	Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung	145

Vorbemerkung

Dies ist das Handout zur Vorlesung „Analysis 2“, gehalten an der TU Braunschweig im Sommersemester 2020. Es keinerlei Anspruch, auch ohne Besuch der Vorlesung verständlich zu sein. Diese Version enthält mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zahlreiche Fehler und das, obwohl viele Leserinnen und Leser schon zahlreiche Fehler gefunden haben; seien Sie also aufmerksam beim Lesen.

Die Aufzeichnungen der Vorlesungen zu diesem Handout finden Sie entweder im Stud.IP-Eintrag zur Vorlesung oder auf dem YouTube Kanal

<https://www.youtube.com/channel/UCn9kJUL7lFuWXXxX-o6090g>.

Im YouTube-Kanal finden Sie auch die Videos zu den Inhalten der großen Übung und in Stud.IP die ganzen weiteren Übungsaufgaben inklusive Lösungen.

Braunschweig, den 23. Juli 2020

Dirk Lorenz
d.lorenz@tu-braunschweig.de

1 Potenzreihen

Definition 1.1. Es sei (c_n) eine Folge komplexer Zahlen und $a \in \mathbb{C}$. Die Reihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

heißt *Potenzreihe* mit Koeffizienten (c_n) und Entwicklungspunkt a .

Mit unseren bisherigen Mitteln können wir für jedes $z \in \mathbb{C}$ bestimmen, ob die Potenzreihe in diesem Punkt konvergiert. Wir würden aber gerne mehr wissen: Wie sieht die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ aus, für die die Potenzreihe konvergiert? Was für Eigenschaften hat die "Grenzfunktion" f (Stetigkeit, Differenzierbarkeit,...)?

Wir benötigen also Begriffe, die die Konvergenz von *Folgen von Funktionen* zu beschreiben:

Definition 1.2. Es sei K eine Menge und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann nennen wir (f_n) eine *Funktionenfolge* und sagen:

1. (f_n) konvergiert *punktweise* gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, falls für jedes $x \in K$ gilt

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Wir schreiben auch

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{p.w.}$$

2. (f_n) konvergiert *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, x \in K : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Wir schreiben auch

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \text{glm.}$$

Die Definition ist wortwörtlich die Gleiche für Abbildungen nach $\mathbb{R}$.

Hier andere Formulierungen dieser Begriffe: Es gilt

1. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ p.w., falls

$$\forall x \in K, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

2. $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ glm., falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sup_{x \in K} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Taylor-Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$ sind ein Beispiel für Potenzreihen (mit Koeffizienten $c_n = f^{(n)}(a)/n!$).

Der Unterschied zur gleichmäßigen Konvergenz ist klein aber extrem wichtig: Bei punktwiser Konvergenz darf das N für alle $x \in K$ bei gleichem ϵ verschieden sein, bei gleichmäßiger Konvergenz muss das N für alle $x \in K$ auf einmal funktionieren.

Sie sollten sich davon überzeugen, dass diese Formulierungen tatsächlich äquivalent zu den Definitionen sind.

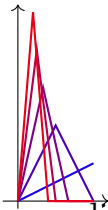
Außerdem sieht man schnell (auch an der Randbemerkung): Konvergiert (f_n) gleichmäßig gegen f , so auch punktweise. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht:

Beispiel.

Wir betrachten $K = [0, 1]$ und die Funktionen $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$

$$f_n(x) = \max(n - n^2|x - \frac{1}{n}|, 0)$$

$$= \begin{cases} n^2x, & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2x, & \text{falls } \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & \text{falls } \frac{2}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$



Diese Funktionenfolge konvergiert punktweise gegen die Nullfunktion. Das sieht man so:

1. Für $x = 0$ und alle n gilt $f_n(0) = 0$.
2. Für $x > 0$ gilt: Ist $N \geq 2/x$ so gilt für $n \geq N$ immer $\frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} \leq x$. Also ist für diese n auch $f_n(x) = 0$.

In beiden Fällen folgt $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Die Funktionenfolge konvergiert aber nicht gleichmäßig, denn es gilt

$$\sup_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - 0| = |f_n(1/n) - 0| = n \not\rightarrow 0.$$

△

Satz 1.3. Ist $K \subset \mathbb{C}$ und $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktionenfolge, so gilt: Ist jedes f_n stetig und gilt $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ gleichmäßig, so ist auch f stetig.

Beweis.

Es sei $x \in K$ und $\epsilon > 0$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\delta > 0$ gibt, so dass für $|x - x'| < \delta$ immer $|f(x') - f(x)| \leq \epsilon$ gilt.

Die Idee ist es, mit der Dreiecksungleichung abzuschätzen

$$|f(x') - f(x)| = |f(x') - f_N(x') + f_N(x') - f_N(x) + f_N(x) - f(x)|$$

$$\leq |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)|,$$

und alle drei Terme separat zu diskutieren.

Da f_n gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein N , so dass für alle $\xi \in K$ gilt

$$|f_N(\xi) - f(\xi)| < \epsilon/3$$

(also auch für $\xi = x$ und $\xi = x'$). Da f_N in x stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle x' mit $|x - x'| < \delta$ gilt $|f_N(x) - f_N(x')| < \epsilon/3$.

Kurz gesagt: Der gleichmäßige Grenzwert einer Folge von stetigen Funktionen ist wieder stetig.

Also können wir schließen:

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &\leq |f(x') - f_N(x')| + |f_N(x') - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

□

Aus punktweiser Konvergenz einer Folge von stetigen Funktionen lässt sich nicht auf die Stetigkeit der Grenzfunktion schließen:

Beispiel.

Wir betrachten $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \cos(x)^{2n}$. Für $x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist $|\cos(x)| < 1$ und daher gilt für diese x :

$$|f_n(x)| = |\cos(x)|^{2n} \rightarrow 0.$$

Für $x = \pi k$ ist $\cos(\pi k) = \pm 1$, also $f_n(x) = \cos(\pi k)^{2n} = 1$. Es folgt also

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & x \notin \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

△

Kommen wir nun zur Konvergenz von Potenzreihen:

Satz 1.4. Es sei $c_n \in \mathbb{C}$ und $a \in \mathbb{C}$. Die Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

konvergiere für ein $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq a$. Dann gilt für alle $r \in]0, |z_1 - a|[:$

1. Die Potenzreihe konvergiert gleichmäßig für alle

$$z \in K(a, r) := \{\zeta \mid |\zeta - a| \leq r\}.$$

2. Die formal differenzierte Reihe

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$$

konvergiert ebenfalls gleichmäßig auf $K(a, r)$.

Beweis.

Da die Reihe für $f(z_1)$ konvergent ist, folgt aus dem Triviale Kriterium insbesondere, dass $|c_n(z_1 - a)^n|$ beschränkt ist. Sei also $M \geq |c_n(z_1 - a)^n|$ für alle n .

1. Für jedes $z \in K(a, r)$ gilt $\frac{|z-a|}{|z_1-a|} \leq \frac{r}{|z_1-a|} =: \theta < 1$. Damit sehen wir durch

$$|c_n(z - a)^n| = |c_n(z_1 - a)^n| \frac{|z-a|^n}{|z_1-a|^n} \leq M \theta^n,$$

dass die Reihe punktweise konvergiert. Für die gleichmäßige

Konvergenz bezeichnen wir die Partialsumme mit $f_N(z) = \sum_{n=0}^N c_n(z-a)^n$ und die Behauptung folgt wie eben aus

$$\sup_{z \in K(a,r)} |f(z) - f_N(z)| \leq \sup_{z \in K(a,r)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n(z-a)^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} M\theta^n \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

2. Die zweite Behauptung zeigt man fast analog. Man bezeichnet mit g_N die entsprechende Partialsumme und schätzt ab

$$\sup_{z \in K(a,r)} |g(z) - g_N(z)| \leq \sup_{z \in K(a,r)} \sum_{n=N+1}^{\infty} |nc_n(z-a)^{n-1}| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} nM\theta^{n-1}.$$

Mit dem Quotientenkriterium sieht man, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} nM\theta^{n-1}$ konvergiert, und schließt $\sum_{n=N+1}^{\infty} nM\theta^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

□

Definition 1.5. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe. Dann heißt

$$R := \sup \{ |z-a| \mid \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n \text{ konvergiert} \}$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe (dabei ist $R = \infty$ möglich, in diesem Fall konvergiert die Potenzreihe in ganz $\mathbb{C}$).

Korollar 1.6. Ist R der Konvergenzradius einer Potenzreihe, so konvergiert die Potenzreihe für jedes $r \in [0, R[$ gleichmäßig in der Kreisscheibe $K(a, r)$. Außerdem hat man in der offenen Kreisscheibe $B(a, R) := \{z \mid |z-a| < R\}$ punktweise Konvergenz. Schließlich stellt eine Potenzreihe eine auf $B(a, R)$ stetig Funktion dar.

Folgt aus Satz 1.3 und Satz 1.4.

Das Konvergenzverhalten von Potenzreihen ist also einigermaßen übersichtlich: Jede Potenzreihe hat einen Potenzradius $R \in [0, \infty]$ (wobei $R = \infty$ Konvergenz in ganz $\mathbb{C}$ bedeutet) und

1. konvergiert in der offenen Kreisscheibe $B(a, R)$ punktweise und für jedes $r < R$ in der abgeschlossenen Kreisscheibe $K(a, r)$ gleichmäßig,
2. divergiert außerhalb der abgeschlossenen Kreisscheibe $K(a, R)$.

Für die komplexen Zahlen mit $|z-a| = R$ lässt sich keine Aussage treffen, d.h. es gibt Potenzreihen mit Konvergenzradius R , welche für alle z mit $|z-a| = R$ konvergieren, welche die für alle solche divergieren und auch solche, die für manche solche z konvergieren und für andere divergieren.

Der Konvergenzradius ergibt sich aus den Koeffizienten durch die Formel von Cauchy-Hadamard:

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Beweis.

Ohne Einschränkung nehmen wir $a = 0$ an. Sei R wie oben definiert und sei $|z| < R$. Wir zeigen, dass die Reihe für $|z - a| < R$ konvergiert und für $|z - a| > R$ divergiert.

Wir setzen $t = 1/R = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$. Dann gilt für jedes $\epsilon > 0$: $\sqrt[n]{|c_n|} \geq t + \epsilon$ nur für endlich viele n . Also gilt $|c_n| \leq (t + \epsilon)^n$ für fast alle n und daher konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$ für $|z - a| < 1/(t + \epsilon)$.

Sei umgekehrt für $\epsilon > 0$ unendlich oft $|c_n| \geq (t - \epsilon)^n$, dann kann die Reihe für $|z - a| = 1/(t - \epsilon) > R$ nach dem Triviale Kriterium nicht konvergieren. $\square$

2 Metriken und Normen

Wir bereiten uns jetzt auf die Analysis in mehreren Raumdimensionen vor. Aus der linearen Algebra ist die Vektorraumstruktur des $\mathbb{R}^n$ bekannt. In dieser Vorlesung wollen wir die "topologische" Struktur des $\mathbb{R}^n$ behandeln, also die Abstraktion von Begriffen wie Abstand, Nähe, Umgebung, usw.

Die Abstraktion des Abstandsbegriffes ist der folgende:

Definition 2.1. Es sei X eine Menge. Eine *Metrik* auf X ist eine Abbildung

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto d(x, y)$$

mit den Eigenschaften

$$d(x, y) = 0 \quad \text{genau dann, wenn} \quad x = y, \quad (\text{Definitheit})$$

$$\forall x, y : d(x, y) = d(y, x), \quad (\text{Symmetrie})$$

$$\forall x, y, z : d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Ist X eine Menge und d eine Metrik auf X , so heißt das Paar (X, d) ein *metrischer Raum*.

In einem metrischen Raum gilt übrigens immer

$$0 \leq d(x, y).$$

Dies folgt aus

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) \leq 2d(x, y).$$

Außerdem gilt immer die *inverse Dreiecksungleichung*

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leq d(x, z).$$

Aus $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ folgt $d(x, y) - d(y, z) \leq d(x, z)$ und aus $d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z)$ folgt $d(y, z) - d(x, y) \leq d(x, z)$. Diese beiden Ungleichungen zusammen zeigen die Behauptung.

Beispiel.

1. Auf $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) ist

$$d(x, y) := |x - y|$$

eine Metrik.

2. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, dann bekommen wir durch Einschränkung die *induzierte Metrik*

$$d_A : A \times A \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_A(x, y) := d(x, y).$$

Damit ist (A, d_A) wieder ein metrischer Raum.

Man kann sich unter $d(x, y)$ immer "der Abstand von x zu y " vorstellen (auch wenn es das nicht im anschaulichen Sinne bedeuten muss). Damit lesen sich die Eigenschaften wie folgt:

Definitheit: "der Abstand zweier Punkte ist genau dann gleich 0, wenn die beiden Punkte gleich sind."

Symmetrie: "der Abstand von einem Punkt zum anderen ist genau so wie der Abstand vom anderen Punkt zum einen."

Dreiecksungleichung: "der Abstand von einem Punkt zu einem anderen ist immer kleiner als wenn man die Abstände zu einem Dritten addiert". Anschaulich auch "Ein Umweg von x über y nach z ist länger als der direkte Weg von x nach z ."

3. Auf jeder Menge X wird durch

$$d(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x = y \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Metrik definiert; man nennt diese Metrik die *diskrete Metrik*.

△

Ist die zugrunde liegende Menge sogar ein Vektorraum (wie z.B. der $\mathbb{R}^n$ oder der $\mathbb{C}^n$), so können wir Normen definieren, welche den Begriff "Länge eines Vektors" abstrahieren.

Definition 2.2. Es sei V ein $\mathbb{R}$ - oder $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Eine *Norm* auf V ist eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$$

mit folgenden Eigenschaften

$$\|x\| = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0 \quad (\text{Definitheit})$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \text{ (bzw. } \mathbb{C}), x \in V : \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad (\text{positive Homogenität})$$

$$\forall x, y \in V : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|. \quad (\text{Dreiecksungleichung})$$

Ist V ein $\mathbb{R}$ - bzw. $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit einer Norm, so heißt das Paar $(V, \|\cdot\|)$ ein *normierter Vektorraum* (oder auch nur *normierter Raum*).

Satz 2.3. Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so wird durch $d(x, y) := \|x - y\|$ eine Metrik auf V definiert.

Man nennt diese Metrik dann *von der Norm induziert*.

Beweis.

Alle Eigenschaften der Metrik rechnet man schnell selbst nach:

Zur Definitheit: Es gilt $d(x, y) = 0$, genau dann wenn $\|x - y\| = 0$ und das ist, nach der Definitheit der Norm, genau dann der Fall, wenn $x - y = 0$ gilt.

Die Symmetrie folgt aus der positiven Homogenität:

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x).$$

Die Dreiecksungleichung für die Metrik folgt schließlich aus der Dreiecksungleichung der Norm:

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z).$$

□

Lemma 2.4 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung). Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left| \sum_{k=1}^n x_k y_k \right| \leq \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n y_k^2 \right)^{1/2}.$$

Beweis.

Für beliebiges $\alpha > 0$ gilt

$$0 \leq \sum_{k=1}^n (x_k - \alpha y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^2 - 2\alpha x_k y_k + \alpha^2 y_k^2)$$

und es folgt (da $\alpha > 0$ ist)

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2.$$

Starten wir mit $(x_k + \alpha y_k)^2$ so bekommen wir analog $-\sum_{k=1}^n x_k y_k \leq \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2$. Aus diese beiden Ungleichungen zusammen folgt

$$|\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \frac{1}{2\alpha} \sum_{k=1}^n x_k^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^n y_k^2.$$

Diese Ungleichung gilt für alle $\alpha > 0$ und wählen wir $\alpha > 0$ so, dass die rechte Seite am kleinsten ist. Dazu minimiert man die rechte Seite über α (aus dem letzten Semester wissen wir, wie das geht: Wir fassen die rechte Seite also Funktion $f(\alpha)$ auf, leiten nach α ab, setzen gleich Null und lösen auf) und bekommt

$$\alpha = \left(\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{\sum_{k=1}^n y_k^2} \right)^{1/2}$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Satz 2.5 (und Definition). Durch

$$\|x\|_2 := \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2}$$

ist eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ definiert, sie heißt euklidische Norm.

Beweis.

Definitheit: Es gilt $\|x\|_2 = 0$ genau dann, wenn alle Summanden x_k^2 Null sind.

Positive Homogenität: Es gilt

$$\|\lambda x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n \lambda^2 x_k^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\lambda^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{1/2} = |\lambda| \|x\|_2.$$

Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned} \|x + y\|_2^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k^2 + 2x_k y_k + y_k^2) \\ &= \|x\|_2^2 + 2 \sum_{k=1}^n x_k y_k + \|y\|_2^2. \end{aligned}$$

Nach dem Satz des Pythagoras entspricht die euklidische Norm genau der Länge eines Vektors Ebene beziehungsweise dreidimensionalen Raum, welche man mit einem Lineal messen würde.

Wir wenden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung (welche wir schreiben können als $|\sum_{k=1}^n x_k y_k| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$) und bekommen

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + 2\|x\|_2 \|y\|_2 + \|y\|_2^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,$$

woraus die Behauptung folgt. $\square$

Beispiel.

1. Zwei andere Normen auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die Maximumsnorm (oder ∞ -Norm)

$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$$

und die 1-Norm

$$\|x\|_1 := \sum_{k=1}^n |x_k|.$$

Definitheit: Für $\|\cdot\|_\infty$: Es $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = 0$, genau dann, wenn $|x_i| = 0$ für $i = 1, \dots, n$, also genau dann, wenn $x = 0$. Für $\|\cdot\|_1$ ist $\|x\|_1 = 0$ ebenfalls genau dann, wenn jeder Summand $|x_i| = 0$ ist.

Positive Homogenität: Folgt in beiden Fällen sofort aus der Eigenschaft $|\lambda x_i| = |\lambda| |x_i|$.

Dreiecksungleichung: Folgt aus der Dreiecksungleichung für den Betrag und der Eigenschaft $\max(a+b, c+d) \leq \max(a, c) + \max(b, d)$.

Man kann zeigen, dass man für jedes $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

eine Norm, die sogenannte p -Norm, erhält.

2. Ist X eine Menge und $\mathcal{B}(X)$ der Vektorraum aller beschränkten reellwertigen Funktionen auf X , so ist

$$\|f\|_{\sup} := \sup\{|f(x)| \mid x \in X\}$$

eine Norm auf $\mathcal{B}(X)$, genannt die Supremumsnorm.

Um zu zeigen, dass dies wirklich eine Norm ist, ist wortwörtlich wie für $\|\cdot\|_\infty$

3. Auf dem Raum aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ ist

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$

eine Norm, genannt die 1-Norm. Der Beweis ist hier genau wie für den $\mathbb{R}^n$ -Fall der Norm $\|\cdot\|_1$. Wir könnten auf diesem Raum auch die Supremumsnorm definieren. (Aus Analysis 1

wissen wir, dass stetige Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen sowohl beschränkt, als auch Riemann-integrierbar sind.)

Auf eben diesem Vektorraum kann man für $p \geq 1$ durch

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

die sogenannten p -Normen einführen. Dass diese Definitheit und positive Homogenität erfüllen, sieht man schnell, aber der Beweis der Dreiecksungleichung ist nicht so einfach. Für den Fall $p = 2$ kann man analog zum Beweis der Cauchy-Schwarz-Ungleichung beweisen, dass gilt

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)dx \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

und daraus die Dreiecksungleichung schließen.

Auch auf dem Raum der Riemann-integrierbaren Funktionen kann man die Ausdrücke $\|f\|_p$ erklären – warum sind es in diesem Fall keine Normen? (Hinweis: Die Definitheit ist das Problem...)

△

3 Topologische Grundbegriffe

3.1 Offene Mengen in metrischen Räumen

Wir verallgemeinern nun viele Begriffe aus dem ersten Semester auf metrische Räume (damit auch auf normierte Räume wie z.B. den standard euklidischen Raum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$).

Definition 3.1. Es sei (X, d) ein metrischer Raum, $a \in X$ und $r > 0$. Dann ist

$$B_r(a) := \{x \in X \mid d(a, x) < r\}$$

die *offene Kugel* (auch *offener Ball*) um a mit Radius r .

Eine Menge $U \subset X$ heißt *Umgebung* von $x \in X$, wenn es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset U$.

Da $B_\epsilon(x)$ selbst eine Umgebung von x ist, nennt man diese die ϵ -Umgebung von x .

Das Argumentieren mit Umgebungen in metrischen Räumen ist nicht schwer und die Ergebnisse sind meist so, wie man sie sich intuitiv vorstellt.

Satz 3.2 (Hausdorffsche Trennungseigenschaft). Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann gibt es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ disjunkte Umgebungen U und V von x bzw. y , d.h. es gilt $U \cap V = \emptyset$.

Beweis.

Wir zeigen, dass wir $U := B_\epsilon(x)$ und $V = B_\epsilon(y)$ mit einem ϵ , was klein genug ist, nehmen können. Dazu reicht, zum Beispiel, $\epsilon = \frac{1}{3}d(x, y)$ aus: Damit sind die Mengen U und V wirklich disjunkt, denn für ein $z \in U \cap V$ würde dann $z \in B_\epsilon(x)$ und $z \in B_\epsilon(y)$ gelten und nach der Dreiecksungleichung würde gelten

$$3\epsilon = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \leq \epsilon + \epsilon;$$

ein Widerspruch. □

Definition 3.3. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so nennen wir $U \subset X$ *offen*, wenn gilt

$$\forall x \in U \exists \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \subset U.$$

Beispiel.

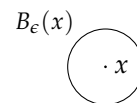
1. Offene Intervalle sind offen: in $\mathbb{R}$ mit $d(x, y) = |x - y|$ ist $U =]a, b[$ offen, denn zu $x \in U$ können wir $\epsilon = \min(|x - a|, |x - b|)$ wählen. Dann gilt $B_\epsilon(x) =]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset U$.

Ebenso sind die Intervalle $]a, \infty[$ und $]-\infty, a[$ offen.

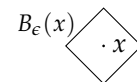
Die Intervalle $[a, b]$, $[a, b[$ und $]a, b]$ sind nicht offen: In den

Für normierte Räume ist der Begriff entsprechend: Es wird die von der Norm induzierte Metrik $d(x, y) = \|x - y\|$ benutzt.

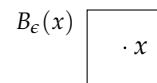
Im $\mathbb{R}^2$ sehen ϵ -Umgebungen für verschiedene Normen wie folgt aus: Für $d_2(x, y) = \|x - y\|_2$:



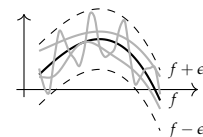
Für $d_1(x, y) = \|x - y\|_1$:



Für $d_\infty(x, y) = \|x - y\|_\infty$:



Man kann sich sogar die ϵ -Umgebung einer stetigen Funktion $f \in C([a, b])$ bezüglich der Supremumsnorm vorstellen: Es sind alle die Funktionen, die in einem offenen " ϵ -Schlauch" um f liegen:



In Worten: In einem metrischen Raum heißt U offen, wenn es zu jedem Punkt in U eine ϵ -Umgebung gibt, welche ganz in U liegt. Anders: Es kann nicht sein, dass es einen Punkt gibt, zu dem jede ϵ -Umgebung auch Punkte außerhalb von U enthält.

Sehr kurz gesagt: Eine Menge U ist offen, wenn U Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Fällen $[a, b]$ und $[a, b[$ gibt es zu a kein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(a)$ ganz in diesen Intervallen liegt.

2. In allgemeinen metrischen Räumen sind offene Kugeln offen: Wir betrachten $U = B_r(a)$ und ein $x \in U$. Dann setzen wir $\epsilon = r - d(x, a)$. Es gilt $\epsilon > 0$, da $d(x, a) < r$. Wir zeigen jetzt, dass $B_\epsilon(x) \subset B_r(a)$ gilt. Sei dazu $y \in B_\epsilon(x)$, d.h. $d(x, y) < \epsilon$. Wir müssen zeigen, dass $d(a, y) < r$ gilt. Das folgt mit der Dreiecksungleichung:

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(x, a) + \epsilon = d(x, a) + r - d(x, a) = r.$$

△

Satz 3.4. Für $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2 \leq n\|x\|_\infty \leq n\|x\|_2 \leq n\|x\|_1$$

und mit den Bezeichnungen

$$B_\epsilon^\infty(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_\infty < \epsilon\}$$

$$B_\epsilon^2(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_2 < \epsilon\}$$

$$B_\epsilon^1(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\|_1 < \epsilon\}$$

folgt

$$B_\epsilon^1(a) \subset B_\epsilon^2(a) \subset B_\epsilon^\infty(a) \subset B_{\sqrt{n}\epsilon}^2(a) \subset B_{n\epsilon}^1(a).$$

Beweis.

Für die erste Ungleichung der Kette benutzen wir die Cauchy-Schwarz Ungleichung für die Vektoren $(|x_k|)_k$ und $(1, \dots, 1)^T$:

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n 1 \cdot |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_2.$$

Für die zweite Ungleichung bemerken wir, dass für alle k gilt $|x_k| \leq \|x\|_\infty$. Daraus folgt

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^n \|x\|_\infty^2 \right)^{1/2} = (n\|x\|_\infty^2)^{1/2} = \sqrt{n}\|x\|_\infty,$$

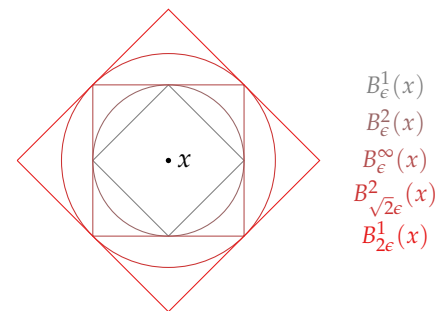
woraus die zweite Ungleichung folgt. Für die dritte Ungleichung bemerken wir, dass es für jedes x einen Index $k_0 \in \{1, \dots, n\}$ gibt, so dass $\|x\|_\infty = |x_{k_0}|$ und daher ist

$$\|x\|_\infty^2 = |x_{k_0}|^2 \leq \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \|x\|_2^2,$$

woraus $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$ folgt. Für die letzte Ungleichung benutzen wir, dass $|x_k| \leq \|x\|_1$ für alle k gilt, und daher $|x_k|/\|x\|_1 \leq 1$. Es folgt

$$1 = \sum_{k=1}^n \frac{|x_k|}{\|x\|_1} \geq \sum_{k=1}^n \left(\frac{|x_k|}{\|x\|_1} \right)^2 = \frac{1}{\|x\|_1^2} \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = \frac{\|x\|_2^2}{\|x\|_1^2}.$$

Im $\mathbb{R}^2$ sehen die Inklusionen der Bälle wie folgt aus:



Die Inklusionen der Bälle folgt direkt aus den Ungleichungen für die Normen: Gilt $x \in B_\epsilon^1(a)$, so ist $\|x - a\|_2 \leq \|x - a\|_1 \leq \epsilon$, also $x \in B_\epsilon^2(a)$. Ebenso folgt $B_\epsilon^2(a) \subset B_\epsilon^\infty(a)$ aus $\|x - a\|_\infty \leq \|x - a\|_2$. Ist $x \in B_\epsilon^\infty(a)$, so ist $\|x - a\|_2 \leq \sqrt{n}\|x - a\|_\infty \leq \sqrt{n}\epsilon$ und daher $x \in B_{\sqrt{n}\epsilon}^2(a)$. Ist schließlich $x \in B_{\sqrt{n}\epsilon}^2(a)$, so ist $\|x - a\|_1 \leq \sqrt{n}\|x - a\|_2 \leq n\epsilon$, also $x \in B_{n\epsilon}^1(a)$. $\square$

Korollar 3.5. Eine Menge im $\mathbb{R}^n$ ist offen bezüglich der ∞ -Norm, genau dann, wenn sie offen bezüglich der 2-Norm oder auch offen bezüglich der 1-Norm ist.

Satz 3.6. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so gilt:

- Die Mengen $\emptyset$ und X sind offen.
- Sind $U_1, \dots, U_N$ offen, so ist auch der Schnitt $\bigcap_{i=1}^N U_i$ offen.
- Ist I eine beliebige Index-Menge und $U_i, i \in I$ eine Familie von offenen Mengen, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$ offen.

Beweis.

- X ist offen, da X Umgebung jedes $x \in X$ ist. Die Menge $\emptyset$ ist offen, da es gar keinen Punkt x in $\emptyset$ gibt, und daher die Bedingung trivialerweise (mangels Kandidaten) erfüllt ist.
- Es seien $U_1, \dots, U_N$ offen und $x \in \bigcap_{i=1}^N U_i$, d.h. $x \in U_i$ für alle i . Da die U_i offen sind, existieren $\epsilon_i, i = 1, \dots, N$, so dass $B_{\epsilon_i}(x) \subset U_i$. Wir setzen nun $\epsilon = \min(\epsilon_1, \dots, \epsilon_N)$ da $\epsilon \leq \epsilon_i$ für alle i gilt, folgt $B_\epsilon(x) \subset U_i$ für alle i . Das aber bedeutet $B_\epsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^N U_i$ wie gefordert.
- Es sei $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, d.h. es gibt ein $j \in I$, so dass $x \in U_j$. Da U_j offen ist, gibt es $\epsilon > 0$ mit $B_\epsilon(x) \subset U_j \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

$\square$

Definition 3.7. Eine Menge A in einem metrischen Raum (X, d) heißt *abgeschlossen*, wenn das Komplement $A^c := X \setminus A$ offen ist.

Beispiel.

- Die Intervalle $[a, b]$ sind auch in diesem Sinne abgeschlossen, denn die Komplemente $\mathbb{R} \setminus [a, b] =]-\infty, a[\cup]b, \infty[$ sind Vereinigung von zwei offenen Mengen und damit selbst offen.
- Die Mengen $]a, b]$ und $[a, b[$ sind weder offen, noch abgeschlossen (diese Intervalle heißen ja auch "halboffen").
- Die Mengen X und $\emptyset$ sind in jedem metrischen Raum sowohl offen als auch abgeschlossen (denn es gilt $X^c = \emptyset$ und $\emptyset^c = X$)

Merke: Die Normen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ erzeugen alle genau den gleichen Begriff "offene Menge", obwohl die Normen selbst verschieden sind. Auch der Begriff "Umgebung" ist im $\mathbb{R}^n$ unabhängig von der gewählten Norm.

Merke: Endliche Schnitte offener Mengen sind offen, beliebige Vereinigungen offener Mengen sind offen.

Machen Sie sich klar, warum die Aussage b) nicht für beliebig viele (insbesondere abzählbar viele) offene Mengen nicht gilt. Schauen Sie dazu einerseits, warum der Beweis in diesem Fall nicht funktioniert und betrachten Sie andererseits das Beispiel der Mengen $U_i =]-1 - \frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}[$, $i \in \{1, 2, \dots\}$.



3.2 Topologische Räume

Man kann die Begriffe “offen”, “abgeschlossen” und “Umgebung” sogar in einem noch abstrakteren Rahmen behandeln, indem man die bisher gezeigten Eigenschaften von offenen Mengen als Definition nimmt:

Definition 3.8. Es sei X eine Menge. Eine Menge τ von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X , wenn gilt

- a) $\emptyset, X \in \tau$,
- b) sind $U, V \in \tau$, so ist auch $U \cap V \in \tau$,
- c) ist I eine Indexmenge und sind $U_i \in \tau$ für alle $i \in I$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$.

Mit anderen Worten: τ ist eine Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(X)$, welche abgeschlossen bezüglich Schnittbildung und der Bildung von beliebigen Vereinigungen ist.

Das Paar (X, τ) nennen wir dann *topologischen Raum*. Außerdem nennen wir $U \subset X$ *offen*, wenn $U \in \tau$ und $A \subset X$ *abgeschlossen*, wenn A^c offen ist.

Beispiel.

1. Auf jeder Menge gibt es zwei bestimmte (langweilige) Topologien:
 - (a) Die Topologie $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$. Das ist die “kleinstmögliche” (man sagt auch *gröbste*) Topologie - keine andere Topologie auf X kann weniger Mengen haben.
 - (b) Die Topologie $\tau_1 = \mathfrak{P}(X)$. Das ist die “größtmögliche” (man sagt auch *feinste*) Topologie.
2. Ist (X, d) ein metrischer Raum, so können wir $\tau = \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$ setzen (wobei “offen” in der Mengenklammer im Sinne von Definition 3.3 zu verstehen ist) und erhalten einen topologischen Raum (folgt aus Satz 3.6). Man nennt diese Topologie τ die “von der Metrik d erzeugte oder induzierte Topologie”. In diesem Sinne ist jeder metrische Raum (und damit auch jeder normierte Raum) in natürlicher Weise auch ein topologischer Raum.
3. Nach Korollar 3.5 sind die offenen Mengen bezüglich der 1-, 2- und ∞ -Norm im $\mathbb{R}^n$ die gleichen. Man sagt: Die 1-Norm, die 2-Norm und die ∞ -Norm *erzeugen die gleiche Topologie* (obwohl sie und die zugehörigen induzierten Metriken jeweils verschieden sind), und diese Topologie nennen wir *Standard-Topologie* auf $\mathbb{R}^n$.



Definition 3.9 (und Satz). Ist (X, τ_X) ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist

$$\tau_Y := \{U \cap Y \mid U \in \tau_X\}$$

eine Topologie auf Y , man nennt sie die *Relativ-Topologie* oder *induzierte Topologie*.

Definition 3.10. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $x \in X$, so heißt $V \subset X$ eine *Umgebung* von x , falls es eine offene Menge $U \in \tau$ gibt, so dass $x \in U \subset V$.

Satz 3.11. Eine Menge V in einem topologischen Raum ist genau dann offen, wenn sie Umgebung jedes ihrer Punkte ist.

Beweis.

Ist V offen, ist V per Definition 3.10 Umgebung jedes ihrer Punkte.

Ist V Umgebung jedes Punktes $x \in V$, so gibt es zu jedem $x \in V$ eine offene Menge U_x (d.h. $U_x \in \tau$), mit $x \in U_x \subset V$. Vereinigen wir alle diese U_x , so bekommen wir $\bigcup_{x \in V} U_x = V$, was wieder eine offene Menge ist, da beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen sind. $\square$

Definition 3.12. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so heißt $x \in X$ ein *Randpunkt* von Y , wenn in jeder Umgebung von x sowohl ein Punkt aus Y als auch aus Y^c liegt. Die Menge

$$\partial Y := \{x \in X \mid x \text{ Randpunkt von } Y\}$$

heißt *Rand* von Y .

Schaut man einmal auf die Definition sieht man sofort, dass x genau dann ein Randpunkt von Y ist, wenn es Randpunkt von Y^c ist und daher gilt

$$\partial Y = \partial(Y^c).$$

Beispiel.

1. In $\mathbb{R}$ mit der Standard-Topologie (also die, die durch die Norm $|\cdot|$, bzw. durch die Metrik $d(x, y) = |x - y|$ induziert ist) haben alle die Intervalle

$$[a, b],]a, b[, [a, b[,]a, b]$$

den Rand $\{a, b\}$. Die Intervalle $[a, \infty[,]a, \infty[,]-\infty, a]$ und $] -\infty, a[$ haben den Rand $\{a\}$.

2. Im $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie (also die, die durch irgendeine der Normen $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{1/2/\infty}$ induziert wird) hat die Einheitskugel

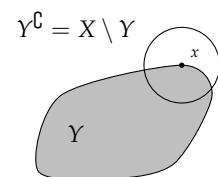
$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$$

die *Einheitssphäre* als Rand

$$\partial K = S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 = 1\}.$$

Dass das eine Topologie ergibt, sieht man schnell: Wegen $Y = X \cap Y$ und $\emptyset = \emptyset \cap Y$ sind $\emptyset, Y \in \tau_Y$. Sind $U, V \in \tau_Y$, dann gilt $U = \tilde{U} \cap Y$ und $V = \tilde{V} \cap Y$ mit $\tilde{U}, \tilde{V} \in \tau_X$. Dann ist $U \cap V = (\tilde{U} \cap Y) \cap (\tilde{V} \cap Y) = (\tilde{U} \cap \tilde{V}) \cap Y$ und also $U \cap V \in \tau_Y$. Für $U_i \in \tau_Y$ ist $U_i = \tilde{U}_i \cap Y$ mit $\tilde{U}_i \in \tau_X$. Dann ist $\bigcup_i U_i = \bigcup_i (\tilde{U}_i \cap Y) = (\bigcup_i \tilde{U}_i) \cap Y$, und also ist $\bigcup_i U_i \in \tau_Y$.

Da ϵ -Umgebungen in metrischen Räumen offen sind, ist diese Definition im Fall von metrischen Räumen äquivalent zu Definition 3.1.



Mit anderen Worten: Eine Menge und ihr Komplement haben den gleichen Rand.

3. Der Rand von $\mathbb{Q}$ ist $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$, denn jede Umgebung jedes $x \in \mathbb{R}$ enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

△

Satz 3.13. In einem topologischen Raum (X, τ) gilt für jedes $Y \subset X$:

- a) Die Menge $Y \setminus \partial Y$ ist offen.
- b) Die Menge $Y \cup \partial Y$ ist abgeschlossen.
- c) Der Rand ∂Y ist abgeschlossen.

Beweis.

- a) Es sei $a \in Y \setminus \partial Y$. Da a dann kein Randpunkt ist, gibt es eine Umgebung V von a , so dass $V \cap Y^c = \emptyset$. Für dieses V gilt dann auch $V \cap \partial Y = \emptyset$: Gäbe es nämlich ein $y \in V \cap \partial Y$, so wäre dies y ein Randpunkt von Y und außerdem V eine Umgebung von y . Folglich müsste es einen Punkt in Y^c geben, der auch in V liegt, was aber unserer Annahme $V \cap Y^c = \emptyset$ widerspricht. Wir haben also $V \subset Y \setminus \partial Y$, was zeigt, dass $Y \setminus \partial Y$ offen ist.

- b) Da $\partial Y = \partial(Y^c)$ gilt, und da $Y^c \setminus \partial(Y^c)$ offen ist, ist das Komplement dieser Menge abgeschlossen. Dies ist aber gerade (da allgemein $(A \setminus B)^c = X \setminus (A \setminus B) = A^c \cup B$ gilt) die Menge

$$(Y^c \setminus (\partial Y^c))^c = (Y^c)^c \cup \partial(Y^c) = Y \cup \partial Y.$$

- c) Da allgemein $B = (A \cup B) \setminus (A \setminus B)$ gilt, gilt auch $\partial Y = (Y \cup \partial Y) \setminus (Y \setminus \partial Y)$ und daher $(\partial Y)^c = (Y \cup \partial Y)^c \cup (Y \setminus \partial Y)$ was nach a) und b) offen ist. Daher ist ∂Y abgeschlossen.

□

Definition 3.14. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so heißt

$$Y^\circ := Y \setminus \partial Y$$

das *Innere* oder der *offene Kern* von Y , und

$$\bar{Y} := Y \cup \partial Y$$

der *Abschluss* oder die *abgeschlossene Hülle* von Y .

4 Grenzwerte in topologischen und metrischen Räumen

4.1 Konvergenz

In diesem Abschnitt wiederholen wir den Begriff des Grenzwertes, nun aber in topologischen und metrischen Räumen.

Definition 4.1.

1. Ist (X, τ) ein topologischer Raum und $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X , so konvergiert (x_k) gegen $a \in X$, falls es zu jeder Umgebung U von a ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $k \geq N$ immer $x_k \in U$ gilt.
2. In einem metrischen Raum (X, d) gilt: (x_k) konvergiert gegen a , falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $k \geq N$ immer $d(x_k, a) < \epsilon$ gilt.

Mit anderen Worten: Jede Umgebung des Grenzwertes enthält fast alle Folgenglieder.

Im Fall von metrischen Räumen sind beide Definitionen äquivalent, da in jeder Umgebung immer eine ϵ -Umgebung enthalten ist. Wegen Korollar 3.5 kommt es im $\mathbb{R}^n$ für Konvergenz nicht darauf, welche unserer Normen verwendet wird.

In beiden Fällen schreiben wir $a = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ oder $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$.

In einem metrischen Raum (X, d) gilt

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \iff d(x_k, a) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

(wobei der letzte Konvergenzpfad die aus der Analysis 1 bekannte Konvergenz in den reellen Zahlen ist). In einem normierten Raum gilt entsprechend

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \iff \|x_k - a\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Im $\mathbb{R}^n$ mit der Standard-Topologie gilt:

Satz 4.2. Ist $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$ mit

$$x_k = \begin{pmatrix} x_{k1} \\ \vdots \\ x_{kn} \end{pmatrix} = (x_{k1} \quad \cdots \quad x_{kn})^T$$

so gilt: (x_k) konvergiert gegen $a = (a_1 \quad \cdots \quad a_n)^T$, genau dann, wenn für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{kj} = a_j.$$

Mit anderen Worten: Eine Folge (x_k) in $\mathbb{R}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie *komponentenweise* konvergiert.

Beweis.

Es gelte $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein N , so dass für $k \geq N$ immer $\|x_k - a\| < \epsilon$ gilt (und zwar für jede der drei Normen, obwohl das K dann jeweils unterschiedlich sein könnte). Es gilt (für alle diese Normen) für $j \in \{1, \dots, n\}$ immer $|x_{kj} - a_j| \leq \|x_k - a\|$ und daher ist für $k \geq N$ immer $|x_{kj} - a_j| < \epsilon$. Dies

zeigt die komponentenweise Konvergenz.

Gelte umgekehrt $x_{kj} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_j$ für alle j . Dann gibt es für jedes $\epsilon > 0$ und jedes j ein N_j , so dass für $k \geq N_j$ gilt $|x_{kj} - a_j| < \epsilon$. Dann gilt für $k \geq \max(N_1, \dots, N_n)$ immer

$$\|x_k - a\|_\infty = \max\{|x_{kj} - a_j| \mid j = 1, \dots, n\} < \epsilon$$

und das zeigt $\|x_k - a\|_\infty \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ □

Satz 4.3. Eine Folge (f_n) von stetigen Funktionen auf einem Intervall $[a, b]$ konvergiert in $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\sup})$ gegen eine Funktion f genau dann, wenn sie gleichmäßig gegen diese Funktion konvergiert.

Beweis.

Wir bemerken, dass

$$\|f_n - f\|_{\sup} < \epsilon \iff \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned} f_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ glm.} \\ \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \\ \iff \forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \|f_n(x) - f(x)\|_{\sup} < \epsilon \\ \iff \|f_n - f\|_{\sup} \rightarrow 0 \\ \iff f_n &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ bzgl. } \|\cdot\|_{\sup}. \end{aligned}$$

□

Satz 4.4. Ist (X, d) ein metrischer Raum so gilt: $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn für jede konvergente Folge (x_k) mit $x_k \in A$ gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \in A$.

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei A abgeschlossen und $x_k \in A$ mit $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$. Wäre $x \notin A$, dann wäre x in der offenen Menge A^c , insbesondere wäre A^c eine Umgebung von x . Daher wären fast alle Folgenglieder in A^c was ein Widerspruch zu $x_k \in A$ ist.

$\Leftarrow$: Sei das Kriterium über Folgen erfüllt. Zu zeigen ist, dass A abgeschlossen ist. Dazu können wir zeigen, dass A^c offen ist. Sei $x \in A^c$ und wir wollen zeigen, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $B_\epsilon(x) \subset A^c$ gilt. Gäbe es dieses ϵ nicht, so würde es zu $\epsilon_k = 1/k$ ein $x_k \in A$ geben, so dass $d(x_k, x) < \epsilon_k = 1/k$. Das aber heißt $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ und nach unserer Voraussetzung müsste dann $x \in A$ gelten, was aber ein Widerspruch zu $x \in A^c$ ist.

□

Mit anderen Worten: Ein Menge in einem metrischen Raum ist genau dann abgeschlossen, wenn Grenzwerte von Folgen in der Menge wieder in der Menge liegen.

In topologischen Räumen muss das nicht gelten, aber solche Beispiele kommen in dieser Vorlesung nicht vor.

4.2 Vollständigkeit

Definition 4.5. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge (x_k) in X heißt *Cauchy-Folge*, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $k, j > N$ immer $d(x_k, x_j) < \epsilon$ gilt.

Vollständig analog zur Analysis 1 beweist man, dass in einem metrischen Raum jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.

Definition 4.6. Ein metrischer Raum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in dem Raum konvergiert.

Ein vollständiger normierter Raum heißt *Banach-Raum*.

Wir zeigen nun, dass sowohl der $\mathbb{R}^n$ mit jeder der Normen, die wir bisher kennen als auch der Raum $C([a, b])$ der stetigen Funktionen versehen mit der Supremumsnorm Banach-Räume sind:

Satz 4.7. Im $\mathbb{R}^n$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Beweis.

Ist $x_k = (x_{k1} \ \cdots \ x_{kn})^T \in \mathbb{R}^n$ eine Cauchy-Folge (bezüglich irgendeiner unserer Normen), so ist wegen

$$|x_{kj} - x_{mj}| \leq \|x_k - x_m\|_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}$$

jede Komponentenfolge $(x_{kj})_{k \in \mathbb{N}}, j \in \{1, \dots, n\}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ vollständig ist (was wir aus der Analysis 1 wissen), sind alle Komponentenfolgen konvergent, und nach Satz 4.2 ist damit die Folge (x_k) im $\mathbb{R}^n$ konvergent. $\square$

Korollar 4.8. Der $\mathbb{R}^n$ ist bezüglich der 1-, der 2- und der ∞ -Norm ein Banach-Raum.

Satz 4.9. Der Raum $(C([a, b]), \|\cdot\|_{\sup})$ ist ein Banach-Raum.

Beweis. Es sei (f_n) eine Cauchy-Folge in $C([a, b])$ bezüglich der Supremumsnorm. Wir müssen zeigen, dass dann (f_n) in der Supremumsnorm gegen eine Funktion konvergiert, und dass diese Funktion stetig ist. Dabei ist der letzte Schritt nach Satz 1.3 klar: Konvergiert (f_n) in der Supremumsnorm gegen eine Funktion f , so konvergiert (f_n) nach Satz 4.3 auch gleichmäßig gegen f und nach Satz 1.3 ist f stetig, also $f \in C([a, b])$.

Wir müssen also noch zeigen, dass es eine Grenzfunktion f gibt, und dass f auch in der Supremumsnorm dagegen konvergiert.

1. Zeigen wir die Existenz einer geeigneten Grenzfunktion: Für jedes $x \in [a, b]$ gilt $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_{\sup}$. Daher sind alle Folgen $(f_n(x))$ Cauchy-Folgen (in den reellen Zahlen) und daher konvergent. D.h. wir können für jedes x eine Funktion f durch

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

definieren.

2. Zeigen wir, dass (f_n) in der Supremumsnorm gegen f konvergiert: Sei $\epsilon > 0$. Da (f_n) eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ ist, gibt es ein N , so dass für $n, m \geq N$ immer

$$\|f_m - f_n\|_{\text{sup}} < \epsilon$$

gilt. Aus $f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x)$ folgt damit

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m \rightarrow \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_{\text{sup}} \leq \epsilon$$

für jedes x . Bilden wir in dieser Ungleichung auf der linken Seite das Supremum über $x \in [a, b]$, so bekommen wir

$$\|f_n - f\|_{\text{sup}} \leq \epsilon$$

was für alle $n \geq N$ gilt. Das bedeutet aber, dass (f_n) in der Supremumsnorm gegen f konvergiert.

□

Definition 4.10. Ist A eine Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) , so ist der Durchmesser von A definiert als

$$\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}.$$

Die Menge A heißt *beschränkt*, wenn $\text{diam}(A) < \infty$.

Lemma 4.11. Gibt es für eine Menge A ein $a \in X$ und ein $r > 0$, so dass $A \subset B_r(a)$, so gilt $\text{diam}(A) \leq 2r$ und insbesondere ist A beschränkt.

Beweis.

Für $A \subset B$ gilt immer $\text{diam}(A) \leq \text{diam}(B)$ und $\text{diam}(B_r(a)) \leq 2r$ folgt da für $x, y \in B_r(a)$ immer gilt $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq 2r$. □

In vollständigen metrischen Räumen gilt ein Analogon zum Intervallschachtelungsprinzip:

Satz 4.12. Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, und

$$A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$$

eine absteigende Folge von nichtleeren und abgeschlossenen Mengen mit

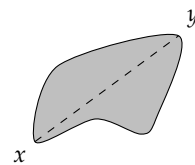
$$\text{diam}(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0,$$

so gibt es genau ein $x \in X$ mit $x \in A_k$ für alle k .

Beweis.

Zeigen wir zuerst die Eindeutigkeit: Sind x, y in allen A_k , so gilt $0 \leq d(x, y) \leq \text{diam}(A_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, woraus $d(x, y) = 0$ und (nach der Definitheit einer Metrik) $x = y$ folgt.

Zeigen wir Existenz: Zu jedem n wählen wir ein $x_n \in A_n$. Dann ist $x_m \in A_n$ für $m \geq n$ und also gilt $d(x_n, x_m) \leq \text{diam}(A_n)$ für



Anders gesagt: Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt, dass die Menge $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$ genau ein Element enthält.

alle $n, m \geq N$. Das bedeutet aber, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist, welche gegen ein $x \in X$ konvergiert. Da jedes A_k abgeschlossen ist, gilt nach Satz 4.4 auch $x \in A_k$ für jedes k . $\square$

5 Stetige Abbildungen

5.1 Stetigkeit in metrischen Räumen

Auch derxs Begriff der Stetigkeit verallgemeinert sich direkt auf Abbildungen zwischen metrischen Räumen:

Definition 5.1. Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume, so heißt $f : X \rightarrow Y$ *stetig* in $a \in X$, wenn

$$x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a \implies f(x_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(a)$$

gilt. Die Abbildung f heißt stetig, wenn sie in jedem $x \in X$ stetig ist.

Satz 5.2. Sind $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen zwischen metrischen Räumen, f stetig in a und g stetig in $b := f(a)$, so ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ stetig in a .

Beweis.

Gelte $x_n \rightarrow a$, so gilt $f(x_n) \rightarrow f(a) = b$ und also $g(f(x_n)) \rightarrow g(b) = g(f(a))$. $\square$

Direkt aus Satz 4.2 folgt:

Korollar 5.3. Ist X ein metrischer Raum, so ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ genau dann stetig, wenn die Komponentenfunktionen $f_1, \dots, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

stetig sind.

Satz 5.4. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{add} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto x + y, \\ \text{mult} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto xy, \\ \text{quot} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R}, & (x, y) &\mapsto xy^{-1} \end{aligned}$$

sind stetig.

Beweis.

Dies sind im wesentlichen Umformulierungen der bekannten Grenzwertsätze: Gilt nämlich $(x_k, y_k) \rightarrow (x, y)$ in $\mathbb{R}^2$, so gilt $x_k \rightarrow x$ und $y_k \rightarrow y$ und es folgt $x_k + y_k \rightarrow x + y$, $x_k y_k \rightarrow xy$ und (falls $y \neq 0$) auch $x_k y_k^{-1} \rightarrow xy^{-1}$. $\square$

Es folgt durch wiederholte Anwendung dieses Satzes, dass Monome, d.h. Abbildungen

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

mit $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$ stetig sind.

Auch das ϵ - δ -Kriterium ist für metrische Räume genau wie vorher:

Satz 5.5. Für eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ zwischen metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) gilt: f ist in $a \in X$ genau dann stetig, wenn gilt

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : d_X(x, a) < \delta \implies d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon.$$

Beweis.

$\Rightarrow$: Sei f in a stetig, d.h. aus $x_k \rightarrow a$ folgt immer $f(x_k) \rightarrow f(a)$.

Nehmen wir an, dass das ϵ - δ -Kriterium nicht erfüllt ist. Das heißt, wir nehmen an, es gäbe ein $\epsilon > 0$, so dass für jedes $\delta > 0$ ein x existiert, so dass zwar $d_X(x, a) < \delta$, aber $d_Y(f(x), f(a)) \geq \epsilon$. Wir können also zu $\delta_n = 1/n$ ein $x_n \in X$ finden, so dass $d_X(x_n, a) < \delta_n = 1/n$ gilt, aber $d_Y(f(x_n), f(a)) \geq \epsilon$. Dann folgt $x_n \rightarrow a$ aber $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$; ein Widerspruch.

$\Leftarrow$: Gelte das ϵ - δ -Kriterium und sei (x_n) eine Folge in X , welche gegen a konvergiert. Wir müssen zeigen, dass $f(x_n)$ gegen $f(a)$ konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$. Zu diesem ϵ existiert also ein $\delta > 0$, sodass aus $d_X(x, a) < \delta$ immer $d_Y(f(x), f(a)) < \epsilon$ folgt. Da $x_n \rightarrow a$ gilt, gibt es ein N , so dass für $n \geq N$ immer $d_X(x_n, a) < \delta$ gilt. Dann gilt aber auch (nach ϵ - δ -Kriterium) $d_Y(f(x_n), f(a)) < \epsilon$ für $n \geq N$. Das zeigt $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

□

Beispiel.

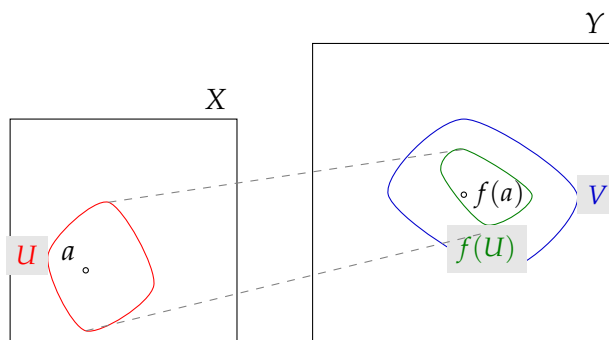
Ist (X, d) ein metrischer Raum und $x_0 \in X$. Dann ist die Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := d(x, x_0)$ stetig in jedem $a \in X$. Wir zeigen das mit dem ϵ - δ -Kriterium: Sei also $\epsilon > 0$. Wir setzen $\delta = \epsilon$ und rechnen: Ist $d(x, a) < \delta$, so ist nach der inversen Dreiecksungleichung

$$|f(x) - f(a)| = |d(x, x_0) - d(a, x_0)| \leq d(x, a) < \delta = \epsilon.$$

△

Mit Hilfe des Begriffes der Umgebung können wir die ϵ - δ -Definition der Stetigkeit anders schreiben:

Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist stetig in $a \in X$, falls es zu jeder Umgebung V von $f(a)$ eine Umgebung U von a gibt, so dass $f(U) \subset V$ ist.



5.2 Stetigkeit in topologischen Räumen

Die Erkenntnis aus der letzten Bemerkung erlaubt es uns, eine weitere Formulierung des Begriffes der Stetigkeit anzugeben, welche auch in topologischen Räumen formuliert werden kann:

Satz 5.6. Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn das Urbild $f^{-1}(V)$ einer jeden offenen Mengen $V \subset Y$ wieder offen in X ist.

Beweis.

Sei zuerst f stetig und V offen in Y . Wir müssen zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Sei dazu $a \in f^{-1}(V)$. Da dann $f(a) \in V$ ist, ist V eine Umgebung von $f(a)$. Also gibt es eine Umgebung U von a , so dass $f(U) \subset V$ gilt. Das aber bedeutet $U \subset f^{-1}(V)$. Also ist $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von a und das bedeutet, dass $f^{-1}(V)$ Umgebung jedes seiner Punkte ist. Daher ist $f^{-1}(V)$ offen.

Sei umgekehrt das Urbild jeder offenen Menge wieder offen, $a \in X$ und sei V eine Umgebung von $f(a)$. Dann gibt es eine offene Menge $V_1 \subset V$ mit $f(a) \in V_1$. Dann ist $U := f^{-1}(V_1)$ offen, es gilt $a \in U$ und außerdem ist $f(U) \subset V$, was die Stetigkeit von f in a zeigt. Da a beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel.

Ist X ein metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so sind die Mengen

$$U = \{x \in X \mid f(x) < c\} = f^{-1}(]-\infty, c[)$$

offen und die Mengen

$$A = \{x \in X \mid f(x) = c\} = f^{-1}(\{c\})$$

abgeschlossen. Was ist mit den Mengen $\{x \in X \mid f(x) \leq c\}$? $\triangle$

Definition 5.7. Zwei metrische Räume X und Y heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive und stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ gibt, deren Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig ist. Eine solche Abbildung heißt *Homöomorphismus*.

Beispiel.

Die offene Einheitskugel

$$B := B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1\}$$

ist homöomorph zu $\mathbb{R}^n$: Durch die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow B, x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|_2}$$

ist ein Homöomorphismus gegeben. (Im Fall von $n = 1$ bedeutet das, dass das Intervall $] -1, 1[$ und $\mathbb{R}$ homöomorph sind und dass $x \mapsto x/(1 + |x|)$ ein Homöomorphismus von $\mathbb{R}$ nach $] -1, 1[$ ist.) Die Stetigkeit von f ist klar, da die Abbildung $x \mapsto 1 + \|x\|_2$

Diese Charakterisierung benutzt nur noch den Begriff der offenen Menge und daher wird eine Abbildung zwischen topologischen Räumen als stetig definiert, wenn die Urbilder offener Mengen immer offen sind.

Die abgeschlossenen Mengen sind genau die Komplemente der offenen Mengen. Daher ist eine Abbildung ebenfalls genau dann stetig, wenn Urbilder von abgeschlossenen Mengen wieder abgeschlossen sind.

Der Begriff ist wortwörtlich der gleiche für topologische Räume.

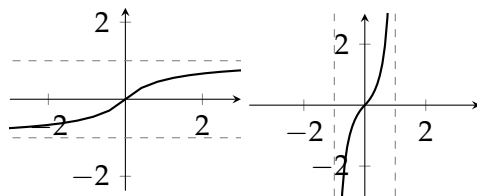
Die Relation "X homöomorph zu Y" ist übrigens eine Äquivalenzrelation.

stetig und nicht Null ist. Die Umkehrbarkeit folgt daraus, dass die Abbildung

$$g : B \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto \frac{x}{1 - \|x\|_2}$$

eine Umkehrabbildung ist (was man durch Einsetzen einfach nachrechnet) und die Stetigkeit von g folgt wie eben (bemerke, dass für $x \in B$ immer $1 - \|x\| \neq 0$ gilt).

Hier die Graphen der Funktionen f (links) und f^{-1} (rechts) für $n = 1$.



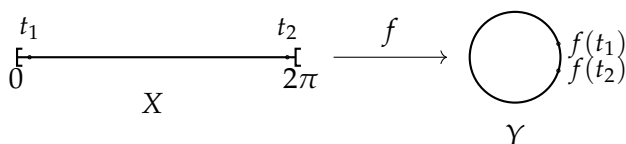
△

Beispiel.

Wir betrachten die metrischen Räume $X = [0, 2\pi[$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}$, also mit dem Absolutbetrag als Metrik) und $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ (als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, also mit der von der 2-Norm induzierten Metrik).

Wir betrachten die Abbildung

$$f : X \rightarrow Y, f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$



Diese Abbildung ist stetig und auch bijektiv. Sie hat aber keine stetige Umkehrabbildung. Intuitiv sieht man das daran, dass die Punkte $f(t_1)$ und $f(t_2)$ im obigen Bild nah beieinander sind, die Punkte t_1 und t_2 jedoch weit voneinander entfernt. Formal zeigt man die Unstetigkeit von f^{-1} so: Wir betrachten die Folge

$$p_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi - \frac{1}{k}) \\ \sin(2\pi - \frac{1}{k}) \end{pmatrix} \in Y.$$

Es gilt $p_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \cos(2\pi) \\ \sin(2\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = f(0)$, aber

$$f^{-1}(p_k) = 2\pi - \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2\pi \neq 0 = f^{-1}(1, 0) = f^{-1}(\lim_{k \rightarrow \infty} p_k).$$

In Abschnitt 7 werden wir sehen, dass es überhaupt keinen Homöomorphismus zwischen X und Y gibt. △

6 Funktionenfolgen und lineare Abbildungen

6.1 Noch einmal gleichmäßige Konvergenz

Wir hatten Folgen von Funktionen schon im Abschnitt über Potenzreihen kennengelernt. Nun betrachten wir das Thema noch einmal abstrakter mit den neuen Begriffen:

Definition 6.1. Es sei X eine beliebige Menge und (Y, d_Y) ein metrischer Raum. Dann heißt eine Folge (f_n) von Abbildungen $f_n : X \rightarrow Y$ *punktweise konvergent* gegen $f : X \rightarrow Y$, falls

$$\forall x \in X, \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Die Folge (f_n) heißt *gleichmäßig konvergent* gegen $f : X \rightarrow Y$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N, x \in X : d_Y(f_n(x), f(x)) < \epsilon.$$

Wir schreiben wiederum

$$f_n \xrightarrow{\text{p.w.}} f, \quad f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$$

für punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz.

Den folgenden Satz haben wir schon einmal im Fall von reellen Funktionen auf Intervallen gesehen (Satz 4.3).

Satz 6.2. Es sei X eine beliebige Menge und bezeichne $\mathbb{K}$ die reellen oder komplexen Zahlen. Wir versehen den Vektorraum

$$\mathcal{B}(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ beschränkt}\}$$

mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ aus Abschnitt 2. Dann gilt für eine Folge (f_n) in $\mathcal{B}(X)$:

$$f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f \iff \|f_n - f\|_{\text{sup}} \rightarrow 0.$$

Beweis.

$\Rightarrow$: Gelte $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$ und sei $\epsilon > 0$. Dann existiert ein N , so dass für $n \geq N$ und alle $x \in X$ die Ungleichung $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Da diese für alle x gilt, bleibt die Ungleichung richtig, wenn wir links das Supremum über x bilden und das zeigt: Für $n \geq N$ gilt $\|f_n - f\|_{\text{sup}} = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in X\} < \epsilon$. Also folgt $\|f_n - f\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$.

$\Leftarrow$: Gelte $\|f_n - f\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$ und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein N , so dass für $n \geq N$ gilt, dass $\|f_n - f\|_{\text{sup}} < \epsilon$. Das aber bedeutet, dass für $n \geq N$ und alle $x \in X$ gilt

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \mid x \in X = \|f_n - f\|_{\text{sup}} < \epsilon.$$

was $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$ zeigt.

□

Auch in dieser Allgemeinheit gilt, dass Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz erhalten bleibt:

Satz 6.3. Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f_n : X \rightarrow Y$ eine Folge von stetigen Funktionen mit $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$. Dann ist auch f stetig.

Der Beweis ist vollständig analog zum Beweis von Satz 1.3.

Beweis.

Es sei $a \in X$ und wir zeigen, dass f in a stetig ist. Sei dazu $\epsilon > 0$.

Aus $f_n \xrightarrow{\text{glm.}} f$ folgt, dass es ein N gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$d_Y(f_N(x), f(x)) < \epsilon/3 \quad (*)$$

(insbesondere auch für $x = a$). Da f_N in a stetig ist, gibt es ein δ , so dass für $d_X(x, a) < \delta$ gilt

$$d_Y(f_N(x), f_N(a)) < \epsilon/3. \quad (**)$$

Wir nutzen nun $(*)$, $(**)$ und die Dreiecksungleichung und bekommen, dass für $d_X(x, a)$ immer gilt

$$\begin{aligned} d_Y(f(x), f(a)) &\leq d_Y(f(x), f_N(x)) + d_Y(f_N(x), f_N(a)) + d_Y(f_N(a), f(a)) \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

□

Für reelle Funktionen gibt es verschiedenen Normen, die tatsächlich verschiedenen Konvergenz-Begriffe ergeben:

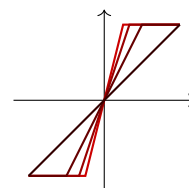
Beispiel.

Für $I = [-1, 1]$ betrachten wir auf der Menge $C(I)$ wir die beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx, \quad \|f\|_{\text{sup}} = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

Wir definieren die Funktionenfolge

$$f_n(x) := \max(-1, \min(nx, 1)) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx, & -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$



Diese Folge konvergiert

- punktweise gegen die Funktion

$$f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1, & -1 \leq x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

- *nicht* bezüglich der sup-Norm: Da die f_n stetig sind, müsste f dann (wenn $f_n \rightarrow f$ glm. gelten würde) nach Satz 1.3 wieder stetig sein, was aber nicht stimmt. Alternativ kann man

sich auch davon überzeugen, dass (f_n) keine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{\sup}$ ist (es gilt zum Beispiel $\|f_{2n} - f_n\|_{\sup} = \frac{1}{2}$).

- auch in der 1-Norm gegen f , denn es gilt

$$\|f_n - f\|_1 = \int_{-1}^1 |f_n(x) - f(x)| dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |1 - nx| dx = \frac{1}{n}.$$

△

6.2 Lineare Abbildungen

Untersuchen wir nun lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen auf Stetigkeit:

Satz 6.4 (und Definition). *Es seien $(V, \|\cdot\|_V)$ und $(W, \|\cdot\|_W)$ normierte Räume (über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) und sei $A : V \rightarrow W$ linear. Dann gilt:*

- a) *A ist genau dann stetig, wenn es ein $C \geq 0$ gibt, so dass für alle $x \in V$ gilt*

$$\|Ax\|_W \leq C\|x\|_V.$$

- b) *Die Menge $L(V, W) := \{A : V \rightarrow W \mid A \text{ linear und stetig}\}$ ist ein Vektorraum und*

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}$$

ist eine Norm auf diesem Raum. Außerdem gilt $\|Ax\|_W \leq \|A\|\|x\|_V$. Diese Norm nennt man die von $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ induzierte Operatornorm.

Beweis.

- a) Es sei A stetig. Dann ist A im Nullpunkt $x = 0$ stetig, und das heißt, dass es zu $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für $\|z\|_V = \|z - 0\|_V < \delta$ immer $\|Az\|_W = \|Az - A0\|_W < 1$ gilt. Wir zeigen, dass die geforderte Ungleichung mit $C = 2/\delta$ gilt: Für $x \neq 0$ setzen wir $\lambda := 1/(C\|x\|_V)$ und $z = \lambda x$. Dann ist nämlich $\|z\|_V = |\lambda|\|x\|_V = \|x\|_V/(C\|x\|_V) = 1/C = \delta/2 < \delta$. Daher ist

$$1 > \|Az\|_W = \|A(\lambda x)\|_W = |\lambda|\|Ax\|_W = \frac{\|Ax\|_W}{C\|x\|_V},$$

woraus $\|Ax\|_W \leq C\|x\|_V$ für alle $x \neq 0$ folgt (und für $x = 0$ gilt die Ungleichung sowieso, da dann $Ax = 0$ gilt).

Gelte umgekehrt die Ungleichung $\|Ax\|_W \leq C\|x\|_V$ für ein $C \geq 0$ und alle x . Dann gilt

$$\|Ax - Ax_0\|_W = \|A(x - x_0)\|_W \leq C\|x - x_0\|_V.$$

Also folgt aus $x \rightarrow x_0$ auch $Ax \rightarrow Ax_0$, was die Stetigkeit von A zeigt.

Man nennt daher stetige lineare Abbildungen auch *beschränkte* lineare Abbildungen (was ein bisschen im Widerspruch zu einer beschränkten Funktion steht...).

Die Operatornorm $\|A\|$ bekommt üblicherweise keinen Index. Steht irgendwo $\|A\|$ für eine lineare Abbildung zwischen normierten Räumen, so ist immer die von den entsprechenden Normen induzierte Operatornorm gemeint. Es gilt übrigens, dass $\|A\|$ auch gleich der kleinsten Konstante C aus a) ist, d.h. $\|A\| = \inf\{C \mid \forall x : \|Ax\|_W \leq C\|x\|_V\}$.

- b) Aus der Definition von $\|A\|$ folgt, dass für alle $x \neq 0$ immer gilt $\|A\| \geq \|Ax\|_W / \|x\|_V$. Das heißt, für alle $x \neq 0$ gilt $\|Ax\|_W \leq \|A\| \|x\|_V$ und offensichtlich gilt das auch für $x = 0$.

Zeigen wir, dass die Operatornorm eine Norm ist: Seien $A, B \in L(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ (bzw. $\in \mathbb{C}$). Dann gilt für alle x

$$\|(A + B)x\|_W \leq \|Ax\|_W + \|Bx\|_W \leq (\|A\| + \|B\|)\|x\|_V.$$

Ist $x \neq 0$, so dividieren wir durch $\|x\|_V$ und das Bilden des Supremums auf der linken Seite zeigt $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Aus $\|\lambda Ax\|_W = |\lambda| \|Ax\|_W$ folgt $\|\lambda A\| = |\lambda| \|A\|$. (An dieser Stelle haben wir auch gezeigt, dass $L(V, W)$ ein Vektorraum ist, da aus $A, B \in L(V, W)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ immer $A + B \in L(V, W)$ und $\lambda A \in L(V, W)$ folgt.) Ist schließlich $\|A\| = 0$, so gilt $\|Ax\| = 0$ für alle x , und daher ist $A = 0$.

□

Beispiel.

1. Es sei $C([a, b])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ versehen mit der Supremumsnorm. Wir betrachten die Abbildung

$$I : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}, \quad I(f) \mapsto \int_a^b f(x) dx.$$

Es gilt

$$|I(f)| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b - a) \|f\|_{\sup}.$$

Daher ist I stetig und es gilt $\|I\| \leq b - a$. Da obige Ungleichung für $f \equiv 1$ scharf ist, folgt $\|I\| = b - a$.

2. Wir betrachten $C^1([0, 1]) \subset C([0, 1])$ (das ist der Unterraum der stetig differenzierbaren Funktionen) und versehen diesen Unterraum ebenfalls mit der Supremumsnorm. Dann ist die Ableitung

$$D : C^1([0, 1]) \rightarrow C([0, 1]), \quad f \mapsto f'$$

linear, aber *nicht* stetig.

Um dies einzusehen, betrachten wir die Funktionen $f_n(x) = x^n$. Die Funktionen sind stetig differenzierbar mit $Df_n(x) = f'_n(x) = nx^{n-1}$ und es gilt

$$\|f_n\|_{\sup} = 1, \quad \text{und} \quad \|Df_n\|_{\sup} = n.$$

Daher kann es keine Konstante C geben, so dass $\|Df_n\|_{\sup} \leq C \|f_n\|_{\sup}$ für alle n gilt.

3. Wir betrachten lineare Abbildungen $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ (welche wie als Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ auffassen). Wir können nun in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ jeweils verschiedenen Normen wählen und bekommen dann ebenfalls verschiedenen Operator-Normen. Wählen wir in $\mathbb{R}^n$ die p -Norm und in $\mathbb{R}^m$ die q -Norm, so bezeichnen wir die induzierte Operator-Norm mit $\|A\|_{p \rightarrow q}$.

- (a) Für $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, und $(\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_1)$ schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \|Ax\|_1 &= \sum_{i=1}^m |(Ax)_i| = \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^m |a_{ij}|}_{\leq \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|} |x_j| \\ &\leq \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|}_{=\|x\|_1}. \end{aligned}$$

Daher ist $\|A\|_{1 \rightarrow 1} \leq \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$. Da man immer ein x konstruieren kann, was die beiden Ungleichungen oben scharf macht, ist

$$\|A\|_{1 \rightarrow 1} = \max_{j=1, \dots, n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|.$$

Man nennt diese Norm die *Spaltensummennorm*.

- (b) Betrachtet man auf $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ jeweils die ∞ -Norm, so kann man ähnlich zeigen, dass

$$\|A\|_{\infty \rightarrow \infty} = \max_{i=1, \dots, m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Diese Norm heißt *Zeilensummennorm*.

- (c) Nimmt man in beiden Räumen die 2-Norm, so kann man mit Hilfe des Spektralsatzes für selbstadjungierte Operatoren zeigen, dass gilt

$$\|A\|_{2 \rightarrow 2} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)} = \text{„Wurzel aus dem größten Eigenwert von } A^T A\text{“}.$$

Diese Norm heißt *Spektralnrm*.

△

7 Kompaktheit

7.1 Kompakte Mengen in metrischen Räumen

Im letzten Semester hatten wir ein Intervall kompakt genannt, wenn es abgeschlossen und beschränkt ist und hatten für kompakte Intervalle spezielle Sätze gezeigt (z.B. nehmen stetige Funktionen auf kompakten Intervall ihr Maximum und Minimum an und Folgen in einem kompakten Intervall haben nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß immer Häufungspunkte). In diesem Abschnitt wird eine Verallgemeinerung des Begriffs der Kompaktheit in metrischen Räumen vorgestellt, der dafür sorgt, dass entsprechende Sätze weiterhin gelten.

Definition 7.1. Es sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Eine Familie $(U_i)_{i \in I}$ offener Mengen in X heißt *offene Überdeckung* von A , wenn $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Ist $\{i_1, \dots, i_k\} \subset I$ eine endliche Teilmenge von I und gilt $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$, so heißt $(U_{i_j})_{j=1, \dots, k}$ eine *endliche Teilüberdeckung* von A .

Definition 7.2. In einem X metrischen Raum heißt eine Teilmenge $A \subset X$ *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von A eine endliche Teilüberdeckung von A hat.

Zeigen wir jetzt, dass dies eine sinnvolle Verallgemeinerung des Kompaktheitsbegriffes aus dem ersten Semester ist, d.h. wir wollen zeigen, dass Intervalle $[a, b]$ auch nach dieser Definition kompakt sind, während Intervalle $]a, b[,]a, b], [a, b[,]-\infty, a[,]-\infty, a], [a, \infty[$ und $]a, \infty[$ nicht kompakt sind.

Wir zeigen exemplarisch den Fall des halboffenen Intervalls $A =]a, b]$ (die anderen Fälle der beschränkten Intervalle gehen analog). Dazu definieren wir mit den Mengen $U_i =]a + 1/i, b + 1[, i \in \mathbb{N}$ eine offenen Überdeckung von A , denn für jedes $x \in A$ gilt $x > a$ und daher gibt es ein $i \in \mathbb{N}$, so dass $x > a + 1/i$. Ist $(U_{i_1}, \dots, U_{i_k})$ eine beliebige endliche Teilüberdeckung, so setzen wir $i^* = \max(i_1, \dots, i_k)$ und sehen, dass $\bigcup_{l=1}^k U_{i_l} =]a + 1/i^*, b + 1[\not\supset A$ gilt. Daher gibt es keine endliche Teilüberdeckung.

Dass abgeschlossene und beschränkte Intervalle kompakt sind, zeigen wir gleich in einem allgemeineren Fall:

Satz 7.3. Zu $a, b \in \mathbb{R}^n$ ist der abgeschlossene Quader

$$Q = [a, b] := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_k \leq x_k \leq b_k, k = 1, \dots, n\} = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

kompakt.

Beweis.

Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von Q . Wir zeigen durch Widerspruch, dass es eine endliche offene Teilüberdeckung geben muss. Nehmen wir also an, dass es keine solche gibt. Um diese Annahme zum Widerspruch zu führen, konstruieren wir eine Folge von abgeschlossenen Quadern $Q_0, Q_1, \dots$ mit folgenden

Zu Übungszwecken sollten Sie versuchen, zu zeigen, dass die Menge $[a, \infty[$ nicht kompakt ist, indem Sie eine offene Überdeckung angeben, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

Eigenschaften:

1. die Folge ist absteigend, d.h. $Q_0 \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$,
2. jedes Q_m kann nicht durch endlich viele U_{i_k} überdeckt werden, und
3. für jedes m gilt $\text{diam}(Q_m) = 2^{-m} \text{diam}(Q)$.

Dazu setzen wir $Q_0 = Q$ und nehmen an, dass Q_m konstruiert sein. Dann ist

$$Q_m = I_1 \times \dots \times I_n$$

mit abgeschlossenen Intervallen $I_k, k = 1, \dots, n$. Wir zerteilen jedes I_k in zwei abgeschlossene Intervalle jeweils halber Länge

$$I_k = I_k^{(1)} \cup I_k^{(2)}$$

und für $s_k \in \{1, 2\}$ definieren wir 2^n Teilquader

$$Q_m^{(s_1, \dots, s_n)} = I_1^{(s_1)} \times \dots \times I_n^{(s_n)}$$

mit $\bigcup_{s_1, \dots, s_n} Q_m^{(s_1, \dots, s_n)} = Q_m$. Da Q_m nicht von endlich vielen der U_i überdeckt werden kann, gilt das gleiche für mindestens einen der Teilquader (gäbe es nämlich für alle 2^n Teilquader endlich viele Teilüberdeckungen so wäre die Vereinigung dieser eine endliche Teilüberdeckung von Q_m selbst). Diesen wählen wir als Q_{m+1} . Da nach Konstruktion $\text{diam}(Q_{m+1}) = \frac{1}{2} \text{diam}(Q_m)$ gilt, folgt $\text{diam}(Q_m) = 2^{-m} \text{diam}(Q)$.

Nach Satz 4.12 gibt es genau einen Punkt $a \in \mathbb{R}^n$, welcher in allen Q_m liegt. Dann liegt aber a auch in einem der U_i , welches wir mit U_{i_0} bezeichnen. Da U_{i_0} offen ist, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(a) \subset U_{i_0}$. Da $\text{diam}(Q_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ gilt, gibt es ein M , so dass $\text{diam}(Q_M) < \epsilon$ gilt, und da aber $a \in Q_M$ gilt folgt mit

$$Q_M \subset B_\epsilon(a) \subset U_{i_0}$$

ein Widerspruch, da Q_M sogar schon von einem einzigen U_{i_0} überdeckt wird. $\square$

Lemma 7.4. Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ kompakt, so ist A beschränkt.

Beweis.

Ist $A = \emptyset$, ist die Behauptung wahr. Ansonsten sei $a \in A$. Dann gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n(a) = \{x \in X \mid \exists n \in \mathbb{N} : d(x, a) < n\} = X,$$

das heißt, die Kugeln um a mit Radien $n \in \mathbb{N}$ bilden eine offene Überdeckung von X und daher auch von A . Da A kompakt ist, gibt es endlich viele Indizes $n_1, \dots, n_k$, mit $A \subset B_{n_1} \cup B_{n_2} \cup \dots \cup B_{n_k}$. Mit $n := \max(n_1, \dots, n_k)$ gilt also $A \subset B_n(a)$. $\square$

Lemma 7.5. Ist (X, d) ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X , welche gegen a konvergiert. Dann ist die Menge

$$M = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$$

kompakt.

Beweis.

Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von M . Dann liegt der Grenzwert a in einer dieser Mengen, d.h. es gibt ein $i^* \in I$, so dass $a \in U_{i^*}$. Da U_{i^*} offen ist, liegen fast alle Folgenglieder in U_{i^*} , d.h. es gibt ein N , so dass für $n \geq N$ immer $x_n \in U_{i^*}$ gilt. Außerdem liegt jedes x_k in einem U_{i_k} und daher gilt

$$M \subset U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_N} \cup U_{i^*}.$$

□

Korollar 7.6. Jede konvergente Folge in einem metrischen Raum ist beschränkt.

Folgt direkt aus Lemma 7.4 und Lemma 7.5.

7.2 Der Satz von Heine-Borel

Satz 7.7. Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann gilt:

- i) K abgeschlossen.
- ii) Ist eine Menge $A \subset K$ abgeschlossen, so ist A kompakt.

Beweis.

- i) Wir zeigen, dass $K^\complement$ offen ist. Für $K = X$ ist die Behauptung klar, daher sei $b \in K^\complement$. Zu jedem $x \in K$ gibt es nach Satz 3.2 Umgebungen U_x von x und V_x von b , so dass $U_x \cap V_x = \emptyset$. Es gilt

$$K \subset \bigcup_{x \in K} U_x$$

und da K kompakt ist, gibt es endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_k \in K$ mit

$$K \subset U_{x_1} \cup \dots \cup U_{x_k}.$$

Dann ist aber

$$V := V_{x_1} \cap \dots \cap V_{x_k}$$

als endlicher Schnitt von offenen Mengen wieder offen, also eine offene Umgebung von b und es gilt $V \cap \bigcup_{i=1}^k U_{x_i} = \emptyset$. Das heißt $V \subset K^\complement$ und das heißt, dass V eine offene Umgebung von b ist, welche ganz in $K^\complement$ liegt. Da dies für jedes $b \in K^\complement$ gilt, folgt, dass $K^\complement$ offen ist.

Betrachtet man nur die Menge $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Folgenglieder, so muss die Aussage von Lemma 7.5 nicht mehr stimmen (und zwar unabhängig davon, ob die Folge konvergent ist oder nicht! Schauen Sie den Beweis noch einmal an, und gucken Sie, wieso der Beweis in dem Fall nicht mehr klappt. Außerdem sollte Sie versuchen, eine offene Überdeckung der Menge $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ anzugeben, die keine endliche Teilüberdeckung enthält.

- ii) Es sei $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von A . Die Menge $U' = A^c$ ist offen und es gilt

$$\bigcup_{i \in I} U_i \cup U' = X \supset K.$$

Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$ mit

$$K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup U'.$$

Es folgt

$$A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

was die Behauptung zeigt. □

Satz 7.8 (Heine-Borel). Für Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ (ausgestattet mit einer der p -Normen, $p = 1, 2, \infty$) gilt:

$$A \text{ kompakt} \iff A \text{ abgeschlossen und beschränkt.}$$

Beweis.

$\Rightarrow$: Ist A kompakt, so ist A nach Lemma 7.4 beschränkt und nach Satz 7.7 i) abgeschlossen.

$\Leftarrow$: Ist umgekehrt A beschränkt, so ist A in einem Quader enthalten, welcher nach Satz 7.3 kompakt ist. Da A auch abgeschlossen ist, ist A nach Satz 7.7 ii) auch kompakt. □

Satz 7.9. Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f : X \rightarrow Y$ stetig, so gilt:

$$K \subset X \text{ kompakt} \implies f(K) \subset Y \text{ kompakt.}$$

Beweis.

Es sei $(V_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Nach Satz 5.6 sind dann die Mengen $U_i := f^{-1}(V_i)$ offen und sogar eine offene Überdeckung von K . Da K kompakt ist, gibt es endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_k \in I$, so dass

$$K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k}$$

und wir haben wegen

$$f(K) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_k}$$

eine offenen Teilüberdeckung gefunden. □

Es folgt: Sind zwei metrische Räume X und Y homöomorph und einer kompakt, so auch der andere. Wir können darauf weiter folgern:

In einem beliebigen metrischen Raum ist eine abgeschlossene und beschränkte Menge nicht immer kompakt! Man kann in *jedem* metrischen Raum (X, d) eine neue Metrik $d'(x, y) = \min(d(x, y), 1)$ definieren, für die gilt: Eine Menge ist in (X, d) offen genau dann, wenn sie in (X, d') offen ist. In dieser neuen Metrik ist jede Teilmenge beschränkt! Machen wir dies z.B. in $X = \mathbb{R}^n$ mit der Standard-Metrik, so ist der ganze $\mathbb{R}^n$ in dieser Metrik abgeschlossen und beschränkt, aber trotzdem nicht kompakt.

Merke: "stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt".

1. Die abgeschlossene Einheitskugel

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1\}$$

ist weder zur offenen Einheitskugel B , noch zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph.

2. Das Intervall $[0, 2\pi[$ ist nicht zur 1-Sphäre

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

homöomorph (vgl. Beispiel in Abschnitt 5).

Wir können jetzt auch das Maximum-/Minimumprinzip verallgemeinern:

Satz 7.10. Ist X ein kompakter, metrischer Raum und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt und nimmt sein Maximum und Minimum an.

Beweis.

Nach Satz 7.9 ist die Menge $f(X)$ eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$, also nach dem Satz von Heine-Borel (Satz 7.8) beschränkt, d.h. $f^* = \sup f(X)$ und $f_* = \inf f(X)$ existieren als reelle Zahlen. Da (wieder nach Heine-Borel) $f(X)$ auch abgeschlossen ist, sind f^*, f_* in $f(X)$ und also gibt es $x^*, x_* \in X$ mit $f(x^*) = f^*$ und $f(x_*) = f_*$. $\square$

Definition 7.11. Ist (X, d) ein metrischer Raum, $A \subset X$ und $x \in X$, so ist der Abstand von x zu A definiert als

$$\text{dist}(x, A) := \inf\{d(x, y) \mid y \in A\}.$$

Für eine weitere Teilmenge $B \subset X$ ist der Abstand von A und B definiert als

$$\text{dist}(A, B) := \inf\{\text{dist}(x, A) \mid x \in B\} = \inf\{d(x, y) \mid x \in A, y \in B\}.$$

Satz 7.12. Es gilt

- i) Die Funktion $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ ist stetig.
- ii) Ist A abgeschlossen, K kompakt und gilt $A \cap K = \emptyset$, so gilt

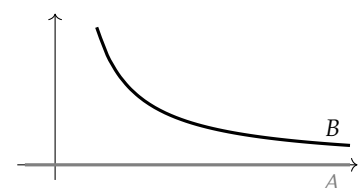
$$\text{dist}(K, A) > 0.$$

Beweis.

- i) Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned} \text{dist}(x', A) &= \inf\{d(x', y) \mid y \in A\} \\ &\leq \inf\{d(x', x) + d(x, y) \mid y \in A\} \\ &= d(x', x) + \inf\{d(x, y) \mid y \in A\} \\ &= d(x', x) + \text{dist}(x, A). \end{aligned}$$

Sind A und K beide nur abgeschlossen, so muss der Abstand auch bei disjunkten Mengen nicht positiv sein! Ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ die die beiden Mengen $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y > 0, xy = 1\}$:



Damit folgt

$$\text{dist}(x', A) - \text{dist}(x, A) \leq d(x, x')$$

und da wir die Rollen von x und x' vertauschen können, folgt auch

$$|\text{dist}(x, A) - \text{dist}(x', A)| \leq d(x, x').$$

Daraus folgt die Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto \text{dist}(x, A)$.

- ii) Da $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ stetig und K kompakt ist, folgt aus Satz 7.10, dass $x \mapsto \text{dist}(x, A)$ ihr Minimum in einem Punkt $q \in K$ annimmt. Das bedeutet also $\text{dist}(q, A) = \text{dist}(K, A)$. Da A abgeschlossen ist und $q \notin A$, gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $B_\epsilon(q) \subset A^c$. Daraus folgt $\text{dist}(q, A) \geq \epsilon$.

□

Satz 7.13 (Bolzano-Weierstraß im metrischen Raum). *Ist A eine kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes (X, d) und (x_n) eine Folge in A , so hat (x_n) eine konvergente Teilfolge deren Grenzwert wieder in A liegt.*

Beweis.

Angenommen, keine Teilfolge von (x_n) wäre konvergent. Dann hätte jeder Punkt $a \in A$ eine offene Umgebung U_a in der nur endlich viele Folgenglieder liegen. Offensichtlich ist $A \subset \bigcup_{a \in A} U_a$ und da A kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. es gibt $a_1, \dots, a_m \in A$, so dass

$$A \subset U_{a_1} \cup \dots \cup U_{a_m}.$$

Da aber jedes U_{a_i} nur endlich viele Folgenglieder enthält, würde in ganz A nur endlich viele Folgenglieder liegen, was ein Widerspruch ist.

Dass der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge wieder in A liegt, folgt, da A nach Satz 7.7 i) abgeschlossen ist. □

Es folgt sofort:

Korollar 7.14. *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}^n$ hat eine konvergente Teilfolge.*

Eine beschränkte Folge passt in einen abgeschlossenen Quader, welcher nach Satz 7.3 kompakt ist.

8 Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$

8.1 Kurven im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten nun Abbildungen der Form $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ für Intervalle I . Ist eine solche Abbildung stetig, nennen wir Sie *Kurve* im $\mathbb{R}^n$. Eine Kurve ist durch ein n -Tupel

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

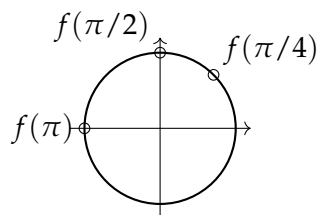
von stetigen Funktionen gegeben. Wir nennen die Kurve differenzierbar, wenn alle Komponentenfunktionen differenzierbar sind.

Beispiel.

1. Zu $r > 0$ betrachten wir die Kurve

$$f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Das Bild dieser Kurve (also die Menge $\{f(t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$) ist eine Kreislinie:



2. Zu $a \in \mathbb{R}^n$ und $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist die Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \mapsto a + vt$$

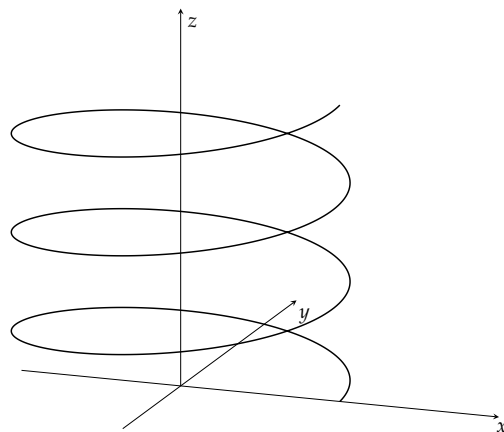
eine Gerade im $\mathbb{R}^n$ welche durch den Punkt a in Richtung v verläuft.

3. Zu $r > 0$ und $c \neq 0$ ist die Kurve

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos(t) \\ r \sin(t) \\ ct \end{pmatrix}$$

ein Schraubenlinie:

Man kann sich Kurven auch gut zeitabhängig vorstellen: Interpretiert man $t \in I$ also Zeit, so gibt $f(t) \in \mathbb{R}^n$ den Ort eines Punktes zur Zeit t , d.h. die Kurve beschreibt die zeitliche Bewegung eines Punktes im $\mathbb{R}^n$.



4. Ist $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für ein Intervall I , so beschreibt die Kurve

$$f : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix}$$

der Graphen der Funktion g .

△

Definition 8.1. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine differenzierbare Kurve, so ist

$$f'(t) := \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

der *Tangentenvektor* an die Kurve f zum Zeitpunkt t . Ist $f'(t) \neq 0$, so ist $f'(t) / \|f'(t)\|_2$ der *Tangenteneinheitsvektor*.

Durch komponentenweise Betrachtung sieht man, dass

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t+h) - f(t)),$$

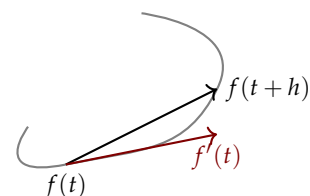
das heißt, dass der Tangentialvektor auch hier ein Grenzwert von Sekanten-Vektoren ist, da der Vektor $f(t+h) - f(t)$ von $f(t)$ aus in die Richtung $f(t+h)$ zeigt. Physikalisch gesehen, ist der Tangentialvektor die *Geschwindigkeit* (inklusive Richtung) und $\|f'(t)\|_2 = \sqrt{f'_1(t)^2 + \dots + f'_n(t)^2}$ ist der Betrag der Geschwindigkeit.

Eine differenzierbare Kurve muss keinen (im anschaulichen Sinne) glatten Weg beschreiben. Ist die Geschwindigkeit Null, so kann die Kurve abknicken:

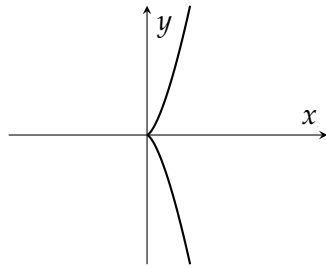
Beispiel.

Wir betrachten die differenzierbare Kurve $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$.

Der Tangentialvektor ist $f'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$ und für $t = 0$ gilt $f'(t) =$



0. An dieser Stelle ändert die Kurve drastisch ihre Richtung:



△

Definition 8.2. Ist $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve, so nennen wir sie *regulär*, wenn $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Ein $t \in I$ mit $f'(t) = 0$ heißt *singulär*.

Im obigen Beispiel ist die Kurve nicht regulär und $t = 0$ ist singulär.

8.2 Rektifizierbare Kurven

Wir können mit Hilfe der Analysis auch die Länge einer Kurve bestimmen. Wir betrachten ein kompaktes Intervall $I = [a, b]$ und eine Kurve $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Wir unterteilen das Intervall

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

und verbinden die Punkte $f(t_i)$ geradlinig mit ihren Nachbarpunkten:



Die Gesamtlänge (in der euklidischen Norm) der geraden Verbindungsstrecken ist

$$p_f(t_0, \dots, t_k) = \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2.$$

Per Grenzübergang definieren wir nun damit die Länge der Kurve.

Definition 8.3. Eine Kurve $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt *rektifizierbar* mit Länge L , wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für jede Unterteilung

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$$

mit $\max\{|t_i - t_{i-1}| \mid i = 1, \dots, k\} < \delta$ gilt, dass

$$|p_f(t_0, \dots, t_k) - L| < \epsilon.$$

Nicht alle Kurven sind rektifizierbar!
Finden Sie ein Beispiel?

Die Länge einer stetig differenzierbaren Kurve können wir mit einem Integral berechnen:

Satz 8.4. Eine stetig differenzierbare Kurve $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist rektifizierbar und die Länge ist

$$L = \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt.$$

Zuerst zeigen wir ein Lemma über die gleichmäßige Approximation der Ableitung über Differenzenquotienten.

Lemma 8.5. Es sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann gilt: Für alle $\epsilon > 0$ existiert $\delta > 0$, so dass

$$0 < |t - \tau| \leq \delta \implies \left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\|_2 \leq \epsilon.$$

Beweis.

[des Lemmas] Zuerst klären wir den Fall $n = 1$: Da f' auf dem kompakten Intervall I stetig ist, ist f' auch gleichmäßig stetig (siehe Analysis 1). D.h. zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle t, s mit $|t - s| \leq \delta$ immer $|f'(t) - f'(s)| \leq \epsilon$ gilt. Zu $t, \tau \in I$ mit $t \neq \tau$ und $|t - \tau| \leq \delta$ gibt es nach dem Mittelwertsatz immer ein s zwischen t und τ , so dass

$$\frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} = f'(s).$$

Also gilt

$$\left| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right| = |f'(s) - f'(t)| \leq \epsilon,$$

wie behauptet.

Für $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $n > 1$ nutzen wir aus, dass nach Satz 3.4 für $v \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|v\|_2 \leq \sqrt{n} \|v\|_\infty$ gilt. Daher ist

$$\left\| \frac{f(t) - f(\tau)}{t - \tau} - f'(t) \right\|_2 \leq \sqrt{n} \max_{i=1, \dots, n} \left| \frac{f_i(t) - f_i(\tau)}{t - \tau} - f'_i(t) \right|$$

und daher folgt der $\mathbb{R}^n$ -Fall aus dem eindimensionalen Fall. $\square$

Beweis.

[von Satz 8.4] Es sei $\epsilon > 0$. Wir approximieren das Integral $\int_a^b \|f'(t)\|_2 dt$ durch eine Riemann-Summe zur Unterteilung $a = t_0 < \dots < t_k = b$ mit $\max\{|t_i - t_{i-1}|\} \leq \delta_1$, d.h. es gilt

$$\left| \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\|_2 (t_i - t_{i-1}) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}. \quad (*)$$

Nach Lemma 8.5 gibt es ein $0 < \delta < \delta_1$, so dass

$$\left\| \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - f'(t_i) \right\|_2 \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}$$

immer gilt, wenn $\max\{|t_i - t_{i-1}|\} < \delta$ gilt. Daraus folgt mit der

Der Satz zeigt, dass stetig differenzierbare Kurven rektifizierbar sind, aber umgekehrt gibt es natürlich auch rektifizierbare Kurven, die nicht stetig differenzierbar sind.

inversen Dreiecksungleichung

$$\left| \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2 - \|f'(t_i)\|_2(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} \frac{\epsilon}{2}.$$

Kombinieren wir diese Abschätzung mit (*) so bekommen wir

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2 - \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^k \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2 - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\|_2 |t_i - t_{i-1}| \cdots \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\|_2 |t_i - t_{i-1}| - \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \left| \|f(t_i) - f(t_{i-1})\|_2 - \|f'(t_i)\|_2 |t_i - t_{i-1}| \right| + \left| \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\|_2 |t_i - t_{i-1}| - \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{t_i - t_{i-1}}{b-a} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Beispiel.

Damit können wir die Länge eines Kreisbogens berechnen: Zu $\varphi > 0$ betrachten wir

$$f : [0, \varphi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$f'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix},$$

also ist

$$\|f'(t)\|_2 = \sqrt{\sin(t)^2 + \cos(t)^2} = 1$$

und daher ist die Länge des Bogens

$$L = \int_0^\varphi \|f'(t)\|_2 dt = \varphi$$

und insbesondere ist damit der Umfang des Einheitskreises gleich 2π . △

Wir können bei einer Kurve die Geschwindigkeit ändern, mit der sie durchlaufen wird (ohne das sich das Bild der Kurve ändert): Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Kurve, $[\alpha, \beta]$ ein Intervall und $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ bijektiv und stetig, so ist

$$g := f \circ \varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

wieder eine Kurve (mit gleichem Bild). Man sagt: g geht aus f durch die *Parametertransformation* φ hervor. Sind φ und φ^{-1} ste-

tig differenzierbar, so heißt φ C^1 -Parametertransformation. Da φ bijektiv zwischen Intervallen ist, gilt entweder

1. φ ist streng wachsend, dann heißt φ *orientierungstreu*, oder
2. φ ist streng fallend, dann heißt φ *orientierungsumkehrend*.

Ist φ eine C^1 -Parametertransformation, so folgt aus $\varphi^{-1}(\varphi(t)) = t$ mit der Kettenregel

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = 1.$$

Daher gilt in diesem Fall auch $\varphi'(t) \neq 0$ für alle t . In diesem Fall ist also φ orientierungstreu, wenn $\varphi' > 0$ gilt und orientierungsumkehrend, wenn $\varphi' < 0$ gilt.

Für die Tangentialvektoren nach C^1 -Parametertransformation (also für $g = f \circ \varphi$) gilt

$$g'(\tau) = f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau).$$

Das heißt, die Tangentialvektoren der Kurve g und f unterscheiden sich nur um den skalaren Faktor $\varphi'(\tau)$.

D.h., eine Parametertransformation, ändert nur den Betrag der Geschwindigkeit.

Satz 8.6. Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Kurve, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation und $g = f \circ \varphi$, so gilt

$$\int_a^b \|f'(t)\|_2 dt = \int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\|_2 d\tau.$$

Beweis.

Wir unterscheiden, ob φ orientierungserhaltend oder -umkehrend ist: Im erhaltenden Fall gilt nach der Substitutionsregel für Integrale

$$\int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\|_2 d\tau = \int_\alpha^\beta \|f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\|_2 d\tau = \int_\alpha^\beta \|f'(\varphi(\tau))\|_2 \varphi'(\tau) d\tau = \int_a^b \|f(t)\|_2 dt.$$

Im umkehrenden Fall ist $b = \varphi(\alpha) > \varphi(\beta) = a$ und $\varphi'(t) < 0$. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_\alpha^\beta \|g'(\tau)\|_2 d\tau &= \int_\alpha^\beta \|f'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau)\|_2 d\tau = - \int_\alpha^\beta \|f'(\varphi(\tau))\|_2 \varphi'(\tau) d\tau \\ &= - \int_b^a \|f'(t)\|_2 dt = \int_a^b \|f'(t)\|_2 dt. \end{aligned}$$

□

9 Partielle Ableitungen

9.1 Richtungsableitungen und partielle Ableitungen

Nachdem wir Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^n$ betrachtet haben, schauen wir uns nun Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}$ an, d.h. zu $U \subset \mathbb{R}^n$ betrachten wir

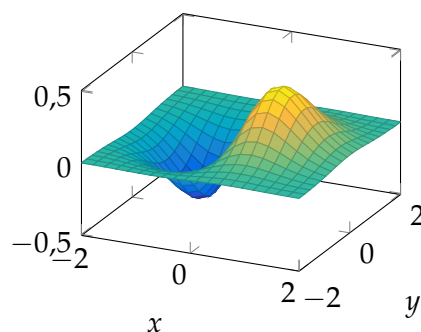
$$f : U \rightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

Der Graph von f ist

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Für $n = 2$ kann man sich eine solche Funktionen noch gut visualisieren:

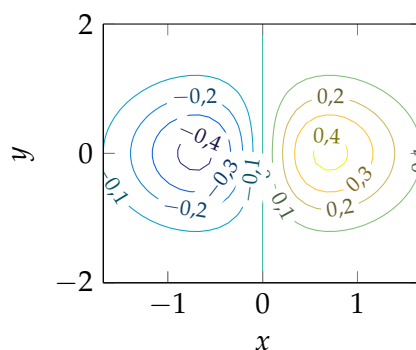
- Der Graph Γ_f ist eine Teilmenge des $\mathbb{R}^3$. Für die Funktion $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$ sieht der Graph so aus:



- Zu $U \subset \mathbb{R}^2$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ betrachte die *Niveau-Linien*

$$N_f(\lambda) := \{x \in U \mid f(x) = \lambda\}$$

für $\lambda \in \mathbb{R}$. Für die Funktion $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$ sehen diese Linien so aus:



Diese Darstellung entspricht den Höhenlinien auf topographischen Landkarten oder den Isobaren (den Linien gleichen Luftdrucks) im Wetterbericht. Man beachte, dass die Niveau-Linien im allgemeinen keine "Linien" im umgangssprachlichen Sinn sein müssen (wenn die Funktion auf einem Stück konstant ist, ergibt sich an dieser Stelle eine "Fläche" auf diesem Niveau).

Definition 9.1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $x \in U$ und $v \in \mathbb{R}^n$. Dann nennen wir f in x *richtungsdifferenzierbar* in Richtung v , wenn der Grenzwert

$$D_v f(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

existiert. In diesem Fall nennen wir $D_v f(x)$ die *Richtungsableitung* von f in Richtung v . Für

$$v = e_i := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{mit der 1 an der } i\text{-ten Stelle})$$

schreiben wir

$$D_i f(x) = D_{e_i} f(x)$$

und nennen $D_i f(x)$ die *i-te partielle Ableitung* von f in x .

Andere Schreibweisen für partielle Ableitungen und Richtungsableitungen sind

$$\begin{aligned} D_v f(x) &= \partial_v f(x) \\ D_i f(x) &= \partial_i f(x) = \partial_{x_i} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \end{aligned}$$

Richtungsableitungen kann man als Ableitungen von Funktionen nur einer Veränderlichen interpretieren: Für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet man die Funktion

$$g :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(h) := f(x + hv).$$

Damit ist

$$D_v f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0).$$

Für partielle Ableitungen geht es auch etwas anders: Zu $x \in U$ und $i \in \{1, \dots, n\}$ betrachten wir die Funktion

$$g_i(t) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Dann ist

$$D_i f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g_i(x_i + h) - g_i(x_i)}{h} = g'_i(x_i).$$

Der Wert der Richtungsableitung ist eine reelle Zahl. Diese Zahl gibt an, wie schnell die Funktion wächst (bzw. fällt), wenn man sie von x startend in Richtung v durchläuft. Beachte, dass v hierbei selbst ein Geschwindigkeitsvektor ist! D.h. für $\|v\|_2$ groß, ist die Wachstumsgeschwindigkeit größer! Genauer: Es gilt

$$D_{\lambda v} f(x) = \lambda D_v f(x),$$

d.h. die Richtungsableitung ist homogen in der Richtung. Üblicherweise betrachtet man Richtungsableitungen für normalisierte Richtungen $\|v\|_2 = 1$.

Man definiert Richtungsableitungen üblicherweise nur in inneren Punkten des Definitionsbereiches U . Ist U nicht offen, so kann man einseitige Richtungsableitungen auch in Randpunkten definieren, sofern für die Richtung v gilt, dass $x + hv$ für alle $h \in [0, \epsilon]$ in U liegt (intuitiv: Wenn v in Richtung des Inneren zeigt).

Definition 9.2. Eine Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen heißt *partiell differenzierbar* in x , wenn alle partiellen Ableitungen $D_i f(x)$ existieren. Die Funktion f heißt *partiell differenzierbar*, wenn sie dies in allen $x \in U$ ist. Sind alle partiellen Ableitungen $D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so heißt f *stetig partiell differenzierbar*.

Beispiel.

1. Wir betrachten $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch $F(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$. Für die partielle Ableitung nach x betrachten wir y als Konstante, d.h. wir betrachten $g(x) = F(x, y) = \exp(x^2 + y^2)$ für festes y . Das ergibt (nach der Kettenregel)

$$D_1 F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = g'(x) = 2x \exp(x^2 + y^2).$$

Analog bekommt man

$$D_2 F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 2y \exp(x^2 + y^2).$$

2. Betrachten wir als zweites Beispiel die Abbildung $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$r(x) = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Wir zeigen, dass r für $x \neq 0$ partiell differenzierbar ist: Dazu betrachten wir die eindimensionalen Abbildungen

$$g_i(x_i) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2} = (x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

Diese sind differenzierbar, sobald ein Eintrag $x_k, k = 1, \dots, n$ nicht Null ist, und in diesem Fall ist die Ableitung (wieder nach der Kettenregel)

$$g'_i(x_i) = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_i^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

Es gilt also für $i = 1, \dots, n$

$$D_i r(x) = \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = \frac{x_i}{\|x\|_2}.$$

3. Mit Hilfe dieses Beispiels können wir partielle Ableitungen von Funktionen $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmen, die nur vom Abstand vom Ursprung abhängen (solche Funktionen nennt man *radialsymmetrisch*). Eine solche Funktion lässt sich schreiben als

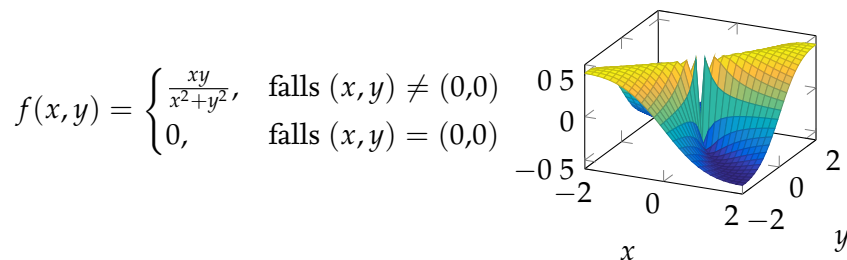
$$F(x) = f(r(x)) \text{ mit } f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}.$$

Aus der Kettenregel folgt

$$D_i F(x) = f'(r(x)) D_i r(x) = \frac{f'(\|x\|_2) x_i}{\|x\|_2}.$$

△

Wir untersuchen noch einmal die Funktion



Beispiel.

Wir schreiben $\vec{x} = (x, y)$. Die Funktion $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2} = \frac{xy}{\|\vec{x}\|_2^2}$ ist für $\vec{x} \neq (0,0)$ partiell differenzierbar. Wir bekommen nach Quotientenregel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y\|\vec{x}\|_2^2 - 2x^2y}{\|\vec{x}\|_2^4} = \frac{y}{\|\vec{x}\|_2^2} - \frac{2x^2y}{\|\vec{x}\|_2^4}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{\|\vec{x}\|_2^2} - \frac{2xy^2}{\|\vec{x}\|_2^4}$$

Tatsächlich ist die Funktion auch in $\vec{x} = (0,0)$ partiell differenzierbar: Es gilt nämlich (exemplarisch für die x -Koordinate)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

da für $h \neq 0$ immer $f(h,0) = 0$ gilt. Ebenso sieht man $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Die Funktion f ist aber in $\vec{x} = (0,0)$ *nicht einmal stetig*: Das sieht man z.B. an der Folge $\vec{x}_k = (1/k, 1/k)$. Es gilt $\vec{x}_k \rightarrow (0,0)$, aber

$$f(1/k, 1/k) = \frac{1}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2} \not\rightarrow 0 = f(0,0).$$

Für welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion richtungsdifferenzierbar? $\triangle$

Natürlich können wir auch höhere partielle Ableitungen definieren: Ist $D_i f : U \rightarrow \mathbb{R}$ wieder partiell differenzierbar, so können wir $D_j D_i f$ definieren. Rekursiv definiert man höhere partielle Ableitungen:

Definition 9.3. Wir nennen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $(k+1)$ -mal partiell differenzierbar, wenn sie k -mal partiell differenzierbar ist, und alle partiellen Ableitungen k -ter Ordnung $D_{i_1} D_{i_2} \cdots D_{i_k} f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar sind.

Ist f k -mal partiell differenzierbar und sind alle partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ stetig, so heißt f *k -mal stetig partiell differenzierbar*.

9.2 Höhere partielle Ableitungen

Es ist nicht klar, ob im allgemeinen $D_i D_j f = D_j D_i f$ gilt. Tatsächlich ist das für 2-mal partiell differenzierbare Funktionen

nicht der Fall. Es gilt aber für 2-mal stetig partiell differenzierbare Funktionen:

Satz 9.4 (Satz von Schwarz). Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig partiell differenzierbar, so gilt für $i, j = 1, \dots, n$ und alle $a \in U$

$$D_i D_j f(a) = D_j D_i f(a).$$

Beweis.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit betrachten wir den Fall $n = 2, i = 1, j = 2$ und $a = 0$ und schreiben (x, y) für (x_1, x_2) . Sei $\delta > 0$ so, dass $\{(x, y) \mid |x|, |y| < \delta\} \subset U$. Fixiere y mit $|y| < \delta$ und betrachte $F_y :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F_y(x) = f(x, y) - f(x, 0)$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es ξ mit $|\xi| \leq |x|$, so dass

$$F_y(x) - F_y(0) = F'_y(\xi)x.$$

Es gilt $F'_y(\xi) = D_1 f(\xi, y) - D_1 f(\xi, 0)$. Wende den Mittelwertsatz ein zweites mal an, diesmal auf $y \mapsto D_1 f(\xi, y)$: Dies gibt η mit $|\eta| \leq |y|$, so dass

$$D_1 f(\xi, y) - D_1 f(\xi, 0) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)y.$$

Da $F_y(x) - F_y(0) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)$ folgt

$$f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = D_2 D_1 f(\xi, \eta)xy.$$

Wir machen die gleiche Überlegung mit vertauschten Rollen von x und y : $G_x(y) = f(x, y) - f(0, y)$ führt auf $G_x(y) - G_x(0) = G'_x(\tilde{\eta})y = (D_2 f(x, \tilde{\eta}) - D_2 f(0, \tilde{\eta}))y = D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})xy$ mit $|\tilde{\eta}| \leq |y|$ und $|\tilde{\xi}| \leq |x|$. Es folgt

$$f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0) = D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})xy.$$

Für $xy \neq 0$ folgt also

$$D_2 D_1 f(\xi, \eta) = D_1 D_2 f(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}).$$

Für $x, y \rightarrow 0$ gilt auch $\xi, \eta, \tilde{\xi}, \tilde{\eta} \rightarrow 0$ (da $|\eta|, |\tilde{\eta}| \leq |y|$ und $|\xi|, |\tilde{\xi}| \leq |x|$) und wegen der Stetigkeit von $D_1 D_2 f$ und $D_2 D_1 f$ folgt

$$D_1 D_2 f(0, 0) = D_2 D_1 f(0, 0).$$

□

Per Induktion bekommt man:

Korollar 9.5. Für eine k -mal stetig differenzierbare Funktion f , alle Indizes $i_1, \dots, i_k$ und jede Permutation π der Zahlen $1, \dots, k$ gilt

$$D_{i_k} \cdots D_{i_2} D_{i_1} f = D_{i_{\pi(k)}} \cdots D_{i_{\pi(2)}} D_{i_{\pi(1)}} f.$$

Zum Schluss dieses Abschnittes betrachten wir noch Abbildungen der Form $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ für $U \subset \mathbb{R}^n$, d.h. bei denen auch

der Bildbereich mehrdimensional ist. Diese lassen sich wieder durch Komponentenfunktionen $f_k : U \rightarrow \mathbb{R}$ beschreiben:

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Auch für solche Funktionen sind partielle Ableitungen definiert:

$$D_i f(x) = \begin{pmatrix} D_i f_1(x) \\ \vdots \\ D_i f_m(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

Insgesamt gibt es in einem Punkt x also $m \times n$ partielle Ableitungen, nämlich $D_i f_j(x)$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

10 Differenzierbarkeit

10.1 Jacobi-Matrix und Gradient

Aus partieller Differenzierbarkeit folgt im mehrdimensionalen nicht einmal die Stetigkeit der Funktion. Es scheint also, als wäre der Begriff der partiellen Ableitung noch nicht völlig ausreichend, um so etwas wie "Glattheit" zu beschreiben. Wir führen jetzt den "richtigen" Begriff der Differenzierbarkeit ein und nehmen dafür die Anschauung, dass Differenzierbarkeit in einer Dimension einer *Linearisierung* entspricht.

Definition 10.1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann heißt $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $a \in U$ *differenzierbar* (manchmal auch *total differenzierbar*), wenn es eine lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ gibt, so dass gilt

$$f(x) = f(a) + A(x - a) + \varphi(x)$$

mit einer reellwertigen Funktion φ , welche in einer Umgebung von a definiert ist und

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi(x)}{\|x - a\|} = 0$$

Wegen Satz 3.4 kommt es nicht auf die Wahl der Norm an.

erfüllt. Die lineare Abbildung A ist die *Ableitung* von f in x und wir schreiben

$$Df(x) = A.$$

Wir schreiben die Identität noch einmal in Koordinaten aus: Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

so lautet die Identität in Komponenten geschrieben

$$f_i(x) = f_i(a) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(x_j - a_j) + \varphi_i(x), \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\varphi_i(x)}{\|x - a\|} = 0.$$

Wir erkennen: $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist genau dann in a differenzierbar, wenn alle $f_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ in a differenzierbar sind.

Mit Hilfe der Substitution $a \rightarrow x$ und $x \rightarrow x + h$ und dem Landau-Symbol o (vgl. Abschnitt Taylor-Reihen aus Analysis 1) können wir Differenzierbarkeit in x äquivalent charakterisieren durch

$$f(x + h) = f(x) + Ah + o(\|h\|) \quad \text{für } h \rightarrow 0.$$

Beispiel.

1. Für $f(x) = \|x\|_2^2$ gilt $Df(x) = 2x^T$, denn es gilt

$$f(x + h) = \|x + h\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\langle x, h \rangle + \|h\|_2^2 = f(x) + 2x^T h + \|h\|_2^2.$$

Erinnere: Für $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ Wir schreiben " $f(x) = o(g(x))$ für $\|x\| \rightarrow 0$," falls für $\|x\| \rightarrow 0$ gilt, dass $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow 0$. Anschaulich: f geht schneller gegen Null als g .

Es folgt $Df(x) = 2x^T$, da für $\varphi(h) = \|h\|_2^2$ gilt, dass $\varphi(h)/\|h\|_2 \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

2. Für lineare Abbildungen $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f(x) = Ax$ gilt für jedes x

$$Df(x) = A.$$

Das sieht man daran, dass $f(x+h) = Ax + Ah = f(x) + Ah$ gilt und daher $\varphi(h) = 0$ ist.

△

Der Begriff der Differenzierbarkeit aus Definition 10.1 hat bessere Eigenschaften, als der Begriff der partiellen Differenzierbarkeit. Insbesondere folgt aus ihm die Stetigkeit. Außerdem gibt es einen Zusammenhang zu den partiellen Ableitungen.

Satz 10.2. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x \in U$ differenzierbar, d.h. es gilt

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(\|h\|), \quad \text{mit } A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad h \rightarrow 0.$$

Dann gilt:

- i) f ist stetig in x .
- ii) Alle Komponentenfunktionen f_i sind in a partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$$

Beweis.

- i) Die Stetigkeit sieht man schnell: Da für $h \rightarrow 0$ auch $Ah \rightarrow 0$ und $o(\|h\|) \rightarrow 0$ gilt, gilt für $h \rightarrow 0$ auch

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(\|h\|) \rightarrow f(x).$$

- ii) Wir setzen $h = te_j$ und betrachten die i -te Komponente von f : Dann gilt für $t \in \mathbb{R}$ (klein genug, so dass $x + te_j \in U$) da $(Ae_j)_i = a_{ij}$

$$f_i(x + te_j) = f_i(x) + ta_{ij} + \varphi_i(x + te_j).$$

Wir formen um und bekommen

$$a_{ij} = \frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} = \frac{\varphi_i(x+te_j)}{t}.$$

Für $t \rightarrow 0$ gilt als

$$a_{ij} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x).$$

□

Definition 10.3. Die Matrix $Df(x)$ heißt auch *Jacobi-Matrix*. Ist f in U differenzierbar, so ist die Ableitung Df die Matrixwertige Funktion $Df : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \mapsto Df(x)$.

Für den Fall $m = 1$, also für $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ist $Df(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ (ein Zeilenvektor) und man nennt

$$\nabla f(x) = Df(x)^T = \begin{pmatrix} D_1 f(x) \\ \vdots \\ D_n f(x) \end{pmatrix}$$

den *Gradienten* von f .

Für stetig partiell differenzierbares $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \nabla f_1(x)^T \\ \vdots \\ \nabla f_m(x)^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

mit anderen Worten:

Die Gradienten der Komponentenfunktionen sind die Zeilen der Jacobi-Matrix.

Nach Satz 10.2 hat die Jacobi-Matrix die Einträge $Df(x) = (D_j f_i(x))_{ij}$.

Das Symbol ∇ spricht sich "Nabla" aus und kommt vom griechischen Wort für Harfe.

Mit Hilfe des Gradienten lässt sich die Definition der Differenzierbarkeit auch schreiben als

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \varphi(h)$$

mit $\varphi(h)/\|h\|_2 \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.

10.2 Differenzierbarkeit und partielle Differenzierbarkeit

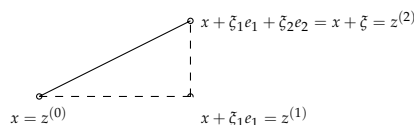
Aus partieller Differenzierbarkeit folgt im allgemeinen *nicht* die Differenzierbarkeit. Unter Zusatzbedingungen gilt dies jedoch. Wir bringen den Satz für reellwertige Funktionen (für Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}^m$ gilt das Ergebnis entsprechend, was man durch komponentenweise Betrachtung sieht):

Satz 10.4. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ in U partiell differenzierbar. Dann gilt: Ist f in $x \in U$ stetig partiell differenzierbar, so ist f in x differenzierbar.

Beweis.

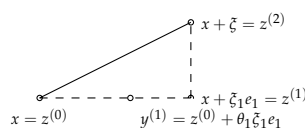
Zu $x \in U$ gibt es $\delta > 0$, so dass $B_\delta(x) \subset U$. Zu $\xi \in B_\delta(0)$ definieren wir

$$z^{(0)} = x, \quad z^{(k)} := x + \sum_{i=1}^k \xi_i e_i, \quad k = 1, \dots, n.$$



Die Vektoren $z^{(k-1)}$ und $z^{(k)}$ unterscheiden sich nur in der k -ten Koordinate. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (aus der Analysis 1) gibt es daher $\theta_k \in [0, 1]$, so dass mit $y^{(k)} := z^{(k-1)} + \theta_k \xi_k e_k$ gilt

$$f(z^{(k)}) - f(z^{(k-1)}) = D_k f(y^{(k)}) \xi_k.$$



Es folgt

$$f(x + \xi) - f(x) = f(z^{(n)}) - f(z^{(n-1)}) \pm \dots \pm f(z^{(1)}) - f(z^{(0)}) = \sum_{k=1}^n D_k f(y^{(k)}) \xi_k.$$

Das formen wir um und bekommen mit $\varphi(\xi) := \sum_{k=1}^n (D_k f(y^{(k)}) - D_k f(x)) \xi_k$

$$f(x + \xi) = f(x) + \sum_{k=1}^n D_k f(x) \xi_k + \varphi(\xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + \varphi(\xi).$$

Da $y^{(k)} \rightarrow x$ für $\xi \rightarrow 0$, folgt aus der Stetigkeit der partiellen Ableitungen $D_k f$, dass auch $D_k f(y^{(k)}) \rightarrow D_k f(x)$ für $\xi \rightarrow 0$. Damit bekommen wir

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|_2} = 0.$$

□

Korollar 10.5. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar, so ist f in U stetig.

Es gilt also

$$\begin{aligned} f \text{ stetig partiell differenzierbar} &\implies f \text{ differenzierbar} \\ &\implies f \text{ partiell differenzierbar.} \end{aligned}$$

Satz 10.6. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Dann gilt: f ist genau dann in $x \in U$ differenzierbar wenn es ein $\epsilon > 0$ und eine stetige Matrix-wertige Abbildung $\mathbf{A} : B_\epsilon(0) \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ gibt, so dass gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + \mathbf{A}(\xi) \xi.$$

Es gilt dann $Df(x) = \mathbf{A}(0)$.

Beweis.

⇐: Setze $A = \mathbf{A}(0)$. Dann gilt

$$f(x + \xi) = f(x) + A\xi + \underbrace{(\mathbf{A}(\xi) - A)\xi}_{\varphi(\xi)}$$

und $\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|_2} = (\mathbf{A}(\xi) - A) \frac{\xi}{\|\xi\|_2} \rightarrow 0$, da $\mathbf{A}(\xi) - A \rightarrow 0$ und $\frac{\xi}{\|\xi\|_2}$ beschränkt ist.

⇒: Es gilt $f(x + \xi) = f(x) + A\xi + \frac{\langle \xi, \xi \rangle}{\|\xi\|_2^2} \varphi(\xi)$. Für $\xi \neq 0$ definieren wir

$$\mathbf{A}(\xi)v := Av + \frac{\langle \xi, v \rangle}{\|\xi\|_2^2} \varphi(\xi).$$

und $\mathbf{A}(0) = A$. Dann ist $\mathbf{A}(\xi)$ linear (in v) und $\mathbf{A}(\xi)\xi = A\xi + \varphi(\xi)$.

Dies $\mathbf{A}$ ist stetig in 0, denn es gilt

$$\frac{\langle \xi, v \rangle}{\|\xi\|_2^2} \varphi(\xi) = \underbrace{\left\langle \frac{\xi}{\|\xi\|_2}, v \right\rangle}_{\text{beschränkt}} \underbrace{\frac{\varphi(\xi)}{\|\xi\|_2}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad \text{für } \xi \rightarrow 0.$$

und daraus folgt $\lim_{\xi \rightarrow 0} \mathbf{A}(\xi)v = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

□

Kommen wir nun zu Ableitungsregeln. Im Mehrdimensionalen ist die Kettenregel das wichtigste Hilfsmittel:

Satz 10.7. Es seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ und $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$ Funktionen mit $f(U) \subset V$. Dann gilt: Ist f in $x \in U$ differenzierbar und g in $y = f(x) \in V$ differenzierbar, so ist $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ in x differenzierbar mit

$$D(g \circ f)(x) = (Dg)(f(x))Df(x)$$

Beweis.

Aus Satz 10.6 folgt

$$\begin{aligned} f(x + \xi) &= f(x) + \mathbf{A}(\xi)\xi, & \mathbf{A}(0) &= Df(x) \\ g(y + \zeta) &= g(y) + \mathbf{B}(\zeta)\zeta, & \mathbf{B}(0) &= Dg(y) \end{aligned}$$

mit Matrix-wertigen Abbildungen $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ die in 0 stetig sind. Setzen wir $\zeta = \mathbf{A}(\xi)\xi$ und $y = f(x)$ in der zweiten Gleichung, erhalten wir

$$g(f(x) + \mathbf{A}(\xi)\xi) = g(f(x)) + \mathbf{B}(\mathbf{A}(\xi)\xi) \mathbf{A}(\xi)\xi.$$

Wir definieren $\mathbf{D}(\xi) = \mathbf{B}(\mathbf{A}(\xi)\xi)\mathbf{A}(\xi)$, nutzen die erste Gleichung und bekommen

$$(g \circ f)(x + \xi) = g(f(x)) + \mathbf{D}(\xi)\xi.$$

Da $\mathbf{D}$ stetig ist, folgt daraus die Differenzierbarkeit von $g \circ f$, und es gilt $D(g \circ f)(x) = \mathbf{D}(0) = \mathbf{B}(0) \mathbf{A}(0) = Dg(f(x))Df(x)$. □

Die rechte Seite $(Dg)(f(x))Df(x)$ kann man entweder als Hintereinanderausführung linearer Abbildungen auffassen, oder als Produkt der Jacobi-Matrizen. Machen Sie sich klar, dass die Dimensionen passen!

11 Sätze über Ableitungen

11.1 Ableitungsregeln

Aus der Kettenregel können wir alle weiteren Ableitungsregeln herleiten:

Beispiel.

1. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar. Wir können die Funktion

$$f + g : U \rightarrow \mathbb{R}^m, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

mit Hilfe der Abbildung $h : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}^m, h(x, y) = x + y$ schreiben als

$$(f + g)(x) = h(f(x), g(x)).$$

Dabei haben wir f und g zu einer Abbildung $F : U \mapsto \mathbb{R}^{2m}, x \mapsto \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}$ übereinandergestapelt. Mit Hilfe von partiellen Ableitungen sieht man, dass diese Abbildung die Ableitung

$$DF(x) = \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m \times n},$$

hat (d.h., auch die Ableitungen werden gestapelt). Wieder mit partiellen Ableitungen berechnet man

$$Dh(x, y) = (E_m \ E_m) \in \mathbb{R}^{m \times 2m}$$

mit $m \times m$ Einheitsmatrizen. Es gilt also nach der Kettenregel:

$$\begin{aligned} D(f + g)(x) &= D(h \circ \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix})(x) = Dh(f(x), g(x)) D \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} (x) \\ &= (E_m \ E_m) \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix} \\ &= Df(x) + Dg(x). \end{aligned}$$

2. Zu $U \subset \mathbb{R}^n$ offen betrachten wir zwei differenzierbare Funktionen $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ und Ableitungen $Df(x), Dg(x) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ bzw. Gradienten $\nabla f(x), \nabla g(x) \in \mathbb{R}^n$. Wir schreiben das Produkt $fg : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit Hilfe der Abbildung $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = xy$ und dem Übereinanderstapeln aus dem vorigen Beispiel als $(fg)(x) = h(f(x), g(x))$. Für die Ableitung ergibt sich wegen $Dh(x, y) = (y \ x) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$

$$\begin{aligned} D(fg)(x) &= Dh(f(x), g(x)) \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix} \\ &= (g(x) \ f(x)) \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix} = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x). \end{aligned}$$

Da der Gradient das Transponierte der Ableitung ist, ist der Gradient von fg

$$\nabla(fg)(x) = D(fg)(x)^T = g(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla g(x).$$

3. Eine weitere Art der Produktregel können wir für zwei differenzierbare Funktionen der Art $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ angeben. Hier können wir zum Beispiel die Funktion $\langle f, g \rangle(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$ bilden. Diese schreiben wir mit Hilfe von $h : \mathbb{R}^{2m} \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ als $h(f(x), g(x))$. Berechnen wir die partiellen Ableitungen von h , ergibt sich die Ableitung als

$$Dh(x, y) = (y^T \quad x^T) \in \mathbb{R}^{1 \times 2m}.$$

Also bekommen wir mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} D(\langle f, g \rangle)(x) &= \underbrace{Dh(f(x), g(x))}_{\in \mathbb{R}^{1 \times 2m}} \underbrace{\begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{2m \times n}} \\ &= (g(x)^T \quad f(x)^T) \begin{pmatrix} Df(x) \\ Dg(x) \end{pmatrix} \\ &= g(x)^T Df(x) + f(x)^T Dg(x). \end{aligned}$$

Für den Gradienten gilt also

$$\nabla(\langle f, g \rangle)(x) = Df(x)^T g(x) + Dg(x)^T f(x).$$

Wir hätten diese Summen- und Produktregel natürlich auch direkt mit Hilfe von partiellen Ableitungen herleiten können.

△

Satz 11.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt für $x \in U$ und jeden Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^n$, für die Richtungsableitung

$$D_v f(x) = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Beweis.

Nach der Definition der Richtungsableitung ist

$$D_v f(x) = D(f \circ \varphi)(t)|_{t=0}, \quad \text{mit} \quad \varphi(t) = x + tv.$$

Nach der Kettenregel ist

$$D(f \circ \varphi)(0) = Df(\varphi(0))D\varphi(0)$$

und aus $\varphi(0) = x$, $D\varphi(0) = v$ folgt

$$D_v f(x) = D(f \circ \varphi)(0) = Df(x)D\varphi(0) = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

□

Diese Satz hat eine wichtige Konsequenz: Es gilt nach der

Cauchy-Schwarz-Ungleichung immer

$$|D_v f(x)| \leq \|\nabla f(x)\|_2 \|v\|_2$$

wobei die Abschätzung genau dann scharf ist, wenn $\nabla f(x)$ und v in die gleiche Richtung zeigen. Es gilt also:

1. Der normierte Vektor $\nabla f(x) / \|\nabla f(x)\|_2$ zeigt in *die Richtung des steilsten Anstieges*.
2. Der steilste Anstieg ist

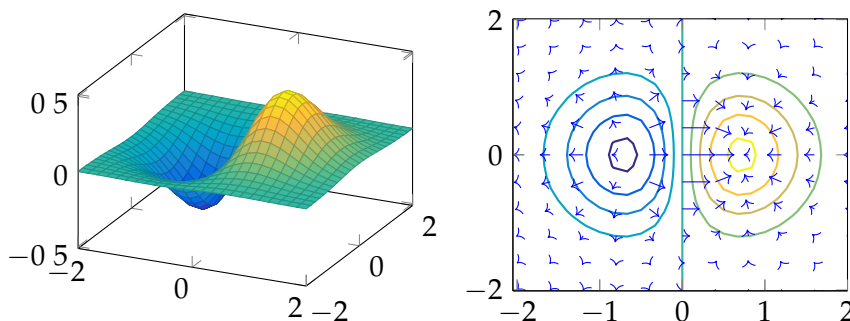
$$D_{\nabla f(x) / \|\nabla f(x)\|_2} f(x) = \langle \nabla f(x), \frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|_2} \rangle = \|\nabla f(x)\|_2^2 / \|\nabla f(x)\|_2 = \|\nabla f(x)\|_2.$$

3. Die Richtung $-\nabla f(x) / \|\nabla f(x)\|_2$ ist die Richtung des steilsten Abstiegs.
4. Für alle Richtungen v , die senkrecht zu $\nabla f(x)$ stehen gilt

$$D_v f(x) = 0,$$

d.h. die Funktion ist in diese Richtungen lokal flach.

Diese Beobachtungen kann man auch graphisch einsehen: Eine Funktion ist entlang der Niveau-Linien $N_\lambda = \{x \in U \mid f(x) = \lambda\}$ konstant. Die Richtungen des steilsten An- und Abstiegs sind entgegengesetzt und senkrecht zu den Niveau-Linien. Hier eine Illustration am Beispiel der Funktion $f(x, y) = x \exp(-x^2 - y^2)$:



11.2 Der Mittelwertsatz

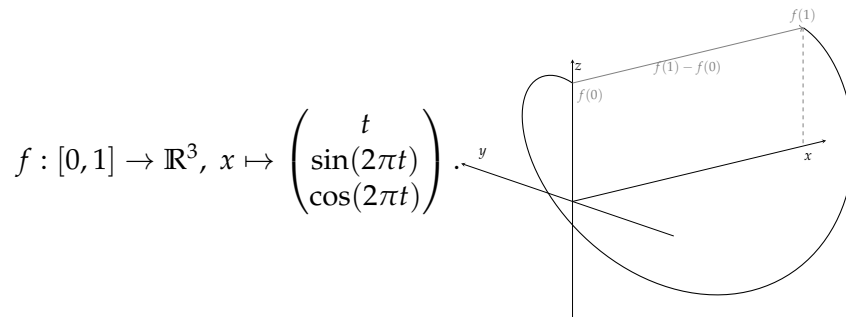
Wir erinnern jetzt an den Mittelwertsatz der Differentialrechnung: Ist I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $x, x + \xi \in I$, so gibt es $\theta \in]0, 1[$, so dass

$$f(x + \xi) - f(x) = f'(x + \theta\xi)\xi. \quad (*)$$

Ist f' stetig, so liefert der Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung und der Substitution $u = x + t\xi$ die etwas andere Identität

$$f(x + \xi) - f(x) = \int_x^{x+\xi} f'(u) du = \left(\int_0^1 f'(x + t\xi) dt \right) \xi. \quad (**)$$

Der Unterschied zu der vorigen Gleichung ist, dass anstatt des Wertes $f'(x + \theta\zeta)$ an einer Zwischenstelle, der Mittelwert $\int_0^1 f'(x + t\zeta) dt$ steht. In der Form (*) kann der Mittelwertsatz in höheren Dimensionen nicht gelten. Dies sieht man an der Kurve



Diese Kurve beschreibt eine Schraubenlinie von $f(0) = (0 \ 0 \ 1)^T$ bis $f(1) = (1 \ 0 \ 1)^T$. D.h. es gilt $f(1) - f(0) = (1 \ 0 \ 0)^T$. Allerdings zeigt der Tangentialvektor $f'(x) = (1 \ 2\pi \cos(2\pi t) \ -2\pi \sin(2\pi t))^T$ niemals in diese Richtung.

Die zweite Form (**) gilt jedoch in mehreren Dimensionen, d.h. sogar für Abbildungen $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$. Da dort die Ableitung eine Matrix-wertige Funktion ist, definieren wir für eine solche Funktion $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$ das Integral komponentenweise, d.h. für $A(t) = (a_{ij}(t))_{ij}$ ist

$$\left(\int_a^b A(t) dt \right)_{ij} = \int_a^b a_{ij}(t) dt.$$

Satz 11.2. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Weiter sei $x \in U$ und $\zeta \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Strecke $x + t\zeta, t \in [0, 1]$ ganz in U liegt. Dann gilt

$$f(x + \zeta) - f(x) = \left(\int_0^1 Df(x + t\zeta) dt \right) \cdot \zeta$$

Beachte, dass das Integral wieder eine $m \times n$ Matrix gibt. Durch das Produkt mit dem Vektor $\zeta \in \mathbb{R}^n$ ergibt sich dann ein Vektor in $\mathbb{R}^m$.

Beweis.

Wir betrachten die Funktionen

$$g_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto g_i(t) = f_i(x + t\zeta).$$

Es gilt $g_i = f_i \circ h$ mit der Funktion $h : [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto x + t\zeta$. Es gilt $h'(t) = \zeta \in \mathbb{R}^n$ und daher ist die Ableitung von g_i nach der mehrdimensionalen Kettenregel

$$g'_i(t) = Df_i(h(t))h'(t) = \langle \nabla f_i(x + t\zeta), \zeta \rangle = \sum_{j=1}^n D_j f_i(x + t\zeta) \zeta_j.$$

Nach dem Fundamentalsatz der Differential- und Integralrech-

nung folgt

$$\begin{aligned} f_i(x + \xi) - f_i(x) &= g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g_i'(t) dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j=1}^n D_j f_i(x + t\xi) \xi_j dt \\ &= \sum_{j=1}^n \int_0^1 D_j f_i(x + t\xi) dt \xi_j, \end{aligned}$$

was genau die Behauptung ist. $\square$

Korollar 11.3. In der Situation von Satz 11.2 sei

$$M := \sup_{0 \leq t \leq 1} \|Df(x + t\xi)\|.$$

Die Norm in der Definition von M ist die Operatornorm, welche von der 2-Norm induziert wird.

Dann ist $\|f(x + \xi) - f(x)\|_2 \leq M \|\xi\|_2$.

Das Korollar folgt direkt aus Satz 11.2, wenn man zusätzlich das nächste Lemma kennt:

Lemma 11.4. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Dann gilt

$$\left\| \int_a^b v(t) dt \right\|_2 \leq \int_a^b \|v(t)\|_2 dt.$$

Beweis.

Für $u := \int_a^b v(t) dt$ und $K = \|u\|_2$ folgt aus Linearität und Monotonie des Integrals und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} K^2 &= \langle u, u \rangle = \left\langle \int_a^b v(t) dt, u \right\rangle \\ &= \int_a^b \langle v(t), u \rangle dt \\ &\leq \int_a^b \|v(t)\|_2 \|u\|_2 dt = K \int_a^b \|v(t)\|_2 dt. \end{aligned}$$

$\square$

[Beweis von Korollar 11.3] Es gilt

$$\begin{aligned} \|f(x + \xi) - f(x)\|_2 &= \left\| \int_0^1 Df(x + t\xi) \xi dt \right\|_2 \\ &\leq \int_0^1 \|Df(x + t\xi) \xi\|_2 dt \\ &\leq \int_0^1 \|Df(x + t\xi)\| \|\xi\|_2 dt \leq M \|\xi\|_2. \end{aligned}$$

12 Höhere Ableitungen

12.1 Fréchet-Ableitungen

Die erste Ableitung ist die beste lokale lineare Approximation an die Funktion. Für Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ wird diese lineare Approximation durch eine $m \times n$ Matrix beschrieben, d.h. die Ableitung in einem Punkt hat mn -viele "Daten". Im Falle von stetigen partiellen Ableitungen, sind diese ganzen Daten durch die Ableitungen von allen m Komponentenfunktionen in alle n Richtungen gegeben. Hier sieht man schon, dass höhere Ableitungen sehr viel mehr Daten haben müssen. Zählen wir die möglichen zweiten partiellen Ableitungen, erhalten wir mn^2 solche: Wir können nämlich jede der mn partiellen Ableitungen wieder in alle n Richtungen ableiten. Wir könnten alternativ auch die erste Ableitung einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ als Funktion

$$Df : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n}$$

ansetzen und wenn wir den Raum $\mathbb{R}^{m \times n}$ mit dem Raum $\mathbb{R}^{mn}$ identifizieren, so können wir auch die Ableitung von Df betrachten. Dies ist $D(Df)(x) \in \mathbb{R}^{mn \times n}$ (und wir sehen noch einmal, dass dieses Objekt von mn^2 vielen Daten abhängt). Noch höhere Ableitungen werden noch mehr: Es gibt mn^k viele partielle Ableitungen der Ordnung k . Um hier nicht den Überblick zu verlieren, lohnt es sich, die Sache etwas abstrakter zu betrachten: Wir betrachten Funktionen zwischen zwei reellen Banachräumen V und W (also vollständigen normierten Vektorräumen über dem Körper $\mathbb{R}$ – Sie können ruhig weiterhin an $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ denken). Die Ableitung einer solchen Funktion sollte dann im Sinne von Definition 10.1 eine lineare Abbildung von V nach W sein und wir nehmen in dieser Allgemeinheit die Forderung, dass die Ableitung eine *stetige* lineare Abbildung ist, mit hinzu.

Definition 12.1 (und Satz). Es seien V, W reelle Banach-Räume.

1. Wir bezeichnen mit $L(V, W)$ den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von V nach W . Versehen mit der Operatornorm ist dies wieder ein Banach-Raum.
2. Ist $U \subset V$ offen und $f : U \rightarrow W$, so nennen wir f *Fréchet-differenzierbar* in $x \in U$, wenn es ein $Df(x) \in L(V, W)$ gibt, so dass

$$\lim_{\|h\|_V \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Df(x)h\|_W}{\|h\|_V} = 0.$$

Die lineare Abbildung $Df(x)$ heißt *Fréchet-Ableitung* von f in x . Ist f in jedem Punkt in U Fréchet-differenzierbar, so heißt $Df : U \rightarrow L(V, W)$, $x \mapsto Df(x)$ die *Fréchet-Ableitung* von f .

Man überzeugt sich davon, dass diese Definition äquivalent zur Definition via $f(x+h) = f(x) + Df(x)h + \varphi(h)$ mit $\varphi(h)/\|h\|_V \rightarrow 0$ für $\|h\|_V \rightarrow 0$ ist.

Wir müssen nur zeigen, dass $L(V, W)$ vollständig ist (dass es ein normierter Vektorraum ist, haben wir in Abschnitt 6 schon gesehen). Sei dazu ein $A_n \in L(V, W)$ eine Cauchy-Folge. Dann ist $A_n x$ für jedes $x \in V$ eine Cauchy-Folge in W . Da W vollständig ist, konvergieren all diese Cauchy-Folgen und wir können $Ax := \lim_{n \rightarrow \infty} A_n x$ definieren. Analog zu Satz 4.9 zeigt man nun, dass $\|A_n - A\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Beispiel.

Wir betrachten eine lineare Funktion $f : V \rightarrow W$, $f(x) = Ax$ mit $A \in L(V, W)$. Dann ist für alle x

$$Df(x) = A,$$

denn es gilt

$$\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_W = \|A(x+h) - Ax - Ah\|_W = 0$$

und daher gilt $\|f(x+h) - f(x) - Ah\|_W / \|h\|_V \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$.
 $\triangle$

Da die Fréchet-Ableitung $Df : U \rightarrow L(V, W)$ wieder eine Funktion von einer offenen Menge in einem Banach-Raum in einen weiteren Banach-Raum ist, können wir problemlos höhere Ableitungen definieren:

Definition 12.2. Ist $f : U \rightarrow W$ Fréchet-differenzierbar, so nennen wir f *zweimal Fréchet-differenzierbar*, wenn Df Fréchet-differenzierbar ist und schreiben $D^2 f := DDf$. Es gilt $D^2 f : U \rightarrow L(V, L(V, W))$. Höhere Ableitungen definiert man rekursiv durch $D^{k+1} f = DD^k f$ und es gilt $D^k f : U \rightarrow L(V, L(\dots, L(V, W)) \dots)$.

Mit anderen Worten: Es gilt $D^2 f(x) \in L(V, L(V, W))$, d.h. die zweite Ableitung in einem Punkt x ist eine stetige lineare Abbildung von V in den Raum $L(V, W)$ der stetigen linearen Abbildungen von V nach W .

Lemma 12.3. Der Raum $L(V, L(V, W))$ lässt sich mit dem Raum

$$L_2(V, W) = \{A : V \times V \rightarrow W \mid A \text{ bilinear mit } \|A(x, y)\|_W \leq C\|x\|_V\|y\|_V \text{ für ein } C > 0\}$$

identifizieren.

Beweis.

Zu einem $B \in L(V, L(V, W))$ und $x \in V$ ist $B(x) \in L(V, W)$. Wir identifizieren dieses B also mit $A(x, y) := B(x)(y)$. Dieses A ist per Definition bilinear und es gilt $\|A(x, y)\|_W = \|B(x)(y)\|_W \leq \|B(x)\|_{L(V, W)}\|y\|_V \leq \|B\|\|x\|_V\|y\|_V$, also ist $A \in L_2(V, W)$.

Ist umgekehrt $A \in L_2(V, W)$, so gibt es ein C , so dass $\|A(x, y)\|_W \leq C\|x\|_V\|y\|_V$. Wir können dieses A mit einem $B \in L(V, L(V, W))$ durch $B(x)(y) = A(x, y)$ identifizieren. Schließlich folgt aus $\|B(x)\|_{L(V, W)} = \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|B(x)(y)\|_W = \sup_{\|y\|_V \leq 1} \|A(x, y)\|_W \leq C\|x\|_V$ die Stetigkeit von $B(x)$ für alle x und wegen $\|B\| = \sup_{\|x\|_V \leq 1} \|B(x)\|_{L(V, W)} \leq C$

C auch die Stetigkeit von B . $\square$

Wir können die zweite Ableitung $D^2f(x)$ also auch als stetige bilineare Abbildung von V nach W auffassen (analog zu einer "quadratischen Approximation"). Rekursiv ergibt sich: Die k -te Fréchet-Ableitung $D^k f$ ist eine k -lineare stetige Abbildung von V nach W , d.h. eine stetige Abbildung

$$D^k f(x) : V \times \cdots \times V \rightarrow W, \quad (h_1, \dots, h_k) \rightarrow D^k f(x)[h_1, \dots, h_k]$$

welche in jedem der Argumente $h_1, \dots, h_k$ linear ist.

Beispiel.

Zu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ betrachten $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^T A x = \langle x, Ax \rangle$. Um die erste Ableitung zu bestimmen, berechnen wir

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle x+h, A(x+h) \rangle = \langle x, Ax \rangle + \langle x, Ah \rangle + \langle h, Ax \rangle + \langle h, Ah \rangle \\ &= f(x) + \langle A^T x + Ax, h \rangle + \langle h, Ah \rangle. \end{aligned}$$

Da $|\langle h, Ah \rangle| \leq \|A\| \|h\|_V^2$ gilt und da die Abbildung

$$h \mapsto \langle (A^T + A)x, h \rangle = ((A^T + A)x)^T h$$

linear in h ist, liegt es nahe, dass $Df(x) = ((A^T + A)x)^T$ gilt. Tatsächlich ist

$$\begin{aligned} \frac{|f(x+h) - f(x) - ((A^T + A)x)^T h|}{\|h\|_V} &= \frac{|\langle h, Ah \rangle|}{\|h\|_V} \\ &\leq \|A\| \|h\|_V \rightarrow 0 \quad \text{für } \|h\|_V \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$\triangle$

12.2 Höhere Ableitungen und Multiindizes

Kommen wir nun zum konkreten Fall $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$ zurück und untersuchen den Zusammenhang der höheren Fréchet-Ableitungen mit höheren partiellen Ableitungen.

- Für die erste Ableitung von $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, kann die Fréchet-Ableitung $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ mit der Jacobi-Matrix in $\mathbb{R}^{m \times n}$ identifiziert werden.
- Für $m = 1$ ist $Df(x) \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und kann mit dem Zeilenvektor $\nabla f(x)^T$ identifiziert werden.
- Für $m = 1$ ist die zweite Ableitung $D^2f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine bilineare Abbildung von $\mathbb{R}^n$ to $\mathbb{R}$. D.h. für $h, k \in \mathbb{R}^n$ ist $D^2f(x)[h, k]$ ein Skalar und für jedes h ist $D^2f(x)[h, \cdot] \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ und kann daher mit einem Zeilenvektor identifiziert werden. Tun wir dies für die Standard-Basisvektoren $h = e_1, \dots, e_n$ so erhalten wir n Zeilenvektoren, die wir in

einer $n \times n$ -Matrix anordnen können. Man überlegt sich, dass für diese Matrix gilt

$$D^2 f(x) = (D_i D_j f(x))_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Man nennt diese Matrix die *Hesse-Matrix* von f , und nach dem Satz von Schwarz (Satz 9.4) ist $D^2 f(x)$ symmetrisch, falls die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind. Die Hesse-Matrix von $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in x wird mit

$$(\text{Hess } f)(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bezeichnet.

Für mehrfache partielle Ableitungen in die gleiche Richtung schreiben wir

$$D_i^k f = \underbrace{D_i \cdots D_i}_{k\text{-Mal}} f.$$

Wir führen jetzt eine gute Buchhaltung für die höheren partiellen Ableitungen ein. Dies geht mit Hilfe von Multiindizes:

Definition 12.4. Ein n -Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ von natürlichen Zahlen heißt *Multiindex*. Für einen Multiindex α definieren wir

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad (\text{Ordnung des Multiindex})$$

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Da es nach dem Korollar 9.5 zum Satz von Schwarz bei stetigen partiellen Ableitungen nicht auf die Reihenfolge der Ableitungen ankommt, ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition 12.5. Ist $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ein Multiindex, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ $|\alpha|$ -mal stetig differenzierbar, so definieren wir

$$D^\alpha f := D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Für ein $x \in \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Beispiel.

Für $n = 2$ sind die Ableitungen der Ordnung 1 gegeben durch die Multiindizes

$$\begin{aligned} \alpha = (1, 0), \rightsquigarrow & \quad D^\alpha f(x) = D_1 f(x) \\ \alpha = (0, 1), \rightsquigarrow & \quad D^\alpha f(x) = D_2 f(x). \end{aligned}$$

Nur erwähnt sei der Zusammenhang mit höheren Richtungsableitungen einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Für die erste Ableitung gilt $D_v f(x) = Df(x)[v] = \nabla f(x)^T v = \langle \nabla f(x), v \rangle$ und für zweite Ableitungen gilt $D_h D_v f(x) = D^2 f(x)[h, v] = (\text{Hess } f(x)h)^T v = h^T \text{Hess } f(x)v = \langle h, \text{Hess } f(x)v \rangle$.

Z.B. ist für $\alpha = (1, 3, 0, 1)$: $|\alpha| = 1 + 3 + 0 + 1 = 5$ und $\alpha! = 1!3!0!1! = 6$.

Die Ableitungen der Ordnung 2 sind

$$\begin{aligned}\alpha = (2,0), \rightsquigarrow & D^\alpha f(x) = D_1^2 f(x) \\ \alpha = (1,1), \rightsquigarrow & D^\alpha f(x) = D_2 D_1 f(x) \\ \alpha = (0,2), \rightsquigarrow & D^\alpha f(x) = D_2^2 f(x).\end{aligned}$$

△

13 Taylor-Entwicklung

Mit Hilfe von Multiindizes können wir die Flut von höheren Ableitungen beherrschen und außerdem eine übersichtliche Verallgemeinerung der Taylorschen Formel für Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ angeben. Dabei können wir uns auf den Fall von reellwertigen Funktionen beschränken (für vektorwertige Funktionen muss man die Formel einfach für jede Koordinatenfunktion anwenden).

Als Vorbereitung der Taylor-Formel betrachten wir die Funktion $g(t) = f(x + t\xi)$ und berechnen ihre k -te Ableitung:

Satz 13.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar. Weiterhin sei $x \in U$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ so, dass die Strecke $\{x + t\xi \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ganz in U liegt. Dann ist

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := f(x + t\xi)$$

ebenfalls k -mal stetig differenzierbar und es gilt

$$g^{(k)}(t) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + t\xi) \xi^\alpha.$$

Beweis.

Für die erste Ableitung von g ergibt sich nach der Kettenregel (da $Df = (D_1 f \ \cdots \ D_n f) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$)

$$g'(t) = \frac{d}{dt} f(x + t\xi) = Df(x + t\xi) \xi = \sum_{i=1}^n D_i f(x + t\xi) \xi_i.$$

Wir zeigen nun Induktiv, dass

$$g^{(k)}(t) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_k}$$

gilt (und in dieser Summe sind n^k Summanden: Jeder der Indizes i_j kann die Werte $1, \dots, n$ annehmen).

Den Induktionsanfang haben wir gerade gezeigt. Der Induktionsschritt $k-1 \rightarrow k$ geht wieder mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \frac{d}{dt} g^{(k-1)}(t) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n D_j \left(\sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n D_{i_{k-1}} \cdots D_{i_1} f(x + t\xi) \xi_{i_1} \cdots \xi_{i_{k-1}} \right) \xi_j \end{aligned}$$

Wir müssen noch den Index j in i_k umbenennen und haben den Induktionsschritt gezeigt.

Der Rest des Beweises besteht daraus, die Summe mit Hilfe von Multiindizes neu zu sortieren: Betrachten wir den Summanden zu einem Index-Vektor $(i_1, \dots, i_k)$. Kommt in diesem Vektor der

Zur Erinnerung: Eine Art, der Taylorsche Formel ist: Für eine k -mal stetig differenzierbare Funktion gilt

$$f(x + \xi) = \sum_{m=0}^k \frac{f^{(m)}(x)}{m!} \xi^m + o(|\xi|^k)$$

für $\xi \rightarrow 0$.

Index 1 genau α_1 -mal vor, der Index 2 genau α_2 -mal, usw. so können wir nach dem Satz von Schwarz die Reihenfolge der partiellen Ableitungen beliebig vertauschen und bekommen

$$D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + t\zeta) \zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_k} = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} f(x + t\zeta) \zeta_1^{\alpha_1} \cdots \zeta_n^{\alpha_n} = D^\alpha f(x + t\zeta) \zeta^\alpha.$$

Zählen wir durch, wie viele k -Tupel $(i_1, \dots, i_k)$ mit Einträgen in $\{1, \dots, n\}$ es gibt, bei denen der Index v genau α_v -mal vorkommt (wobei $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = k$ gelten muss), so kommen wir auf genau $\frac{k!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} = \frac{k!}{\alpha!}$. Wir bekommen also

$$\begin{aligned} g^{(k)}(t) &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n D_{i_k} \cdots D_{i_1} f(x + t\zeta) \zeta_{i_1} \cdots \zeta_{i_k} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} (D^\alpha f)(x + t\zeta) \zeta^\alpha \end{aligned}$$

wie behauptet. $\square$

Satz 13.2 (Taylor-Entwicklung mit Lagrange Restglied). Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ $k+1$ -mal stetig differenzierbar, $x \in U$ und $\zeta \in \mathbb{R}^n$, so dass die Verbindungslinie $\{x + t\zeta \mid 0 \leq t \leq 1\}$ in I liegt, so gilt: Es gibt ein $\theta \in [0, 1]$, so dass

$$f(x + \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha + \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\zeta)}{\alpha!} \zeta^\alpha$$

.

Beweis.

Wir wenden die eindimensionale Taylor-Formel für die Funktion $g(t) = f(x + t\zeta)$ an (mit Restglied in Lagrange-Form, d.h. Satz 26.3 aus der Analysis 1). Es gilt

$$g(1) = \sum_{m=0}^k \frac{g^{(m)}(0)}{m!} + \frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!}.$$

Nach Satz 13.1 ist

$$\frac{g^{(m)}(0)}{m!} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha$$

und

$$\frac{g^{(k+1)}(\theta)}{(k+1)!} = \sum_{|\alpha|=k+1} \frac{D^\alpha f(x + \theta\zeta)}{\alpha!} \zeta^\alpha$$

und das zeigt schon die Behauptung. $\square$

Korollar 13.3 (Taylor-Formel mit klein- o -Restglied). Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ k -mal stetig differenzierbar, so gilt für jedes $x \in U$ und $\zeta \in \mathbb{R}^n$, für dass die Verbindungslinie $\{x + t\zeta \mid 0 \leq t \leq 1\}$ in U liegt

$$f(x + \zeta) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \zeta^\alpha + o(\|\zeta\|_2^k) \quad \text{für } \zeta \rightarrow 0.$$

Man bemerke, dass diese Formel fast völlig analog zur eindimensionalen Formel ist. Das liegt an der clever gewählten Schreibweise mit Multiindizes.

Wir nutzen Satz 13.2 mit k statt $k+1$ und bekommen

$$f(x + \xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(\xi) \xi^\alpha$$

mit Funktionen

$$r_\alpha(\xi) = \frac{D^\alpha(x + \theta\xi) - D^\alpha f(x)}{\alpha!}.$$

Da $D^\alpha f$ stetig ist, gilt $r_\alpha(\xi) \rightarrow 0$ für $\xi \rightarrow 0$. Außerdem gilt für $|\alpha| = k$

$$|\xi^\alpha| = |\xi_1^{\alpha_1}| \cdots |\xi_n^{\alpha_n}| \leq \|\xi\|_2^{\alpha_1} \cdots \|\xi\|_2^{\alpha_n} = \|\xi\|_2^k.$$

Es folgt also

$$\sum_{|\alpha|=k} r_\alpha(\xi) \xi^\alpha = o(\|\xi\|_2^k) \quad \text{für } \xi \rightarrow 0.$$

Um die Taylorsche Formel noch mehr zu sortieren, schreiben wir sie als

$$f(x + \xi) = \sum_{j=0}^k \sum_{|\alpha|=j} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha + o(\|\xi\|_2^k), \quad \xi \rightarrow 0.$$

Die Summanden $P_j(\xi) := \sum_{|\alpha|=j} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha$ sind dabei *homogene Polynome* vom Grad j , d.h. es gilt für Skalare λ immer

$$\begin{aligned} P_j(\lambda\xi) &= \sum_{|\alpha|=j} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \prod_{i=1}^n (\lambda\xi_i)^{\alpha_i} \\ &= \sum_{|\alpha|=j} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \lambda^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \prod_{i=1}^n (\xi_i)^{\alpha_i} \\ &= \lambda^j P_j(\xi). \end{aligned}$$

Es gilt z.B.

$$\begin{aligned} P_0(\xi) &= f(x) \\ P_1(\xi) &= \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha f(x) \xi^\alpha = \sum_{i=1}^n D_i f(x) \xi_i = \langle \nabla f(x), \xi \rangle. \end{aligned}$$

Für Approximation zweiter Ordnung ist die Summe über alle Multiindizes mit $|\alpha| = 2$ genau die Summe über alle zweiten partiellen Ableitungen. Mit Hilfe der Hesse-Matrix und dem Satz von Schwarz können wir dies wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned} P_2(\xi) &= \sum_{|\alpha|=2} \frac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} \xi^\alpha \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{D_i D_j f(x)}{2} \xi_i \xi_j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\text{Hess } f(x) \xi)_i \xi_i \\ &= \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle = \frac{1}{2} \xi^T (\text{Hess } f(x)) \xi. \end{aligned}$$

Wir bekommen also folgende Darstellungen für die Taylor-Approximation erster und zweiter Ordnung:

1. Wir nehmen $k = 1$ in Korollar 13.3 und bekommen mit den Überlegungen von oben für stetig differenzierbares f

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + o(\|\xi\|_2), \quad \xi \rightarrow 0.$$

2. Für $k = 2$ bekommen wir entsprechend für zweimal stetig differenzierbares f

$$f(x + \xi) = f(x) + \langle \nabla f(x), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle + o(\|\xi\|_2^2), \quad \xi \rightarrow 0.$$

Beispiel.

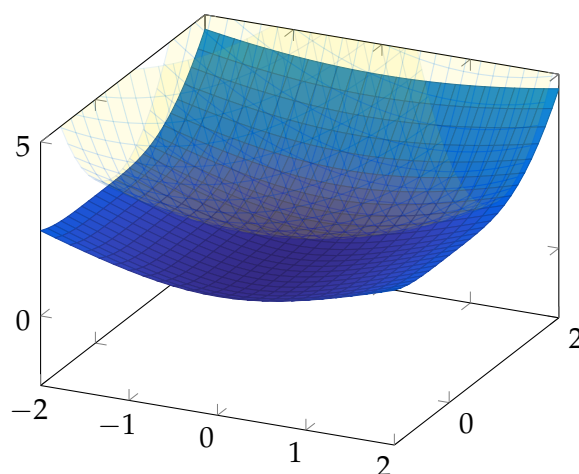
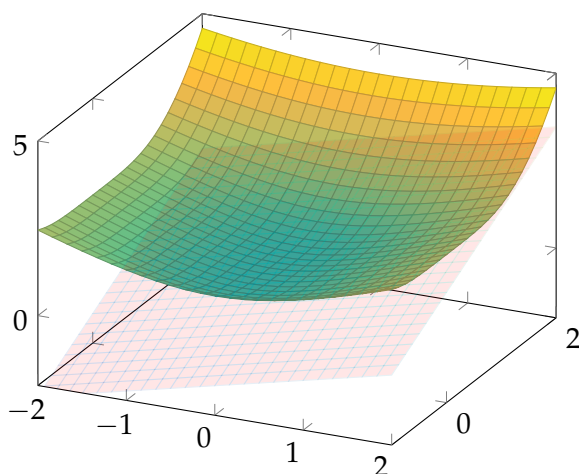
Wir betrachten die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 + x^2 + y^4}$. Für die Taylor-Approximation der Ordnung 1 berechnen wir

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} D_1 f(x, y) \\ D_2 f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^4)^{-1/2} 2x \\ \frac{1}{2}(1 + x^2 + y^4)^{-1/2} 4y^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^4}} \\ \frac{2y^3}{\sqrt{1 + x^2 + y^4}} \end{pmatrix}.$$

Im Punkt $(x, y) = (1, 1)$ gilt daher

$$\begin{aligned} f(1 + h, 1 + k) &= f(1, 1) + \langle \nabla f(1, 1), (h, k) \rangle + o(\sqrt{h^2 + k^2}), \quad h, k \rightarrow 0 \\ &= \sqrt{3} + \frac{h}{\sqrt{3}} + \frac{2k}{\sqrt{3}} + o(\sqrt{h^2 + k^2}), \quad h, k \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix lässt sich ebenfalls berechnen und liefert eine Approximation durch eine quadratische Funktion. Im linken Bild ist der Funktionsgraph und die lineare Approximation zu sehen, rechts der Graph und die Approximation zweiter Ordnung.



△

14 Lokale Extrema

Mit Hilfe der Taylor-Approximation können wir lokale Extrema von reellwertigen Funktionen bestimmen.

Definition 14.1. Für $U \subset \mathbb{R}^n$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ heißt $x \in U$ *lokales Maximum* (bzw. *Minimum*), wenn es eine Umgebung $V \subset U$ von x gibt, so dass für alle $y \in V$ gilt

$$f(y) \leq f(x) \quad (\text{bzw. } f(y) \geq f(x)).$$

Ein lokales *Extremum* ist ein lokales Maximum oder Minimum. Ist die Ungleichung strikt für $x \neq y$, so heißt das Extremum *strikt*.

Es gilt ein notwendiges Kriterium für lokale Extrema, welches vollständig analog zum eindimensionalen Fall ist: Die Ableitung in einem Extremum ist notwendigerweise Null.

Satz 14.2 (Notwendige Bedingung für lokale Extrema). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ partiell differenzierbar. Dann gilt: Hat f in $x \in U$ ein lokales Extremum, so ist $\nabla f(x) = 0$.*

Beweis.

Wir betrachten die Funktionen

$$g_i(t) = f(x + te_i)$$

für $i = 1, \dots, n$. Dann ist g_i auf einem Intervall $] -\epsilon, \epsilon[$ definiert und dort differenzierbar. Wenn f in x ein lokales Extremum hat, so hat jedes g_i ein lokales Extremum in $t = 0$, und also gilt

$$g'_i(0) = 0.$$

Da $g'_i(0) = D_i f(x)$, folgt $\nabla f(x) = 0$. □

Im eindimensionalen hatten wir auch ein hinreichendes Kriterium, welches das Vorzeichen der zweiten Ableitung benutzte. Hier ist die zweite Ableitung nun eine Matrix (die Hesse-Matrix) und wir müssen eine sinnvolle Verallgemeinerung des Begriffes "Vorzeichen" finden.

In einem lokalen Extremum x sieht die Taylor-Approximation zweiter Ordnung (da dort $\nabla f(x) = 0$ gilt)

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2} \langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle + o(\|\xi\|_2^2).$$

Wir vermuten, dass wir ein lokales Minimum haben, wenn die Funktion $\xi \mapsto \langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle$ für $\xi \neq 0$ aber klein genug positiv ist und ein lokales Maximum, wenn entsprechend $\langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle < 0$ für kleine $\xi \neq 0$ gilt. Da die Funktion $\xi \mapsto \langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle$ homogen vom Grad 2 ist, hat $\langle \text{Hess } f(x) \xi, \xi \rangle$ in diesen Fällen auf ganz $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ das gleiche Vorzeichen. Dies motiviert die folgenden Begriffe:

Definition 14.3. Eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

1. *positiv definit*, wenn für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle A\xi, \xi \rangle > 0.$$

2. *positiv semidefinit*, wenn für alle $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\langle A\xi, \xi \rangle \geq 0.$$

3. *negativ (semi-)definit*, wenn $-A$ positiv (semi-)definit ist.

4. *indefinit*, wenn es Vektoren $\xi, \eta \in \mathbb{R}^n$ gibt, so dass

$$\langle A\xi, \xi \rangle > 0 \quad \text{und} \quad \langle A\eta, \eta \rangle < 0.$$

Man kann die Definitheit einer symmetrischen Matrix mit Hilfe der Eigenwerte bestimmen: Wir erinnern dazu an den Spektralsatz für symmetrische Matrizen:

Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, so hat A Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ und zugehörige Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n$, die eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ bilden.

Lemma 14.4. Ist A symmetrisch mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so gilt mit $\lambda_{\min} = \min_{i=1, \dots, n} \lambda_i$ und $\lambda_{\max} = \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i$ für alle ξ

$$\lambda_{\min} \|\xi\|_2^2 \leq \langle A\xi, \xi \rangle \leq \lambda_{\max} \|\xi\|_2^2.$$

Beweis.

Wir benutzen den Spektralsatz für symmetrische Matrizen: Zu einem symmetrischen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existiert eine Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$ aus Eigenvektoren, d.h. es gilt $Av_i = \lambda_i v_i$ mit reellen λ_i und $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$

Wir entwickeln ξ in die Orthonormalbasis $(v_1, \dots, v_n)$, d.h. es gilt $\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$. Dann ist $A\xi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i$ und da die v_i orthonormal sind folgt

$$\|\xi\|_2^2 = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2.$$

Ebenso sieht man

$$\langle A\xi, \xi \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i v_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \lambda_i,$$

woraus direkt die Behauptung folgt. $\square$

Korollar 14.5. Eine symmetrische Matrix A ist positiv (bzw. negativ) definit, wenn für alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gilt $\lambda_i > 0$, $i = 1, \dots, n$ (bzw. < 0). Gilt $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ (bzw. ≤ 0), so ist A positiv (bzw. negativ) semidefinit.

Satz 14.6. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und gilt $\nabla f(x) = 0$ in einem $x \in U$, so gilt:

- i) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ positiv definit, so ist x ein striktes lokales Minimum von f .
- ii) Ist $(\text{Hess } f)(x)$ negativ definit, so ist x ein striktes lokales Maximum von f .

Beweis.

Es sei $A := (\text{Hess } f)(x)$. Da $\nabla f(x) = 0$ gilt, ist die Taylor-Entwicklung zweiter Ordnung in x

$$f(x + \xi) = f(x) + \frac{1}{2} \langle A\xi, \xi \rangle + \varphi(\xi) \quad (*)$$

mit einem φ welches für $\xi \rightarrow 0$ schneller als $\|\xi\|^2$ gegen Null geht. Genauer: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $\|\xi\|_2 < \delta$ gilt

$$|\varphi(\xi)| \leq \epsilon \|\xi\|_2^2. \quad (**)$$

- i) Sei nun A positiv definit, das heißt der kleinste Eigenwert $\lambda_{\min}$ ist positiv. Wir wählen $\delta > 0$ so klein, dass

$$|\varphi(\xi)| \leq \frac{\lambda_{\min}}{4} \|\xi\|_2^2.$$

Damit folgt aus $(*)$ und $(**)$

$$f(x + \xi) \geq f(x) + \frac{\lambda_{\min}}{2} \|\xi\|_2^2 - \frac{\lambda_{\min}}{4} \|\xi\|_2^2 = f(x) + \frac{\lambda_{\min}}{4} \|\xi\|_2^2.$$

Also ist $f(x + \xi) > f(x)$ für $0 < \|\xi\|_2 < \delta$.

- ii) Diesen Fall führt man auf den ersten Fall zurück, indem man $-f$ statt f betrachtet.

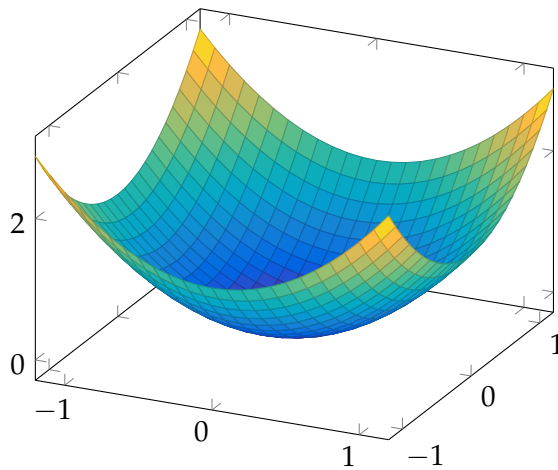
□

Beispiel.

1. Wir betrachten $f(x, y) = x^2 + y^2$. Der Gradient ist $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$ und genau im Ursprung gleich Null. Da die Hesse-Matrix

$$(\text{Hess } f)(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

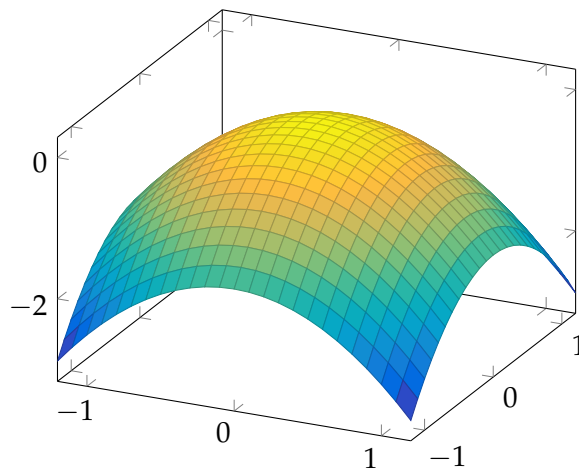
in jedem Punkt (und daher auch im Ursprung) positiv definit ist (2 ist der einzige Eigenwert), liegt in Ursprung ein lokales Minimum vor.



2. Für $f(x, y) = -x^2 - y^2$ ist

$$(\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

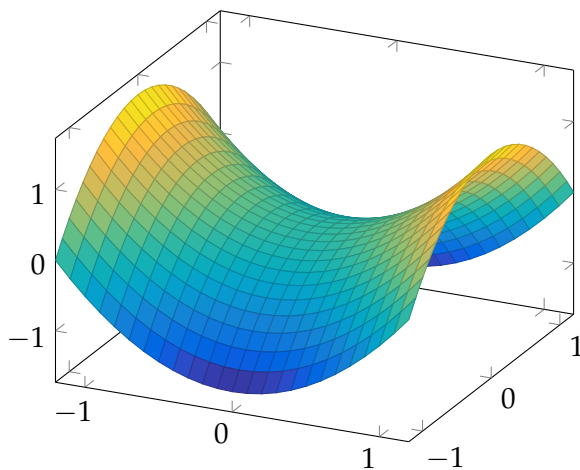
negativ definit und daher ist im Ursprung ein lokales Maximum.



3. Die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ hat die indefinite Hesse-Matrix

$$(\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Tatsächlich liegt im Ursprung ein Sattelpunkt vor.



4. Die Funktion $f(x, y) = x^3 - xy^2$ hat den Gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - y^2 \\ -2xy \end{pmatrix}.$$

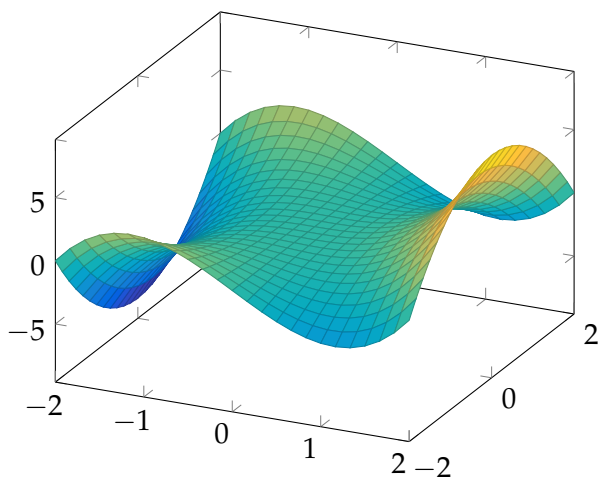
Daher ist das einzige potentielle Extremum $(x, y) = (0, 0)$.
Die Hesse Matrix ist

$$(\text{Hess } f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -2y \\ -2y & -2x \end{pmatrix}$$

im Ursprung gilt also

$$(\text{Hess } f)(x) = 0_{2 \times 2}.$$

Wir können also weder auf ein lokales Maximum noch auf ein Minimum schließen. Den Graphen dieser Funktion nennt man auch einen "Affensattel":



△

15 Lösen von nichtlinearen Gleichungen

15.1 Der Banachsche Fixpunktsatz

Während es für das Lösen von Systemen von linearen Gleichungen eine übersichtliche Theorie gibt, ist das Lösen und die Lösbarkeit von nichtlinearen Gleichungen viel unübersichtlicher. Es gibt kein Verfahren welches immer in endlich vielen Rechenschritten eine Lösung einer nichtlinearen Gleichung bestimmt. Es gibt jedoch iterative Verfahren, die eine Folge von Iterierten produzieren die gegen eine Lösung konvergieren.

Nichtlineare Gleichungen gibt es in verschiedenen Typen, z.B.:

- Explizite Gleichungen: Für jedes y , finde x , so dass $f(x) = y$.
- Nullstellen-Probleme: Finde x , so dass $f(x) = 0$.
- Fixpunktprobleme: Finde x , so dass $f(x) = x$.
- Implizite Gleichungen: Für jedes x , finde y , so dass $f(x, y) = 0$.

Eine explizite Gleichung $f(x) = y$ ist natürlich äquivalent zum Nullstellen-Problem $g(x) := f(x) - y = 0$. Ebenso ist ein Nullstellen-Problem $f(x) = 0$ äquivalent zum Fixpunktproblem $g(x) := x - f(x) = x$. Eine implizite Gleichung $f(x, y) = 0$ ist ein Nullstellen-Problem für $g_x(y) := f(x, y) = 0$, welches von einem Parameter x abhängt.

Beispiel.

Dass die Fixpunktgleichung $\cos(x) = x$ genau eine Lösung hat, lässt sich zum Beispiel mit Hilfe des Zwischenwertsatzes einsehen. Sie lässt sich auch durch ein erstaunlich einfaches Iterationsverfahren lösen: Zu beliebigem x_1 bildet man

$$x_{k+1} = \cos(x_k).$$

Bemerken wir zuerst: Falls die Folge (x_k) konvergiert, so konvergiert sie gegen eine Lösung: Gilt nämlich $x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ so gilt auch $x_{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x^*$ und da der Kosinus stetig ist, folgt

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \cos(x_k) = \cos(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \cos(x^*).$$

Und tatsächlich scheint die Fixpunktiteration zu konvergieren:

k	x_k
1	1.00000
2	0.54030
3	0.85755
4	0.65429
5	0.79348
6	0.70137
7	0.76396

```

8 0.72210
9 0.75042
10 0.73140
11 0.74424
12 0.73560
13 0.74143
14 0.73751
15 0.74015
16 0.73837
17 0.73957
18 0.73876
19 0.73930
20 0.73894

```

(der Grenzwert ist $x \approx 0,73908513321516064166\dots$ und ist die eindeutige Lösung von $x = \cos(x)$).

Für $f(x) = 3,8x(1-x)$ hat die Fixpunktgleichung $f(x) = x$ genau zwei Lösungen, nämlich $x = 0$ und $x = 14/19 \approx 0,7368$. Die Iteration $x_{k+1} = f(x_k)$ konvergiert in diesem Fall allerdings nicht (außer wenn man genau einem Fixpunkt als x_1 nimmt): Zum Beispiel ergibt sich für $x_1 = 0,5$

```

1 0.50000
2 0.95000
3 0.18050
4 0.56210
5 0.93535
6 0.22979
7 0.67256
8 0.83685
9 0.51882
10 0.94865
11 0.18510
12 0.57317
13 0.92965

```

△

Das Konvergenzverhalten von Fixpunktiterationen wird durch den Banachschen Fixpunktsatz beschrieben. Um ihn zu formulieren, führen wir noch zwei Begriffe ein:

Definition 15.1. Sind (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume, so heißt $f : X \rightarrow Y$ *Lipschitz stetig* mit *Lipschitz-Konstante* L , wenn für alle $x, x' \in X$ gilt

$$d_Y(f(x), f(x')) \leq L d_X(x, x').$$

Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante $L < 1$, so heißt f *Kontraktion*.

Jedes L welches diese Ungleichung erfüllt wird Lipschitz-Konstante genannt. Manchmal ist es hilfreich, die kleinstmögliche Lipschitz-Konstante zu benutzen. Diese ist

$$\text{Lip}(f) = \sup_{x \neq x'} \frac{d_Y(f(x), f(x'))}{d_X(x, x')}.$$

Man sieht schnell, dass Lipschitz-stetige Funktionen auch stetig sind: Gilt $x_n \rightarrow x$, so gilt $d_Y(f(x_n), f(x)) \leq d_X(x_n, x) \rightarrow 0$, also $f(x_n) \rightarrow f(x)$.

Satz 15.2 (Banachscher Fixpunktsatz). *Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $\Phi : X \rightarrow X$ eine Kontraktion. Dann hat Φ genau einen Fixpunkt, d.h. es gibt genau ein $x^* \in X$, mit $\Phi(x^*) = x^*$.*

Weiterhin gilt für jedes $x_0 \in X$, dass die durch $x_k = \Phi(x_{k-1})$ rekursiv definierte Folge gegen x^ konvergiert.*

Beweis.

Es sei $L = \text{Lip}(\Phi) < 1$.

1. Zeigen wir erst die Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe zwei Fixpunkte x^* und y^* . Dann gilt

$$d(x^*, y^*) = d(\Phi(x^*), \Phi(y^*)) \leq Ld(x^*, y^*),$$

woraus $d(x^*, y^*) = 0$ und damit $x^* = y^*$ folgt.

2. Zur Existenz: Sei $x_0 \in X$ und x_k definiert wie im Satz. Dann gilt

$$\begin{aligned} d(x_{k+1}, x_k) &= d(\Phi(x_k), \Phi(x_{k-1})) \\ &\leq Ld(x_k, x_{k-1}). \end{aligned}$$

Rekursiv ergibt das

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq L^2 d(x_{k-1}, x_{k-2}) \leq \dots \leq L^k d(x_1, x_0).$$

Wir setzen $c := d(x_1, x_0)$ und es folgt für $m > k$

$$d(x_m, x_k) \leq \sum_{i=k}^{m-1} d(x_{i+1}, x_i) \leq \sum_{i=k}^{\infty} L^i c \leq \frac{L^k c}{1-L}. \quad (*)$$

Da $L^k \rightarrow 0$ gilt, (x_k) eine Cauchy-Folge in X und daher konvergent mit Grenzwert x^* . Bilden wir in der Rekursion $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ auf beiden Seiten den Grenzwert $k \rightarrow \infty$, so folgt mit der Stetigkeit von Φ :

$$x^* = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(x_k) = \Phi(\lim_{k \rightarrow \infty} x_k) = \Phi(x^*),$$

also ist x^* ein Fixpunkt. □

Aus dem Beweis des Satzes kann man noch mehr herauslesen: Bilden wir in (*) den Grenzwert $m \rightarrow \infty$ so folgt (da die Metrik in beiden Komponenten stetig ist) die Abschätzung

$$d(x^*, x_k) \leq \frac{L^k}{1-L} d(x_1, x_0),$$

das heißt, wir können schon nach dem ersten Schritt absehen, wie lange es höchstens dauert, bis wir eine gewisse Genauigkeit erreicht haben.

15.2 Anwendungen des Fixpunktsatzes

Der Banachsche Fixpunktsatz ist nur nicht hilfreich, weil er ein konvergentes Verfahren zum Lösen von nichtlinearen Gleichungen liefert, sondern auch, weil er ein einfaches Kriterium angibt, mit dem man die eindeutige Lösbarkeit von einer nichtlinearen Gleichung zeigen kann.

Um Lipschitz-Stetigkeit bei Funktionen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ zu erkennen gibt es ein einfaches Kriterium, welches direkt aus dem Korollar 11.3 aus dem Mittelwertsatz folgt:

Lemma 15.3. Ist $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar mit $\sup_{x \in U} \|Df(x)\| \leq L$, so ist f Lipschitz-stetig mit Konstante L .

Beweis.

Wir wenden Korollar 11.3 mit $y = x + \xi$ an: Es gilt dann nämlich

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq L\|x - y\|_2.$$

□

Damit können wir die vorigen beiden Beispiele erklären:

Beispiel.

Wir betrachten $\cos : [1/10, 1] \rightarrow [1/10, 1]$. Das Intervall $I = [1/10, 1]$ ist dabei ausgewählt, dass $\cos(I) \subset I$ gilt und außerdem gilt $\sup_{x \in I} |\cos'(x)| < 1$. Daher ist $\cos$ auf diesem Intervall eine Kontraktion und es gibt genau einen Fixpunkt gegen den die Iteration konvergiert.

Im zweiten Fall hat $f(x) = 3,8x(1 - x)$ die Fixpunkte $x_1 = 0$ und $x_2 = 14/19$ aber es gilt $f'(0) = 3,8 > 1$ und $|f'(14/19)| = |-1,8| > 1$. Daher ist f in keiner Umgebung der Fixpunkte eine Kontraktion und die Fixpunktiteration konvergiert tatsächlich nicht. △

Schauen wir uns jetzt implizite Gleichungen an. Wir betrachten den einfachsten Fall: Zu einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und einer Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ fragen wir uns, ob man die Gleichung $f(x, y) = 0$ nach y auflösen kann. Nehmen wir an, wir kennen schon eine Lösung (x_0, y_0) (d.h., es gilt $f(x_0, y_0) = 0$). Wir versuchen nun für x nahe bei x_0 eine Lösung von $f(x, y) = 0$ zu konstruieren: Das können wir als Fixpunkt-Problem schreiben, indem wir zu diesem x

$$h(y) := y - f(x, y)$$

setzen. Dann gilt:

$$h(y) = y \iff f(x, y) = 0.$$

Allerdings muss h keine Kontraktion sein. Wir können aber immer eine geeignete Kontraktion definieren, falls $b = D_2 f(x_0, y_0) \neq 0$ gilt: In diesem Fall definieren wir

$$h_x(y) := y - \frac{1}{b} f(x, y).$$

Eine Menge U heißt konvex, wenn für alle x, y in U und $\lambda \in [0, 1]$ immer $\lambda x + (1 - \lambda)y \in U$ gilt. Mit anderen Worten: Wenn zu zwei Punkten aus der Menge auch immer die ganze Verbindungsstrecke mit in der Menge liegt.

Dann gilt wieder $h_x(y) = y$ genau dann, wenn $f(x, y) = 0$ gilt, und außerdem ist für $x = x_0$

$$h'_{x_0}(y_0) = 1 - \frac{1}{b} D_2 f(x_0, y_0) = 0.$$

Ist h'_x nicht nur in y , sondern auch in x stetig, so ist h'_x in einer Umgebung von (x_0, y_0) eine Kontraktion und nach dem Banachschen Fixpunktsatz hat die Gleichung $f(x, y) = 0$ genau eine Lösung. Darüber wird in dieser Umgebung eine Funktion g durch $f(x, g(x)) = 0$ definiert. (Und wir können $g(x)$ bestimmen, indem wir $y_{k+1} = h_x(y_k)$ iterieren.)

Wir betrachten diese Situation noch etwas genauer: Gilt $f(x, g(x)) = 0$ für alle x in einem Intervall I gilt, so können wir diese Gleichung mit der Kettenregel ableiten. Wir betrachten dazu die Hilfsfunktion $H : I \rightarrow U$, $H(x) = (x, g(x))^T$. Dann müssen wir die Verknüpfung $(f \circ H)(x)$ ableiten. Da $DH(x) = (1, g'(x))^T$ gilt, folgt

$$0 = (D_1 f(x, g(x)) \quad D_2 f(x, g(x))) \begin{pmatrix} 1 \\ g'(x) \end{pmatrix} = D_1 f(x, g(x)) + D_2 f(x, g(x)) g'(x).$$

Ist $D_2 f(x, g(x)) \neq 0$, so können wir auflösen

$$g'(x) = -\frac{D_1 f(x, g(x))}{D_2 f(x, g(x))}.$$

Wir können also die Ableitung von g an der Stelle x bestimmen, ohne eine Formel für die Funktion g selbst zu benötigen.

Beispiel.

Auf $I =]-a, a[$ betrachten wir $g(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$. Dieses g erfüllt die Gleichung

$$g(x)^2 = a^2 - x^2 \quad \text{oder anders:} \quad x^2 + g(x)^2 - a^2 = 0.$$

Wir betrachten die Funktion $F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2$. Leiten wir $F(x, g(x)) = x^2 + g(x)^2 - a^2 = 0$ nach x ab, bekommen wir

$$2x + 2g(x)g'(x) = 0$$

was wir (da $g(x) \neq 0$ für alle x) auflösen können zu

$$g'(x) = -\frac{x}{g(x)} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

△

16 Implizite Funktionen

Wir benötigen noch ein technisches Hilfsmittel:

Lemma 16.1. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ und $A : U \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m}$ eine stetige Matrixwertige Abbildung. Ist dann $A(x_0)$ für ein $x_0 \in U$ invertierbar, so gibt es eine Umgebung $V \subset U$ von x_0 , so dass $A(y)$ für alle $y \in V$ invertierbar ist.

Beweis.

Ist $x \mapsto A(x)$ stetig, so sind alle Komponentenabbildungen $x \mapsto A(x)_{ij}$ stetig. Da die Determinante $\det(A(x))$ sich als Polynom in den Einträgen von $A(x)$ ausdrücken lässt, ist die Abbildung $x \mapsto \det(A(x))$ ebenfalls stetig. Da nun $\det(A(x_0)) \neq 0$ gilt, gibt es eine Umgebung V von x_0 , so dass für $y \in V$ wieder $\det(A(y)) \neq 0$ gilt, was die Behauptung zeigt. $\square$

Kommen wir zum Satz über implizite Funktionen. Im Beweis des Satzes werden wir den Banachschen Fixpunktsatz zweimal anwenden: Einmal im $\mathbb{R}^m$ und einmal im Banach-Raum $C_b(U, \mathbb{R}^m)$ der beschränkten und stetigen Funktionen von einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ versehen mit der Supremumsnorm.

Satz 16.2 (Satz über implizite Funktionen). Es seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$ und $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen und

$$F : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad (x, y) \mapsto F(x, y)$$

stetig differenzierbar und es sei $(a, b) \in U_1 \times U_2$ mit $F(a, b) = 0$. Ist dann die $m \times m$ -Matrix

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

in (a, b) invertierbar, so gibt es offene Umgebungen $V_1 \subset U_1$ und $V_2 \subset U_2$ von a bzw. b und eine stetig differenzierbare Funktion $g : V_1 \rightarrow V_2$ mit $g(a) = b$, so dass für alle $x \in V_1$ gilt

$$F(x, g(x)) = 0.$$

In umgekehrt $F(x, y) = 0$ für $(x, y) \in V_1 \times V_2$, so gilt $y = g(x)$.

Teilen wir die Jacobi-Matrix von F ein in

$$\begin{aligned} DF(x, y) &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(x, y) & \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m}(x, y) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_k}(x, y) & \frac{\partial F_m}{\partial y_1}(x, y) & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m}(x, y) \end{array} \right] \\ &=: \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \mid \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \right] \end{aligned}$$

mit $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times k}$ und $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, so gilt für die Jacobi-Matrix von g

$$Dg(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, g(x))\right)^{-1} \frac{\partial F}{\partial x}(x, g(x)).$$

Beweis.

1. Umschreiben in ein Fixpunkt-Problem: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $(a, b) = (0, 0)$ (was wir durch Verschiebung erreichen können).

Wir definieren $B := \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$ und $G : U_1 \times U_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ durch

$$G(x, y) := y - B^{-1}F(x, y).$$

Dann gilt

$$F(x, y) = 0 \iff y = G(x, y).$$

Wir haben also das Problem der Gleichung $F(x, y) = 0$ in ein Fixpunktproblem überführt.

2. Lösen der Fixpunktgleichung mit dem Banachschen Fixpunktsatz: Es gilt

$$\frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = E_m - B^{-1} \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$$

und es folgt für den Punkt $(0, 0)$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 0_{m \times m}.$$

Da alle Einträge von $\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)$ stetige Funktionen sind und außerdem $\|\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0)\| = 0$ gilt, gibt es Nullumgebungen $W_1 \subset U_1$ und $W_2 \subset U_2$, so dass für $(x, y) \in W_1 \times W_2$ gilt

$$\|\frac{\partial G}{\partial y}(x, y)\| \leq \frac{1}{2}. \quad (*)$$

Weiterhin wählen wir ein $r > 0$, sodass gilt

$$V_2 := \{x \in W_2 \mid \|x\|_2 \leq r\} \subset W_2.$$

Da $G(0, 0) = 0$ und G stetig ist, gibt es eine offene Nullumgebung $V_1 \subset W_1$ mit

$$\sup_{x \in V_1} \|G(x, 0)\|_2 =: \epsilon \leq \frac{r}{2}. \quad (**)$$

Außerdem ist G wegen $(*)$ und Lemma 15.3 in der zweiten Koordinate Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{2}$. Aus $(**)$ folgt für alle $x \in V_1$ und $y \in V_2$

$$\begin{aligned} \|G(x, y)\|_2 &\leq \|G(x, y) - G(x, 0)\|_2 + \|G(x, 0)\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2}\|y\|_2 + \|G(x, 0)\|_2 \\ &\leq \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r. \end{aligned} \quad (3*)$$

Damit ist die Abbildung $y \mapsto G(x, y)$ eine Kontraktion der abgeschlossenen Kugel V_2 in sich selbst. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz gibt es also zu jedem $x \in V_1$ genau ein $y \in V_2$, so dass $G(x, y) = y$ gilt und das war (nach Schritt 1) genau dann der Fall, wenn $F(x, y) = 0$ gilt. Dies gibt durch $g(x) := y$ eine Abbildung $g : V_1 \rightarrow V_2$.

3. Zeige Stetigkeit von g : Wir wenden den Banachschen Fixpunktsatz noch einmal an, aber diesmal *im Banach-Raum* $C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$ der stetigen und beschränkten Funktionen von V_1 nach $\mathbb{R}^m$, versehen mit der Supremumsnorm: Jedem $\alpha \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$ mit

$$\|\alpha\|_{\sup} \leq r$$

ordnen wir eine Funktion $\beta : V_1 \rightarrow \mathbb{R}^m$ zu, welche durch die Gleichung

$$\beta(x) := G(x, \alpha(x))$$

definiert wird. Dies definiert via $\Phi(\alpha) := \beta$ eine Abbildung $\Phi : C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \rightarrow C_b(V_1, \mathbb{R}^m)$. Wegen (3*) folgt

$$\|\Phi(\alpha)\|_{\sup} = \|\beta\|_{\sup} = \|G(x, \alpha(x))\|_{\sup} \leq r.$$

Das heißt, die Abbildung $\Phi : \alpha \mapsto \beta$ ist eine Selbstabbildung der Menge

$$A := \{\alpha \in C_b(V_1, \mathbb{R}^m) \mid \|\alpha\|_{\sup} \leq r\}$$

in sich selbst. Im vorigen Schritt hatten wir gesehen, dass G in der zweiten Koordinate Lipschitz-stetig mit Konstante $\frac{1}{2}$ ist und daher gilt für $\alpha_1, \alpha_2 \in A$

$$\begin{aligned} \|\Phi(\alpha_1) - \Phi(\alpha_2)\|_{\sup} &= \sup_{x \in V_1} \|G(x, \alpha_1(x)) - G(x, \alpha_2(x))\|_2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_{x \in V_1} \|\alpha_1(x) - \alpha_2(x)\|_2 = \frac{1}{2} \|\alpha_1 - \alpha_2\|_{\sup}. \end{aligned}$$

Das heißt, die Abbildung $\Phi : A \rightarrow A$ ist eine Kontraktion und hat daher genau einen Fixpunkt, $g \in A$ und dies zeigt, dass das g aus dem vorigen Schritt tatsächlich stetig ist.

4. Zeige, dass g differenzierbar ist: Da $\frac{\partial F}{\partial y}$ im Nullpunkt invertierbar ist, ist es nach Lemma 16.1 auch in einer Nullumgebung invertierbar. Wir nehmen an, dass V_1 schon eine solche Nullumgebung ist (wenn nicht, verkleinern wir V_1 weiter). Wir zeigen nun, dass g in $0 \in V_1$ differenzierbar ist (der Beweis für andere Punkte in V_1 ist analog): Wir definieren

$$A := \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \in \mathbb{R}^{m \times k}$$

(und $B = \frac{\partial F}{\partial y}(0,0)$ hatten wir schon im ersten Schritt definiert). Da F in $(0,0)$ differenzierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} F(x, y) &= F(0,0) + DF(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varphi(x, y) \\ &= F(0,0) + Ax + By + \varphi(x, y) \\ \varphi(x, y) &= o(\|(x, y)\|_2), \quad (x, y) \rightarrow (0,0). \end{aligned}$$

Wegen $F(0,0) = g(0)$ und $F(x, g(x)) = 0$ folgt $0 = F(x, g(x)) = Ax + Bg(x) + \varphi(x, g(x))$ und

$$g(x) = g(0) - B^{-1}Ax - B^{-1}\varphi(x, g(x)). \quad (4^*)$$

Wir müssen nur noch zeigen, dass

$$\psi(x) := B^{-1}\varphi(x, g(x)) = o(\|x\|_2), \quad x \rightarrow 0 \quad (5^*)$$

gilt.

- (a) Zeige: Es gibt Nullumgebung $V'_1 \subset V_1$ und $K > 0$, so dass für $x \in V'_1$ gilt

$$\|g(x)\|_2 \leq K\|x\|_2.$$

Dazu setzen wir $c_1 := \|B^{-1}A\|$ und $c_2 := \|B^{-1}\|$. Wegen $\varphi(x, y) = o(\|(x, y)\|_2)$, $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, gibt es zu $\epsilon = 1/(2c_2)$ eine Nullumgebung $V' \subset V_1 \times V_2$, so dass für alle $(x, y) \in V'$ gilt

$$\|\varphi(x, y)\|_2 \leq \epsilon \|(x, y)\|_2 \leq \frac{1}{2c_2}(\|x\|_2 + \|y\|_2).$$

Da g stetig ist, gibt es eine Nullumgebung $V'_1 \subset V_1$, so dass der Graph von $g|_{V'_1}$ ganz in V' enthalten ist. Für $x \in V'_1$ gilt

$$\|\varphi(x, g(x))\|_2 \leq \frac{1}{2c_2}(\|x\|_2 + \|g(x)\|_2).$$

Wegen (4^*) gilt

$$\|g(x)\|_2 \leq c_1\|x\|_2 + c_2\|\varphi(x, g(x))\|_2 \leq (c_1 + \frac{1}{2})\|x\|_2 + \frac{1}{2}\|g(x)\|_2,$$

also

$$\|g(x)\|_2 \leq \underbrace{(2c_1 + 1)}_{=:K}\|x\|_2.$$

- (b) Zeige (5^*) : Wir haben also gezeigt, dass es ein solches K gibt, und daraus folgt

$$\varphi(x, g(x)) = o(\|(x, g(x))\|_2) = o(\|x\|_2 + \|g(x)\|_2) = o(\|x\|_2), \quad x \rightarrow 0$$

woraus

$$\psi(x) = o(\|x\|_2), \quad x \rightarrow 0$$

folgt.

Dies zeigt (5^*) und damit die Differenzierbarkeit von g in 0 mit

$$Dg(0) = -B^{-1}A = -\left(\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)\right)^{-1}\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)$$

und der Beweis ist abgeschlossen.

□

17 Der Umkehrsatz

In der Analysis 1 hatten wir bewiesen, dass eine differenzierbare Funktion f mit $f'(x_0) \neq 0$ in einer Umgebung von x_0 umkehrbar mit differenzierbarer Umkehrfunktion ist. Außerdem hatten wir die Formel $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$ gezeigt. Ein analoger Satz gilt auch in höheren Dimensionen. Dabei ist es nicht klar, unter welchen Voraussetzungen eine Umkehrfunktion existiert und ob diese, falls sie existiert, differenzierbar sein muss. Wenn man erst einmal weiß, dass eine differenzierbare Umkehrfunktion existiert, so ist es einfach, sich zu überlegen, wie die Ableitung der Umkehrfunktion ist: Sind U_1 und U_2 offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ und ist $f : U_1 \rightarrow U_2$ bijektiv und differenzierbar mit differenzierbarer Umkehrfunktion so gilt

$$f(f^{-1}(y)) = y.$$

Wir leiten auf beiden Seiten ab, benutzen links die Kettenregel und bekommen

$$Df(f^{-1}(y))D(f^{-1})(y) = E_n.$$

Also muss $Df(f^{-1}(y))$ invertierbar sein, und mit $x = f^{-1}(y)$ muss gelten

$$D(f^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}.$$

Der folgende Satz zeigt, dass die Umkehrbarkeit von Df im Punkt $x = f^{-1}(y)$ schon für die Differenzierbarkeit von f^{-1} ausreicht:

Satz 17.1 (Umkehrsatz). *Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Weiter sei $a \in U$, $b = f(a)$ und $Df(a)$ sei invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U$ von a und eine offene Umgebung V_0 von b , so dass f die Menge U_0 bijektiv auf V_0 abbildet und die Umkehrabbildung*

$$g := f^{-1} : V_0 \rightarrow U_0$$

stetig differenzierbar ist mit $Dg(b) = (Df(a))^{-1}$.

Beweis.

Wir beweisen den Satz mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen (Satz 16.2). Wir definieren

$$F : \mathbb{R}^n \times U \rightarrow \mathbb{R}^n, F(x, y) = x - f(y).$$

(Beachte, dass hier die Rollen von x und y gegenüber der Motivation zu Beginn des Abschnittes vertauscht sind, damit wir die Situation analog zum Satz über implizite Funktionen beschreiben können.) Wegen $f(a) = b$ gilt $F(b, a) = 0$. Außerdem ist

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = -Df(y)$$

und da $Df(a)$ invertierbar ist, können wir Satz 16.2 anwenden: Es

gibt also eine offene Umgebung V' von b , eine Umgebung $U' \subset U$ von a und eine stetig differenzierbare Abbildung $g : V' \rightarrow U'$ mit den Eigenschaften:

1. Für alle $x \in V'$ gilt $0 = F(x, g(x)) = x - f(g(x))$, also $f(g(x)) = x$.
2. Ist $(x, y) \in V' \times U'$ mit $F(x, y) = 0$ (also $x = f(y)$), so folgt $y = g(x)$.

Da f stetig ist, gibt es eine offene Umgebung $U_0 \subset U'$ von a mit $f(U_0) \subset V'$. Aus 2. folgt jetzt für $V_0 := f(U_0)$

$$V_0 = g^{-1}(U_0).$$

Da g stetig ist, ist V_0 eine offene Umgebung von b und nach Konstruktion ist $f : U_0 \rightarrow V_0$ bijektiv. Die Formel für die Ableitung haben wir schon vor dem Satz eingesehen. $\square$

Wir holen nun die Einführung von paar Begriffen nach und führen weitere Begriffe ein:

Definition 17.2. Es seien $U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$

1. Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ k -mal stetig differenzierbar, so sagen wir f ist von der Klasse C^k oder auch f ist eine C^k -Funktion.
2. Wir bezeichnen

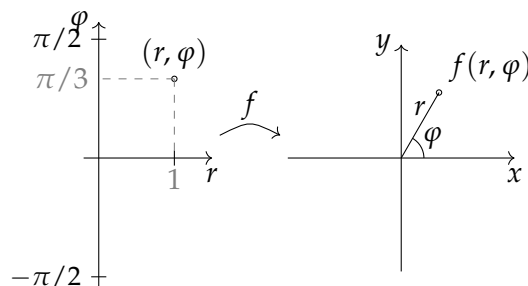
$$C^k(U, \mathbb{R}^m) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R}^m \mid f \text{ ist } C^k\text{-Funktion}\}$$

Entsprechend ist $C^k(U, W)$ für $W \subset \mathbb{R}^m$ definiert.

3. Ist $f \in C^k(U, V)$ bijektiv mit Umkehrabbildung der Klasse C^k , so nennen wir f einen C^k -Diffeomorphismus.

Beispiel. Wir betrachten Polarkoordinaten in der Ebene: Sei

$$f :]0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$



Diese Abbildung ist stetig differenzierbar mit

$$Df(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}(r, \varphi) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, \varphi) & \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}(r, \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Für $k = 1$ sagen wir nur "Diffeomorphismus". In allen Fällen kann auch $k = \infty$ sein, was bedeutet, dass Ableitungen beliebiger Ordnung existieren.

Es gilt $\det(Df(r, \varphi)) = r > 0$ und daher ist $Df(r, \varphi)$ für alle $(r, \varphi) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}$ invertierbar. Nach dem Umkehrsatz ist f in jedem Punkt lokal umkehrbar. Es gilt

$$(Df(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

so ist

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{x}{r} = \cos(\varphi), \quad \frac{y}{r} = \sin(\varphi).$$

Für eine lokale Umkehrfunktion g von f gilt also

$$Dg(x, y) = (Df(r, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Wir können auch eine solche lokale Umkehrfunktion g explizit angeben, zum Beispiel auf der Menge

$$V :=]0, \infty[\times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \text{und} \quad V' :=]0, \infty[\times \mathbb{R},$$

Dieses V ist eine offene Umgebung jedes Paares (r, φ) mit $r > 0$ und $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, und V' ist eine offene Umgebung jedes (x, y) mit $x > 0$ (dies entspricht der Abbildung f zwischen den dunkelblauen Gebieten rechts). Außerdem ist dann $x = r \cos(\varphi) > 0$ und die Abbildung

$$f : V \rightarrow V'$$

ist bijektiv mit Umkehrung

$$g : V' \rightarrow V, \quad g(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \end{pmatrix}.$$

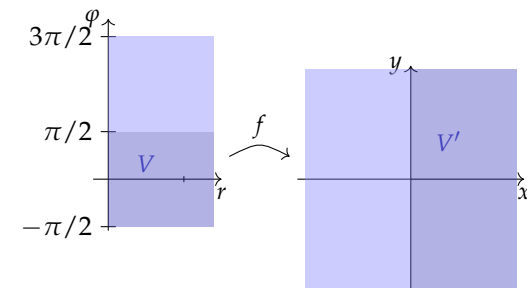
(Zwischen den hellblauen Gebieten ist diese Umkehrformel nicht gültig (z.B. gilt ja immer $\arctan(t) \in]-\pi/2, \pi/2[$.) Man kann diese Umkehrformel bestätigen, indem man nachrechnet (erinnere $\arctan'(t) = 1/(1+t^2)$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{-y}{x^2} = \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) &= \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

Eine Konsequenz aus dem Umkehrsatz ist:

Satz 17.3 (Offenheitssatz). Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Abbildung. Ist dann $Df(x)$ für alle $x \in U$ invertierbar, so ist die Bildmenge $f(U)$ offen.

Beweis.



Ohne die Invertierbarkeit der Ableitung gilt der Satz nicht, wie man z.B. an konstanten Funktionen sieht.

Nach dem Umkehrsatz hat jeder Punkt $x \in U$ eine offene Umgebung U_x , welche bijektiv auf deren Bild $V_x = f(U_x)$ abgebildet wird. Außerdem ist $f^{-1} : V_x \rightarrow U_x$ differenzierbar und also auch stetig. Daher ist V_x das Urbild der offenen Menge U_x unter f^{-1} und somit selbst offen. Also ist $f(U) = \bigcup_{x \in U} f(U_x)$ als Vereinigung offener Mengen offen. $\square$

Exkurs (Nachtrag: Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind alle Normen äquivalent).

Wir hatten schon gesehen, dass die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ die gleichen offenen Mengen erzeugen und daher für topologische Überlegungen keinen Unterschied machen. Der Grund dafür lag in Satz 3.4: Wir können den Wert einer der Normen nach unten und oben durch Vielfache der Werte einer anderen Norm abschätzen.

Definition 17.4. Wir nennen zwei Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|$ auf einem Vektorraum V *äquivalent*, wenn es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in V$ gilt

$$c \|x\| \leq \|x\| \leq C \|x\|.$$

Lemma 17.5. Äquivalenz von Normen ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis.

Reflexivität: Jede Norm ist zu sich selbst äquivalent (mit Konstanten $c = C = 1$).

Symmetrie: Ist $\|\cdot\|_a$ äquivalent zu $\|\cdot\|_b$ mit Konstanten c und C , d.h. es gilt $c\|x\|_b \leq \|x\|_a \leq C\|x\|_b$, so gilt $\frac{1}{C}\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \frac{1}{c}\|x\|_a$ und also ist $\|\cdot\|_b$ auch äquivalent zu $\|\cdot\|_a$.

Transitivität: Ist $\|\cdot\|_a$ äquivalent zu $\|\cdot\|_b$ und diese wiederum äquivalent zu $\|\cdot\|_c$ so gibt es Konstanten c_a, C_a und c_b, C_b , so dass für alle x gilt

$$\begin{aligned} c_a \|x\|_a &\leq \|x\|_b \leq C_a \|x\|_a \\ c_b \|x\|_b &\leq \|x\|_c \leq C_b \|x\|_b \end{aligned}$$

und es folgt

$$c_a c_b \|x\|_a \leq \|x\|_c \leq C_a C_b \|x\|_a$$

und daher ist $\|\cdot\|_a$ auch äquivalent zu $\|\cdot\|_c$. $\square$

Satz 17.6. Auf dem jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.

Beweis.

Jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum ist zum $\mathbb{R}^n$ isomorph und nach dem vorigen Lemma reicht es, zu zeigen, dass eine beliebige Norm $\|\cdot\|$ äquivalent zur 1-Norm ist.

Wir wollen also zeigen, dass es Konstanten c, C gibt, so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$c\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C\|x\|_1.$$

Für $x = 0$ gilt dies immer, und für $x \neq 0$ können wir durch $\|x\|_1$ dividieren und wir sehen, dass wir für $u = x/\|x\|_1$ zeigen müssen, dass

$$c \leq \|u\| \leq C$$

gilt.

Um dies zu zeigen, benutzen wir Satz 7.10 und zeigen zuerst, dass $\|\cdot\|$ bezüglich $\|\cdot\|_1$ stetig ist. Bezeichnen wir mit e_k die Standard-Basis-Vektoren im $\mathbb{R}^n$, so gilt $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$ und wir sehen, dass für $x, x' \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\|x - x'\| = \left\| \sum_{k=1}^n (x_k - x'_k) e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n |x_k - x'_k| \|e_k\| \leq \max_{k=1, \dots, n} \|e_k\| \|x - x'\|_1.$$

Also folgt aus $x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ auch $x^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x$ bzgl. $\|\cdot\|$. Da die Menge $\{u \in \mathbb{R}^n \mid \|u\|_1 = 1\}$ kompakt ist, existieren nach Satz 7.10

$$c = \min_{\|u\|_1=1} \|u\|, \quad C = \max_{\|u\|_1=1} \|u\|.$$

Es folgt für $\|u\|_1 = 1$

$$c \leq \|u\| \leq C$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Fazit: Im $\mathbb{R}^n$ gibt es nur einen einzigen Begriff von „offen“ der von einer Norm kommt. Das gilt insbesondere auch für Operator-Normen auf $\mathbb{R}^{m \times n}$: Dieser Raum ist isomorph zum $\mathbb{R}^{mn}$ und also sind auch dort alle Normen äquivalent. Zum Beispiel sind alle Operator-Normen für Matrizen äquivalent, und ebenso äquivalent zur *Frobenius-Norm* für Matrizen

$$\|A\|_F := \left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

(die Frobenius-Norm ist nichts anderes als die 2-Norm des Vektors in $\mathbb{R}^{mn}$ der aus allen Einträgen von A besteht).

18 Einführung in Differentialgleichungen: Modellierung von Epidemie-Dynamik

Mit Differentialgleichungen lassen sich zum Beispiel Phänomene modellieren, in denen eine zeitabhängige Größe gesucht wird. Eine Differentialgleichung beschreibt dann einen Zusammenhang zwischen der Änderungsrate der Größe und den Funktionswerten der gleichen Größe. In diesem Abschnitt soll am Beispiel der Ausbreitung von Infektionskrankheiten illustriert werden, was für Fragestellungen dabei auftreten.

Zuerst sollten wir dabei die Rolle der Modelle und der Modellierung klären: Ein *Modell* ist dabei eine Abstraktion eines Vorgangs in der realen Welt mit Hilfe von mathematischen Begriffen. Ein Modell bildet nicht die Wirklichkeit ab, sondern kann vielmehr nur helfen die Mechanismen und Zusammenhänge der Wirklichkeit zu verstehen. Mathematische Modelle können niemals alle zu Grunde liegenden Effekte abbilden, aber man kann Modelle verfeinern um die Wirklichkeit besser darzustellen. Hat man ein Modell, welches die Beobachtungen der wirklichen Welt hinreichend gut erklärt, kann man es benutzen, um Vorhersagen zu machen. Diesen Vorhersagen kann man aber nur insoweit trauen, wie die Annahmen des Modells stimmen. Wird zu einem Zeitpunkt ein neuer Effekt wichtig, den das Modell nicht berücksichtigt, werden die Vorhersagen des Modells ggf. falsch und damit wertlos.

Fangen wir mit einem sehr einfachen Modell für die Ausbreitung von Infektionskrankheiten an: Wir bezeichnen mit $I(t)$ die Anzahl der infizierten Personen. Die Änderungsrate der Anzahl der Infizierten ist dann $I'(t)$ und wir machen folgende sehr einfache Annahme:

$$\left(\begin{array}{l} \text{„Änderungsrate} \\ \text{der Anzahl der} \\ \text{Infizierten“} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{l} \text{„Anzahl der Kon-} \\ \text{takte zwischen} \\ \text{Personen pro} \\ \text{Zeiteinheit“} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{„Wahrscheinlichkeit,} \\ \text{bei einem Kon-} \\ \text{takt infiziert zu} \\ \text{werden“} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{l} \text{„Wahrscheinlichkeit,} \\ \text{dass eine Person} \\ \text{infiziert ist“} \end{array} \right)$$

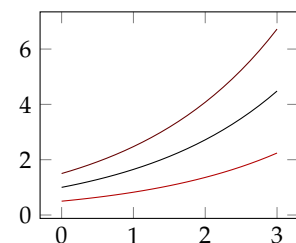
Ist I die Anzahl der Infizierten, so ist $I(t)/N$ der Anteil der Infizierten an der Gesamtpopulation und damit gleich der Wahrscheinlichkeit, dass jemand, dem man begegnet, infiziert ist. Bezeichnen wir das Produkt aus Infektionswahrscheinlichkeit und Anzahl der Kontakte mit β , bekommen wir die Differentialgleichung

$$I'(t) = \beta \frac{I(t)}{N}.$$

Mit etwas Erfahrung kann man erkennen, dass es eine ganze Schar von Lösungen gibt: Zu jedem $I_0 \in \mathbb{R}$ ist

$$I(t) = I_0 \exp\left(\frac{\beta}{N}t\right)$$

eine Lösung. (Die Konstante I_0 hat eine einfache Bedeutung: Es gilt $I(0) = I_0$, das heißt, I_0 ist der Wert der Lösung zum Zeitpunkt $t = 0$.) Eine mathematische Frage, die sich sofort stellt, und die



wir später beantworten werden: Sind alle Lösungen der Differentialgleichungen von dieser Form, oder gibt es noch weitere? An den Lösungen sehen wir sofort, dass dieses Modell für die Ausbreitung von Infektionen nicht alle Effekte modellieren kann: Die Anzahl der Infizierten $I(t)$ wächst unbeschränkt, was natürlich bei einer endlichen Population nicht sein kann. Man sieht aber: Falls nur ein geringer Teil der ganzen Population infiziert ist, passt dieses Modell noch gut zu den Beobachtungen die auch in letzter Zeit gemacht wurden: Die Anzahl der Infizierten wächst exponentiell.

Bevor wir kompliziertere Modelle betrachten, wechseln wir von der Anzahl der Infizierten zum Anteil der Infizierten. D.h. wir wechseln zur Variable $\hat{I} = I/N$. Da hier $\hat{I}$ gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass jemand Infiziert ist, liefert unser Modell hier die Gleichung

$$\hat{I}'(t) = \beta \hat{I}(t).$$

Im Folgenden modellieren wir alle Größen als Anteile an der Population und lasse die $\hat{}$ weg.

Nehmen wir einen weiteren Effekt mit hinzu: Sind weniger Nicht-Infizierte da, so nimmt die Wahrscheinlichkeit, dass jemand, den man trifft, infiziert ist ab. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Kontakt von zwei Personen jemand infiziert wird, ist also um den Faktor $(1 - I(t))$ kleiner als oben. Wir erhalten die Differentialgleichung

$$I'(t) = \beta(1 - I(t))I(t).$$

Auch ohne Lösungen zu kennen, lassen sich einige Eigenschaften von Lösungen angeben:

- Ist $I(t) = 0$, so ist $I'(t) = 0$ und wir vermuten, dass dann I konstant Null bleibt. (Das bedeutet: Ist niemand infiziert, so bleibt es dabei.)
- Ist $I(t) = 1$, so ist ebenfalls $I'(t) = 0$ und vermuten wieder, dass I konstant 1 bleibt. (Das bedeutet: Sind alle infiziert, bleibt es dabei.)
- Außerdem sehen wir, dass für $I(t) \in]0, 1[$, immer $I'(t) > 0$ gilt, d.h. Lösungen I sind immer strikt wachsend, wenn die Werte zwischen 0 und 1 liegen.

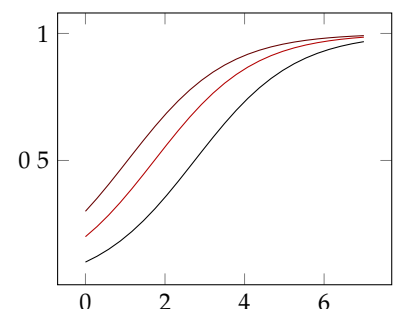
Der Anteil der Infizierten wird also immer mehr und es gilt auch, dass er immer gegen 1 konvergiert.

Man kann auch in diesem Fall eine Klasse von Lösungen explizit mit uns bekannten Funktionen angeben:

$$I(t) = \frac{I_0}{I_0 + (1 - I_0) \exp(-\beta t)}.$$

Man nennt diese Art des Wachstums *logistisches Wachstum*. Wiederum stellt sich die Frage, ob alle Lösungen von dieser Form sind.

Wir werden später sehen, dass diese Vermutung im allgemeinen falsch ist: Gilt $I'(t) = f(I(t))$ mit $f(0) = 0$, so kann es trotzdem sein, dass Lösungen der Differentialgleichung $I(0) = 0$ erfüllen, aber zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ gilt dann $I(t) \neq 0$.



Bei dem Modell des logistischen Wachstums werden nur Infizierte modelliert, nicht jedoch, dass Personen wieder gesund werden können, oder immun sein können.

SI-Modell

Machen wir ein Modell, in der es auch Gesunde gibt, also Personen, die noch infizierbar sind. Wir haben dann zwei Variablen:

- I : Anteil der Infizierten (*infected*)
- S : Anteil der Infizierbaren (*susceptible*).

Folgen wir wieder dem Modell, dass die Änderung des Anteils der Infizierten gleich dem Produkt aus Anzahl der Kontakte zu infizierten mal Wahrscheinlichkeit der Ansteckung pro Kontakt, mal Wahrscheinlich der Infektion des Kontaktes ist, so ergibt sich

$$I'(t) = \beta S(t)I(t).$$

Da jeder, der sich infiziert, danach nicht mehr infizierbar ist, muss die Anzahl der Infizierbaren so schnell abnehmen, wie die Zahl der Infizierten wächst:

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t).$$

Es folgt $I'(t) + S'(t) = 0$ und wir vermuten, dass dann die Summe aus Infizierten und Infizierbaren konstant bleibt. Ist das tatsächlich so und gilt zum Zeitpunkt $t = 0$

$$I(0) + S(0) = 1$$

so folgt $I(t) + S(t) = 1$ und wir können $S(t) = 1 - I(t)$ eliminieren. Wir erhalten nur noch eine Differentialgleichung

$$I'(t) = \beta(1 - I(t))I(t)$$

und das ist genau die Differentialgleichung, welche auf das logistische Wachstum führte.

SIR-Modell

Modellieren wir noch einen Effekt mehr: Ist jemand infiziert, so wird diese Person nach einer Zeit weder infiziert, noch infizierbar (also z.B. immun oder verstorben). Wir haben dann drei Variablen:

- I : Anteil der Infizierten (*infected*)
- S : Anteil der Infizierbaren (*susceptible*)
- R : Anteil der Immunen oder Verstorbenen (*recovered/removed*)

Für die Dynamik machen wir folgenden Annahmen:

- Infizierte werden durch Infektion werden wie bisher mit Rate “ $\beta \cdot$ Infizierbare” mehr, jedoch
- wer sich infiziert ist danach nicht mehr infizierbar, und
- Infizierte werden durch Genesung oder Tod mit Rate γ weniger.

Das führt auf die Differentialgleichungen

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

$$R'(t) = \gamma I(t)$$

Wiederum sieht man

$$I'(t) + S'(t) + R'(t) = 0$$

was uns vermuten lässt, dass $I + R + S$ konstant ist. Außerdem sehen wir:

- $R' > 0$, d.h. der Anteil “recovered/removed” wird immer größer.
- $S' < 0$, d.h. die Infizierbaren werden immer weniger.
- Es gilt $I' = 0$ falls $I = 0$ oder $S = \gamma/\beta$.
- Das Vorzeichen von I kann wechseln. Ist S groß, ist $I' > 0$, ist S klein, ist $I' < 0$. Das kann man noch genauer ausdrücken: Es gilt

$$I' > 0 \text{ falls } S > \frac{\gamma}{\beta}, \quad I' < 0 \text{ falls } S < \frac{\gamma}{\beta}$$

In diesem Fall braucht man nur das Differentialgleichungssystem

$$I'(t) = \beta S(t)I(t) - \gamma I(t)$$

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t)$$

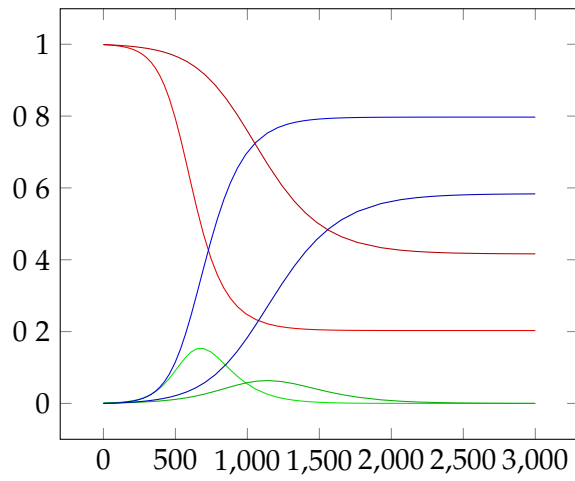
betrachten, das sich R aus I durch Integration ergibt:

$$R(t) - R(t_0) = \gamma \int_{t_0}^t I(s) ds$$

und der Wert von R nicht in den Gleichungen für I und S vorkommt. Für dieses System von Gleichungen lässt sich aber keine Lösungsformel mit den uns bekannten Funktionen angeben.

Hier der Verlauf der Lösung für $\gamma = 0,01$, $I(0) = 0,001$, $S(0) = 1 - I(0)$, $R(0) = 0$ und verschiedene β . Dabei ist rot $S(t)$, blau $I(t)$ und grün $R(t)$. Die hellen Graphen gehören zu $\beta = 0,02$ und die dunklen zum kleineren Wert $\beta = 0,015$.

Das sollte vielleicht eingeordnet werden: Viele der Funktionen, die als „elementar“ bezeichnet werden, und die über Polynome hinausgehen, sind als Lösungen von Differentialgleichung definiert (oder wenigstens definierbar), z.B. exp, log, sin, cos aber auch kompliziertere Funktionen wie z.B. Besselfunktionen.



19 Gewöhnliche Differentialgleichungen

19.1 Motivation

Unter einer *Differentialgleichung* verstehen wir eine Gleichung für eine gesuchte Funktion mit der namensgebenden Eigenschaft, dass die Gleichung auch *Ableitungen der Funktion* enthält. Man klassifiziert Differentialgleichungen unter anderem danach, ob es sich bei der gesuchten Funktion um eine Funktion mit ein- oder höher-dimensionalem Definitionsgebiet handelt. Ist der Definitionsbereich der gesuchten Funktion eindimensional, spricht man von *gewöhnlichen Differentialgleichungen*. Ist eine Funktion gesucht, die von mehreren Variablen abhängt und enthält die bestimmende Gleichung partielle Ableitungen in verschiedene Richtungen, so spricht man von *partiellen Differentialgleichungen* (welche nicht in dieser Vorlesung behandelt werden).

Bei gewöhnlichen Differentialgleichung wird typischerweise eine Funktion y gesucht, welche einer Gleichung der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

genügt, wobei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge G des $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Die Zahl n , also die höchste auftretende Ableitung, ist die *Ordnung* der Differentialgleichung.

Betrachten wir zwei einfache Beispiele:

Beispiel.

Betrachten wir die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' = cy \quad (\text{d.h. } f(x, y) = cy)$$

für ein $c \in \mathbb{R}$. Man sieht schnell, dass Funktionen der Form $f(x) = A \exp(cx)$ diese Gleichung lösen.

Zeigen wir jetzt, dass alle Lösungen von dieser Form sind: Für eine beliebige Lösung $f(x)$ betrachten wir $F(x) := f(x) \exp(-cx)$. Die Ableitung davon ist

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x) \exp(-cx) - cf(x) \exp(-cx) \\ &= (f'(x) - cf(x)) \exp(-cx) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist F konstant, d.h. es gibt $A \in \mathbb{R}$, so dass $F(x) = A$. Es folgt also

$$f(x) = F(x) \exp(cx) = A \exp(cx).$$

Wir sehen insbesondere, dass wir durch die Angabe eines *Anfangswertes* $y(0) = y_0$ eine *eindeutige Lösung* $\varphi(x) = y_0 \exp(cx)$ bekommen. $\triangle$

Beispiel.

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{|y|}.$$

Zum Anfangswert $y(x_0) = 0$ ergibt sich für $x \geq x_0$, z.B. die Lösung

$$\varphi : [x_0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{(x - x_0)^2}{4}.$$

Man rechnet schnell nach, dass $\varphi(x_0) = 0$ gilt und dass

$$\varphi'(x) = (x - x_0)/2 = \sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{|\varphi(x)|}$$

wobei bei der zweiten Gleichung benutzt wurde, dass $x - x_0 \geq 0$ und in der letzten Gleichung wurde benutzt, dass $\varphi(x) \geq 0$ gilt. Beachte, dass $\varphi(x) = (x - x_0)^2/4$ als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ keine Lösung ist, denn für $x < x_0$ ist $\varphi'(x) < 0$ und kann daher nicht $\varphi'(x) = \sqrt{|\varphi(x)|} \geq 0$ erfüllen.

Es gibt auch ein Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, z.B.

$$\varphi(x) = \text{sign}(x - x_0) \frac{(x - x_0)^2}{4}.$$

Es gibt aber noch weitere Lösungen, die den Anfangswert $\varphi(x_0) = 0$ erfüllen: Eine weitere Lösung ist z.B. $y(x) \equiv 0$! Es gibt sogar noch beliebig viele weitere Lösungen, z.B. ist für jedes $x_1 \geq x_0$:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & x \leq x_1 \\ \frac{(x - x_1)^2}{4} & x \geq x_1. \end{cases}$$

△

Differentialgleichungen spielen eine große Rolle in vielen anderen Wissenschaften. Ein paar Beispiele:

- Ist y die Größe einer *Population* und x die Zeit, dann ist y' das *Wachstum der Population*. Nimmt man an, dass das Wachstum proportional zur Größe ist, ergibt sich die Differentialgleichung $y' = cy$.
- Ist y der *Ort eines Körpers* und wieder x die Zeit, so ist y' seine *Geschwindigkeit*. Ist die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt bekannt, ergibt sich die Differentialgleichung $y' = f(x)$. Ist auch noch $y(0) = y_0$ bekannt, also der Ort zum Zeitpunkt $x = 0$, so ist die eindeutige Lösung gegeben durch $\varphi(x) = y_0 + \int_0^x f(t) dt$.
- Im vorigen Beispiel ist y'' die *Beschleunigung*. Nach dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetz ist die Beschleunigung proportional zur einwirkenden Kraft. Ist $F(x)$ die bekannte

Kraft zur Zeit x und m die Masse des Körpers, so gehorcht y also der Differentialgleichung $y'' = F(x)/m$.

Auch in weiteren Wissenschaften werden Differentialgleichung zur Modellierung eingesetzt (z.B. Modellierung von Preisdynamik in der Wirtschaft, von Reaktionsabläufen in der Chemie, von Meinungsdynamik in der Soziologie, von Bewegungen und Schwingungen von Körpern oder Bauten in den Ingenieurwissenschaften, von Strom um Spannung in der Elektrotechnik, oder von Epidemien...). Schließlich sind Differentialgleichungen auch innerhalb der Mathematik wichtig, nicht nur um Probleme in anderen Gebieten der Mathematik zu bearbeiten, sondern auch als eigenständiges Forschungsobjekt.

Bei Differentialgleichungen wird sich deutlich zeigen, dass es oft zwei sehr verschiedene Fragen sind, ob eine Lösung *existiert* und ob sie *eindeutig* ist. Typischerweise werden bei Differentialgleichungen beide Fragen getrennt voneinander behandelt und oft mit verschiedenen Methoden beantwortet. Eine weitere wichtige Frage ist die Frage nach *stetiger Abhängigkeit von den Anfangswerten*. Alle diese Fragen haben direkte Interpretationen in der jeweiligen Anwendung:

- Ist *Existenz* einer Lösung nicht garantiert, so mag man sagen, dass die Differentialgleichung kein natürliches Phänomen modelliert, da man in der Natur ja wahrscheinlich etwas beobachtet, was man mit der Differentialgleichung beschreiben möchte. Dies klingt einleuchtend, jedoch ist es bei der sogenannten Navier-Stokes-Gleichung, einer partiellen Differentialgleichung, die zur Beschreibung der Strömung von Flüssigkeiten und Gasen benutzt wird, bis heute nicht bewiesen, dass unter bestimmten Voraussetzungen Lösungen existieren (und das obwohl die Gleichung weltweit erfolgreich numerisch gelöst und benutzt wird). Für eine Lösung des Existenzproblems für diese Gleichung hat das Clay-Institut ein Preisgeld vom 1 Million Dollar ausgelobt.
- Ist die *Eindeutigkeit* einer Lösung nicht garantiert, so mag man immer noch versucht sein, zu sagen, dass die Differentialgleichung kein natürliches Phänomen modelliert. In der Natur beobachtet man ja immer genau einen Fortgang der Ereignisse, und erlaubt die Differentialgleichung mehrere Lösungen, so scheint die Gleichung nicht alle Eigenschaften erfasst zu haben.
- Hängt eine (eindeutig bestimmte) Lösung nicht stetig von den Anfangsdaten ab, so scheint es ebenfalls, als würde die Gleichung kein natürliches Phänomen beschreiben. Immerhin würde die bedeuten, dass eine beliebig kleine Änderung des Anfangswertes eine beliebig große Änderung der Lösung zur Folge hätte. Tatsächlich gibt es aber einfache gewöhnliche Differentialgleichungen, bei denen genau dies passiert.

Eine Gleichung mit dieser Eigenschaft wurde in den 1960er Jahren bei der Modellierung des Wetters entdeckt.

19.2 Definitionen, Richtungsfelder

Wir formalisieren noch einmal den Begriff:

Definition 19.1. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

stetig. Die Gleichung

$$y' = f(x, y)$$

heißt (*n*-dimensionale gewöhnliche) *Differentialgleichung erster Ordnung*. Eine Lösung davon ist eine Funktion φ , welche auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert ist und folgende Eigenschaften hat:

1. Der Graph von φ liegt in G , d.h. für alle $x \in I$ gilt $(x, \varphi(x)) \in G$.
2. Für alle $x \in I$ gilt $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$.

Das Intervall I heißt dabei *Existenzgebiet* der Lösung.

Differentialgleichungen hängen mit Integralgleichungen zusammen: Hängt f zum Beispiel nur von der ersten Variable ab, also $y' = f(x)$, so suchen wir φ , so dass

$$\varphi'(x) = f(x).$$

Dies können wir durch Integration Lösen: Wir integrieren beide Seiten von x_0 bis x und bekommen nach dem Fundamentalsatz

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Dieses φ erfüllt den Anfangswert $y(x_0) = \varphi(x_0)$.

Ist f auch von der zweiten Variable abhängig, folgt für eine Lösung φ von $y' = f(x, y)$ immer noch

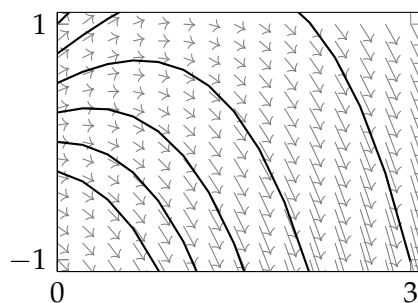
$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

(und erfüllt auch den Anfangswert $y(x_0) = \varphi(x_0)$). Es handelt sich um eine äquivalente *Integralgleichung*. Es tauchen zwar keine Ableitungen mehr auf, aber trotzdem eignet sich diese Gleichung auch nicht unmittelbar zur Lösung, da die gesuchte Funktion immer noch auf beiden Seiten und einmal sogar unter dem Integral auftaucht.

Gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung haben eine einfache geometrische Interpretation: In jedem Punkt $(x, y) \in G$ wird durch die Gleichung $y' = f(x, y)$ eine Steigung vorgegeben. Eine Lösung ist eine differenzierbare Funktion, dessen Graph durch G verläuft und die in jedem Punkt im Graphen die vorgegebene Steigung hat. Für die Gleichung $y' = y - x$ sieht dieses sogenannte *Richtungsfeld* wie folgt aus:

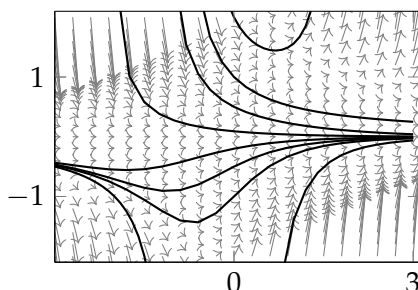
Beachte: Nicht nur die „Abbildungsvorschrift“ φ ist gesucht, sondern auch das Existenzgebiet I ! Insbesondere ist das Existenzgebiet a-priori unbekannt und kann für die gleiche Differentialgleichung für verschiedene Anfangswerte unterschiedlich sein.

Man rechnet nach, dass für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Funktion $\varphi(x) = x - a \exp(x) + 1$ eine Lösung ist.



Es sind auch einige Lösungen eingezeichnet.

Hier noch ein anderes Richtungsfeld: Für die Gleichung $y' = xy^2 - y$:



Dies ist ein Spezialfall der Bernoulli-Differentialgleichung $y' = Q(x)y^n - P(x)y$ ($n \neq 0,1$).

Bei dieser Differentialgleichung ist besonders auffällig, dass die verschiedenen Lösungen sehr unterschiedlich sind. Zum Beispiel gibt es Lösungen, welche für alle x existieren und wieder andere, die nur für endliche Zeiten existieren (d.h. die nur auf einem beschränkten Intervall existieren).

Definition 19.2. Wir nennen eine Differentialgleichung *autonom*, wenn die rechte Seite nicht von x abhängt.

Richtungsfelder von autonomen Differentialgleichungen haben eine einfache Struktur: Wir müssen uns nur für ein festes x die Steigungen für verschiedenen y -Werte überlegen. Für alle anderen x -Werte erhalten wir dass die gleichen Steigungen. Daher kann man für autonome Gleichungen auch sofort das Monotonie-Verhalten der Lösungen sehen.

Autonome Differentialgleichungen haben also die Form $y' = f(y)$.

Beispiel.

Wir betrachten die Gleichung

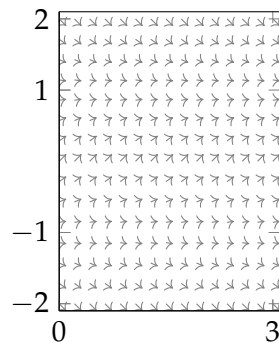
$$y' = 1 - |y|.$$

Diese gehört zur rechten Seite $f(y) = 1 - |y|$. Es gilt

$$\begin{aligned} f(y) = 0 &\iff y = 1 \quad \text{oder} \quad y = -1 \\ f(y) > 0 &\iff -1 < y < 1 \\ f(y) < 0 &\iff y < -1 \quad \text{oder} \quad y > 1. \end{aligned}$$

Eine Lösung φ ist also wachsend, wenn $-1 < \varphi(x) < 1$, fallend, wenn $\varphi(x) < -1$ oder $\varphi(x) > 1$ gilt und flach/lokal konstant,

wenn $\varphi(x) = 1$ oder $\varphi(x) = -1$. Das Richtungsfeld sieht so aus und es würde nicht schwer fallen, hier Lösungen per Hand einzuzeichnen:

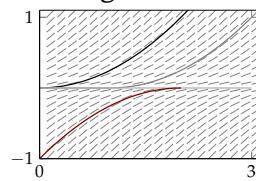


△

Kommen wir nun noch einmal auf das Beispiel mit nicht-eindeutigen Lösungen zurück:

Beispiel.

Für die autonome Differentialgleichung $y' = \sqrt{|y|}$ sehen Richtungsfeld und ein paar Lösungen so aus:



Lax gesprochen: Das Richtungsfeld ist für y nahe bei Null auf die richtige Art und Weise flach, dass eine Lösung „aus der konstanten Null entweichen kann“.

△

Bevor wir uns einer allgemeinen Lösungstheorie mit Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zuwenden, beschäftigen wir uns mit Lösungsmethoden für spezielle Fälle.

20 Trennung der Variablen

In diesem und im nächsten Abschnitt schauen wir uns zwei Lösungsmethoden an, mit denen man in speziellen Fällen Lösungen explizit ausrechnen können. In der Praxis sind beide Methoden nicht von großer Bedeutung.

Definition 20.1. Eine eindimensionale Differentialgleichung hat *getrennte Variablen*, wenn sie von der Form

$$y' = f(x)g(y)$$

mit stetigen Funktionen $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ mit Intervallen I, J ist.

Satz 20.2. Es seien $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Für einen Punkt $(x_0, y_0) \in I \times J$ definieren wir $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : J \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt, \quad G(y) := \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)}dt.$$

Dann gilt für jedes Intervall $I' \subset I$ mit $x_0 \in I'$ und $F(I') \subset G(J)$, dass die Funktion $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ welche implizit durch die Gleichung

$$G(\varphi(x)) = F(x). \quad (*)$$

gegeben ist die Differentialgleichung $y' = f(x)g(y)$ mit Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ löst. Außerdem existiert ein größtes solches Intervall I' und für jedes Intervall I' genau eine Lösung φ der Differentialgleichung.

Beweis.

Zuerst bemerken wir, dass die Forderung $F(I') \subset G(J)$ notwendig dafür ist, dass die Gleichung $(*)$ nach $\varphi(x)$ aufgelöst werden kann.

1. Zeigen wir zuerst, dass eine Funktion φ , die die Differentialgleichung und die Bedingung $\varphi(x_0) = y_0$ erfüllt, auch die Gleichung $(*)$ erfüllt. Dazu dividieren wir die Gleichung $\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$ durch $g(\varphi(x))$ (es gilt ja $g(y) \neq 0$ für alle y) und integrieren beide Seiten von x_0 bis x :

$$\int_{x_0}^x \frac{\varphi'(t)}{g(\varphi(t))}dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Im linken Integral substituieren wir $u = \varphi(t)$ und bekommen (beachte Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$)

$$\int_{y_0}^{\varphi(x)} \frac{1}{g(u)}du = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Die rechte Seite ist $F(x)$ und die linke Seite ist $G(\varphi(x))$, was genau der Gleichung $(*)$ entspricht.

2. Nach dem ersten Schritt wissen wir, dass jede Lösung φ von $y' = f(x)g(y)$ mit Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ die Gleichung

chung (*) erfüllt. Da $G'(y) = \frac{1}{g(y)} \neq 0$ und da g stetig ist, ist G streng monoton (wachsend oder fallend). Folglich hat G eine Umkehrfunktion $H : G(J) \rightarrow \mathbb{R}$ die ebenfalls stetig differenzierbar ist. Da (*) gilt, folgt für alle $x \in I'$

$$\varphi(x) = H(F(x)).$$

Dies zeigt, dass es höchstens eine Lösung von der Differentialgleichung mit gegebener Anfangsbedingung gibt.

3. Um Existenz einer Lösung zu zeigen, *definieren* wir nun $\varphi(x) := H(F(x))$. Der Anfangswert stimmt, denn es gilt $F(x_0) = 0 = G(y_0)$ und daher

$$\varphi(x_0) = H(F(x_0)) = H(0) = y_0.$$

Außerdem erfüllt φ die Gleichung (*) und mit der Kettenregel und der Definition von F und G folgt

$$f(x) = F'(x) = G'(\varphi(x))\varphi'(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))},$$

also

$$\varphi'(x) = f(x)g(\varphi(x))$$

wie gefordert.

□

Aus diesem Satz können wir ein systematisches Vorgehen zum bestimmen der Lösung von Differentialgleichungen mit getrennten Variablen ableiten:

1. Lese Definitionsbereiche I von f und J von g ab, oder bestimme diese selbst passend zum Anfangswert (d.h. so, dass $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$), am besten größtmöglich. Beachte: I und J müssen Intervalle sein!

2. Bestimme F und G durch

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt, \quad G(y) = \int_{y_0}^y \frac{1}{g(t)}dt.$$

3. Bestimme das Intervall $G(J) = \{G(y) \mid y \in J\}$ und dann das maximale Existenzintervall I' , d.h. I' größtmöglich so dass $F(I') \subset G(J)$.

4. Bestimme die Lösung $\varphi : I' \rightarrow \mathbb{R}$ durch Auflösen der Gleichung

$$G(\varphi(x)) = F(x)$$

nach $\varphi(x)$.

Oft wird folgende Merkregel für die Trennung der Variablen empfohlen:

1. Schreibe y' als $\frac{dy}{dx}$ und schreibe

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

formen dies formal um zu

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

2. Integriere beide Seiten unbestimmt

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

3. Löse die Gleichung nach $y(x)$ auf.
4. Passe die Konstante C an die Anfangsbedingungen an.

Ich rate von dieser Merkregel ab und empfehle das systematische Vorgehen. Das systematische Vorgehen ist weniger fehleranfällig und liefert das Existenzintervall mit.

Beispiel.

Wir betrachten

$$y' = -\frac{y}{x} \quad \text{auf } I \times J =]0, \infty[\times]0, \infty[$$

mit der Anfangsbedingung $y(1) = c > 0$. Dies ist eine Differentialgleichung in getrennten Variablen, denn es gilt

$$y' = f(x)g(y) \quad \text{mit} \quad f(x) = -\frac{1}{x}, \quad g(y) = y.$$

Gehen wir nun systematisch vor:

1. Die Funktionen F und G aus Satz 20.2 sind

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt = - \int_1^x \frac{1}{t} dt = -\log(x)$$

und

$$G(y) = \int_c^y \frac{1}{g(t)} dt = \int_c^y \frac{1}{t} dt = \log(y) - \log(c) = \log(y/c).$$

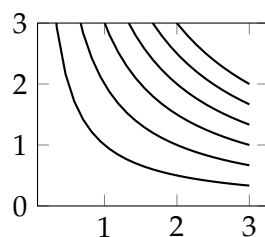
2. Es gilt $G(J) = G(]0, \infty[) = \{\log(y/c) \mid y > 0\} = \mathbb{R}$, wir können also $I' = I =]0, \infty[$ wählen, da $F(]0, \infty[) = \{-\log(x) \mid x > 0\} = \mathbb{R} = G(J)$.
3. Es ergibt sich also eine auf ganz I definierte Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$G(\varphi(x)) = F(x) \quad \text{also} \quad \log(\varphi(x)/c) = -\log(x).$$

Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten liefert

$$\varphi(x) = \frac{c}{x}.$$

Die Gesamtheit aller Lösungen ist also eine *Hyperbelschar*, gegeben durch $xy = c$:



Man beachte, dass durch jeden Punkt von $]0, \infty[\times]0, \infty[$ genau eine Lösungskurve gibt. $\triangle$

Beispiel.

Betrachten wir nun

$$y' = \frac{x}{y} \quad \text{in } G = \mathbb{R} \times]0, \infty[$$

mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ mit $y_0 > 0$.

Auch diese Differentialgleichung ist in getrennten Variablen, hier mit den Funktionen $f(x) = x$ und $g(y) = 1/y$ mit $I = \mathbb{R}$ und $J =]0, \infty[$

1. Bestimme F und G :

$$F(x) = \int_{x_0}^x t \, dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

und

$$G(y) = \int_{y_0}^y t \, dt = \frac{y^2}{2} - \frac{y_0^2}{2}.$$

2. Es gilt

$$G(J) = \{(y^2 - y_0^2)/2 \mid y > 0\} =]-\frac{y_0^2}{2}, \infty[.$$

Damit $F(I') \subset G(J)$ gilt, muss für jedes $x \in I'$ gelten

$$\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} > -\frac{y_0^2}{2}$$

was äquivalent zu

$$x^2 > x_0^2 - y_0^2 \quad (**)$$

ist.

Um das maximale Existenzintervall zu bestimmen, unterscheiden wir Fälle:

- (a) Ist $x_0^2 < y_0^2$, so ist die rechte Seite in $(**)$ negativ, und die Ungleichung $(**)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt. Daher ist in diesem Fall $I' = \mathbb{R}$.
- (b) Ist $x_0^2 > y_0^2$, so ist die rechte Seite in $(**)$ positiv und daher eine echte Einschränkung für x . Die Menge aller x , welche $(**)$ erfüllt ist

$$M =]-\infty, -\sqrt{x_0^2 - y_0^2}[\cup]\sqrt{x_0^2 - y_0^2}, \infty[.$$

Es kommt nun auf das Vorzeichen von x_0 an:

- i. Ist $x_0 < 0$, so ist $I' =]-\infty, -\sqrt{x_0^2 - y_0^2}[$, denn das ist das größtmögliche Intervall welches in M liegt und x_0 enthält.
- ii. Ist $x_0 > 0$, so ist $I' =]\sqrt{x_0^2 - y_0^2}, \infty[$, denn das ist das größtmögliche Intervall welches in M liegt und x_0 enthält.

(c) In jedem Fall erhalten wir aus

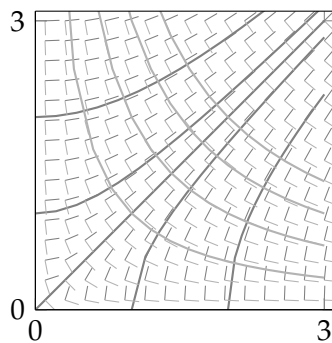
$$G(\varphi(x)) = F(x), \quad \frac{1}{2}(\varphi(x)^2 - y_0^2) = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2)$$

die Lösungsformel. Da $J =]0, \infty[$ ist, muss $\varphi(x) > 0$ gelten, und wir bekommen die Lösung mit der Wurzel (also der positiven Lösung der quadratischen Gleichung)

$$\varphi(x) = \sqrt{x^2 + (y_0^2 - x_0^2)}.$$

△

Die beiden vorigen Beispiele hängen zusammen, denn die zugehörigen Richtungsfelder stehen senkrecht aufeinander. Dies sieht man auch gut an den zugehörigen Scharen von Lösungen:



21 Lineare Differentialgleichungen in einer Dimension

Eine weitere Klasse von Differentialgleichungen, bei denen man oft explizit Lösungen auf elementarem Weg angeben kann, sind *lineare Differentialgleichungen*. In diesem Abschnitt behandeln wir vorerst den eindimensionalen Fall:

Definition 21.1. Eine Differentialgleichung erster Ordnung heißt *linear*, wenn Sie von der Form

$$y' = a(x)y + b(x)$$

mit stetigen Funktionen $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ für ein Intervall I ist. Ist $b \equiv 0$, so heißt die Gleichung *homogen*, sonst *inhomogen*.

Für homogene lineare Differentialgleichungen gilt:

Satz 21.2. Es sei I ein Intervall, $a : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$$

die eindeutige Lösung der Differentialgleichung $y' = a(x)y$, die der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ genügt.

Beweis.

Man rechnet direkt nach, dass $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x)$ und $\varphi(x_0) = y_0$, also ist φ eine Lösung.

Zur Eindeutigkeit: Es sei $A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$ und $\varphi_0(x) = \exp(-A(x))$. Sei ψ eine Lösung von $y' = a(x)y$, welche $\psi(x_0) = y_0$ erfüllt. Dann gilt $\varphi'_0(x) = -A'(x)\varphi_0(x) = -a(x)\varphi_0(x)$ und für $\psi_0(x) = \psi(x)\varphi_0(x)$ folgt

$$\begin{aligned}\psi'_0(x) &= \psi'(x)\varphi_0(x) + \psi(x)\varphi'_0(x) \\ &= a(x)\psi(x)\varphi_0(x) - a(x)\psi(x)\varphi_0(x) \\ &= 0,\end{aligned}$$

also ist ψ_0 konstant. Es gilt also

$$\psi_0(x) = \psi_0(x_0) = \psi(x_0)\varphi_0(x_0) = y_0 \exp(0) = y_0.$$

Daraus folgt

$$\psi(x) = \frac{y_0}{\varphi_0(x)} = \frac{y_0}{\exp(-A(x))} = y_0 \exp(A(x)),$$

was die behauptete Eindeutigkeit zeigt. $\square$

Diese Gleichungen heißen linear, da die Funktion f in der Gleichung $y' = f(x, y)$ (affin) linear in y ist. Im mehrdimensionalen Fall $y' = A(x)y + b(x)$ wäre dann A eine Matrix-wertige Funktion und b eine vektorwertige Funktion. Um diesen Fall kümmern wir uns später.

Beispiel.

- i) Für die Differentialgleichung $y' = ky$ ($k \in \mathbb{R}$) ist $a(x) \equiv k$ und es ergeben sich die Lösung $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ als

$$\varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x k dt\right) = y_0 \exp(k(x - x_0)).$$

- ii) Für $y' = kxy$ ($k \in \mathbb{R}$) ist $a(x) = kx$ und die Lösung mit $\varphi(x_0) = y_0$ ist

$$\varphi(x) = y_0 \exp\left(\int_{x_0}^x k t dt\right) = y_0 \exp(k(x^2 - x_0^2)/2).$$

△

Kommen wir nun zu inhomogenen linearen Differentialgleichungen, also zu den Gleichungen der Form

$$y' = a(x)y + b(x).$$

Hierzu machen wir, wie oft bei Differentialgleichungen, einen *Ansatz*. Wir probieren es wie folgt: Ist A eine Stammfunktion von a , d.h.

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(t) dt$$

dann suchen wir eine Lösung der Form

$$\varphi(x) = u(x) \exp(A(x)).$$

Die Idee dabei ist es, die Lösung

$$\varphi_0(x) = \exp(A(x)) = \exp\left(\int_{x_0}^x a(t) dt\right)$$

der homogenen Gleichung $y' = a(x)y$ mit $\varphi(x_0) = 1$ zu nehmen und diese mit einer "variablen Konstanten" $u(x)$ (anstatt einer Konstanten y_0) zu multiplizieren. Beachte, dass $\varphi_0(x) \neq 0$, daher lässt sich jede Funktion φ in dieser Form darstellen.

Wir versuchen nun, $u(x)$ zu bestimmen, indem wir φ in die Differentialgleichung einsetzen. Wegen $\varphi'_0(x) = \varphi_0(x)a(x)$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= u'(x)\varphi_0(x) + u(x)\varphi'_0(x) = u'(x)\varphi_0(x) + u(x)\varphi_0(x)a(x) \\ &= (u'(x) + u(x)a(x)) \exp(A(x)). \end{aligned}$$

und außerdem

$$a(x)\varphi(x) + b(x) = a(x)u(x) \exp(A(x)) + b(x).$$

Da diese beiden Ausdrücke gleich sein sollen, muss gelten

$$u'(x) \exp(A(x)) = b(x).$$

„Einen Ansatz machen“ bedeutet, eine Lösung in einer speziellen Form zu raten und dann die noch freien Parameter zu bestimmen.

Dies liefert nach Umstellen $u'(x) = \exp(-A(x))b(x)$, und nach Integration

$$u(x) = \int_{x_0}^x \exp(-A(t))b(t)dt + c$$

und mit $c = y_0$ gilt dann automatisch $u(x_0) = y_0$. Wir erhalten die Lösung

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= u(x) \exp(A(x)) \\ &= \left(\int_{x_0}^x \exp(-A(t))b(t)dt + y_0 \right) \exp(A(x)) \\ &= y_0 \exp(A(x)) + \int_{x_0}^x \exp(A(x) - A(t))b(t)dt.\end{aligned}$$

Durch Differentiation lässt sich nachprüfen, dass tatsächlich $\varphi'(x) = a(x)\varphi(x) + b(x)$ gilt, außerdem ist klar, dass $\varphi(x_0) = y_0$ gilt. Wir fassen unsere Erkenntnis als Satz zusammen:

Satz 21.3 (Variation der Konstanten). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $x_0 \in I$, und $y_0 \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $A(x) = \int_{x_0}^x a(t)dt$. Dann ist $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch*

$$\varphi(x) = y_0 \exp(A(x)) + \int_{x_0}^x \exp(A(x) - A(t))b(t)dt$$

die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)$$

die der Anfangsbedingung $\varphi(x_0) = y_0$ genügt.

Beispiel.

i) Wir betrachten

$$y' = xy + x$$

d.h. den Fall $a(x) = x$ und $b(x) = x$. Dann ist $A(x) = x^2/2 - x_0^2/2$ und die eindeutige Lösung mit Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ ist

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= y_0 \exp(x^2/2 - x_0^2/2) + \int_{x_0}^x \exp(x^2/2 - t^2/2)t dt \\ &= y_0 \exp(x^2/2 - x_0^2/2) + \exp(x^2/2) \int_{x_0}^x \exp(-t^2/2)t dt \\ &= y_0 \exp(x^2/2 - x_0^2/2) + \exp(x^2/2) [-\exp(-x^2/2) + \exp(-x_0^2/2)] \\ &= (y_0 + 1) \exp(x^2/2 - x_0^2/2) - 1.\end{aligned}$$

Beachte, dass die Variation-der-Konstanten-Formel schnell zu Integralen führt, die sich nicht in einfachen, bekannten Funktionen darstellen lassen. Man versuche dazu z.B. die Differentialgleichung $y' = xy + 1$.

ii) Wir betrachten

$$y' = \frac{y}{x} + x^2$$

also $a(x) = 1/x$ und $b(x) = x^2$ für $I =]0, \infty[$. Hier ist $A(x) = \int_{x_0}^x \frac{1}{t} dt = \log(x/x_0)$. Die Lösung zum Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ ist also

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= y_0 \exp(A(x)) + \int_{x_0}^x \exp(A(x) - A(t)) b(t) dt \\ &= y_0 \frac{x}{x_0} + \int_{x_0}^x \exp(\log(\frac{x}{x_0})) \exp(\log(\frac{x_0}{t})) t^2 dt \\ &= \frac{y_0}{x_0} x + x \int_{x_0}^x t dt \\ &= \frac{y_0}{x_0} x + x \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{y_0}{x_0} - \frac{x_0^2}{2} \right) x + \frac{x^3}{2}. \end{aligned}$$

△

Ein weitere Technik, um explizite Lösungen für Differentialgleichungen zu finden, ist Substitution. Illustrieren wir das an einem Beispiel:

Beispiel.

Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$y' = h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Dabei sei J ein Intervall und $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Damit ist die Differentialgleichung auf dem Gebiet $G := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y/x \in J\}$ definiert.

Wir ersetzen nun die gesuchte Funktion y durch $z = y/x$. Dann ist $y = zx$ und nach der Produktregel gilt

$$y' = z'x + z.$$

Aus der Differentialgleichung $y' = h(y/x)$ wird also

$$z'x + z = h(z), \quad \text{also} \quad z' = \frac{1}{x}(h(z) - z).$$

Wir erhalten eine Differentialgleichung für z in getrennten Variablen.

Als konkretes Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = h\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{mit} \quad h(z) = 1 + z + z^2.$$

und Anfangswert $y(1) = 0$ (also $y_0 = 0, x_0 = 1$). Nach Substitution bekommen wir

$$z' = \frac{1}{x}(1 + z^2), \quad z(1) = 0/1 = 0 = z_0.$$

Die Variablen sind getrennt: Es ist $z' = f(x)g(z)$ mit $f(x) = 1/x$, $g(z) = 1 + z^2$ und als Definitionsbereiche nehmen wir $I =]0, \infty[$ und $J = \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = \log(x) - \log(1) = \log(x),$$

$$G(z) = \int_0^z \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan(z) - \arctan(0) = \arctan(z).$$

Dies ergibt

$$G(J) =]-\pi/2, \pi/2[.$$

Damit ist das größtmögliche I'

$$I' =]\exp(-\pi/2), \exp(\pi/2)[.$$

Als Lösung für die substituierte Gleichung bekommen wir also die Funktion $\psi(x) = \tan(\log(x))$. Die Lösung für die original Gleichung ist dann

$$\varphi :]\exp(-\pi/2), \exp(\pi/2)[\rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x\psi(x) = x \tan(\log(x)).$$

△

22 Lipschitz-Bedingung und Eindeutigkeit von Lösungen

Kommen wir zur Theorie von Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Differentialgleichungen. Die Ergebnisse scheinen von abstrakter Natur zu sein, sind aber praktisch sehr relevant.

Wir beschäftigen uns wieder mit n -dimensionalen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Auch diesem Fall lässt sich das System der Differentialgleichungen als äquivalentes System von Integralgleichungen schreiben. Wir formulieren das als Satz mit Beweis:

Satz 22.1. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und $(x_0, y_0) \in G$. Dann gilt: Eine differenzierbare Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ auf einem Intervall I , $x_0 \in I$ deren Graph in G liegt ist eine Lösung von $y' = f(x, y)$ mit Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$, genau dann, wenn die Integralgleichung

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt$$

gilt.

Beweis.

„ $\Leftarrow$ “: Sei die Integralgleichung erfüllt. Durch Einsetzen von $x = x_0$ erhält man sofort den Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$. Da die Funktion $t \mapsto f(t, \varphi(t))$ auf I stetig ist, erhält man nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\varphi'(x) = \frac{d}{dx} \left(y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \right) = f(x, \varphi(x)),$$

was zeigt, dass die Differentialgleichung erfüllt ist.

„ $\Rightarrow$ “: Sei φ nun eine Lösung der Differentialgleichung mit $\varphi(x_0) = y_0$. Es folgt (wiederum mit dem Hauptsatz) durch Integration

$$\int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt = \int_{x_0}^x \varphi'(t) dt = \varphi(x) - \varphi(x_0)$$

was zeigt, dass die Integralgleichung erfüllt ist.

□

Für Differentialgleichungen ist folgende leichte Verfeinerung des Begriffs der Lipschitz-Stetigkeit wichtig:

Definition 22.2. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$f : G \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (x, y) \mapsto f(x, y).$$

Wir sagen, f ist *Lipschitz-stetig* bezüglich y mit Konstanten $L \geq 0$, wenn für alle $(x, y), (x, \tilde{y}) \in G$ gilt

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq L \|y - \tilde{y}\|.$$

Wir sagen, f ist in G *lokal Lipschitz-stetig* bezüglich y , wenn es zu jedem $(a, b) \in G$ eine Umgebung U gibt, so dass f in $G \cap U$ Lipschitz-stetig bezüglich y mit einer (ggf. von U abhängigen) Konstante $L \geq 0$ ist.

Satz 22.3. Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und ist $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig partiell nach den Variablen $y_1, \dots, y_n$ differenzierbar, so ist f in G lokal Lipschitz-stetig bezüglich y .

Beweis.

Dies folgt im Wesentlichen aus Korollar 11.3: Zu $(a, b) \in G$ gibt es $r > 0$, so dass

$$V := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - a| \leq r, \quad \|y - b\|_2 \leq r\} \subset G.$$

Dann ist V der Abschluss einer offenen Umgebung von (a, b) und außerdem kompakt. Da alle partiellen Ableitungen von f stetig sind, nehmen die Funktionen $(x, y) \mapsto |\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(x, y)|$ alle ihr Maximum auf V an. Wir bezeichnen mit $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ die $n \times n$ -Matrix der partiellen Ableitungen von f nach den Variablen $y_1, \dots, y_n$. Damit folgt aus Korollar 11.3 direkt für $(x, y), (x, \tilde{y}) \in V$

$$\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\|_2 \leq L \|y - \tilde{y}\|_2.$$

mit $L := \max_{(x, y) \in V} \|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\|$. □

An dieser Stelle können wir schon jetzt einen Satz beweisen, der die Eindeutigkeit von Lösungen garantiert (ohne dass wir schon etwas über die Existenz von Lösungen wissen - wir arbeiten also unter der Annahme, dass Lösungen existieren).

Für den Eindeutigkeitssatz benutzen wir ein Lemma, dass auch von eigenem Interesse ist:

Lemma 22.4 (Grönwall'sche Ungleichung). Es sei I ein Intervall, $k : I \rightarrow [0, \infty[$ stetig, $x_0 \in I$ und $v : I \rightarrow [0, \infty[$ erfülle für alle $x \in I$

$$v(x) \leq c + \left| \int_{x_0}^x k(t)v(t)dt \right|$$

mit einem $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in I$

$$v(x) \leq c \exp\left(\left| \int_{x_0}^x k(t)dt \right|\right).$$

Beweis.

Wir betrachten vorerst $x \in I$ mit $x \geq x_0$ (d.h. die Beträge im Lemma können weggelassen werden). Wir bezeichnen $Q(x) := c + \int_{x_0}^x k(t)v(t)dt$ und folgern $Q'(x) = k(x)v(x)$. Daher gilt

$$Q'(x) - k(x)Q(x) = \underbrace{k(x)}_{\geq 0} \underbrace{\left[v(x) - c - \int_{x_0}^x k(t)v(t)dt \right]}_{\leq 0} \leq 0.$$

In dieser Definition haben wir die Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ offen gelassen. Ist eine Funktion (lokal) Lipschitz-stetig bezüglich einer Norm, so ist sie wegen Satz 17.6 bezüglich aller anderen Normen (lokal) Lipschitz-stetig, jedoch ggf. mit anderen Konstanten.

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\exp\left(-\int_{x_0}^x k(t) dt\right) Q(x) \right] \\ = -k(x) \exp\left(-\int_{x_0}^x k(t) dt\right) Q(x) + \exp\left(-\int_{x_0}^x k(t) dt\right) Q'(x) \\ = \exp\left(-\int_{x_0}^x k(t) dt\right) \left[-k(x) Q(x) + Q'(x) \right] \leq 0. \end{aligned}$$

Integrieren wir diese Ungleichung von x_0 bis x ergibt sich

$$\exp\left(-\int_{x_0}^x k(t) dt\right) Q(x) - \underbrace{Q(x_0)}_{=c} \leq 0,$$

woraus folgt

$$v(x) \leq Q(x) \leq c \exp\left(\int_{x_0}^x k(t) dt\right).$$

Der Fall $x \leq x_0$ funktioniert analog. $\square$

Aus der Grönwall'schen Ungleichung (Lemma 22.4) folgt der nächste Satz über die Fehlerfortpflanzung bezüglich des Anfangswerts.

Satz 22.5. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich y mit Konstante L . Seien φ, ψ zwei Lösungen von $y' = f(x, y)$ auf einem offenen Intervall I zu den Anfangswerten $\varphi(x_0) = y_0$ und $\psi(x_0) = z_0$. Dann gilt für alle $x \in I$

In diesem Satz ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ ist und L ist bezüglich dieser Norm zu verstehen.

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \|y_0 - z_0\| \exp(L|x - x_0|)$$

Beweis.

Es sei $x \in I$. Nach Satz 22.1 gilt für die Funktionen φ und ψ

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt \\ \psi(x) &= z_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt. \end{aligned}$$

Wir folgern

$$\begin{aligned} \|\varphi(x) - \psi(x)\| &\leq \|y_0 - z_0\| + \left\| \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t)) dt \right\| \\ &\leq \|y_0 - z_0\| + \int_{x_0}^x L \|\varphi(t) - \psi(t)\| dt. \end{aligned}$$

Wir benutzen nun die Grönwall'sche Ungleichung für $v(x) = \|\varphi(x) - \psi(x)\|$, $c = \|y_0 - z_0\|$ und $k(t) \equiv L$ und erhalten

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \|y_0 - z_0\| \exp(L|x - x_0|).$$

$\square$

Setzen wir $y_0 = z_0$, so erhalten wir den angekündigten Eindeutigkeitssatz:

Satz 22.6. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y . Seien φ, ψ zwei Lösungen von $y' = f(x, y)$ auf einem offenen Intervall I mit $\varphi(x_0) = \psi(x_0)$ für ein $x_0 \in I$, dann gilt $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I$.

Man beachte, dass wir nur *lokal* Lipschitz stetig vorausgesetzt haben. Die Behauptung folgt also nicht direkt aus Satz 22.5.

Beweis.

Da f lokal Lipschitz stetig bezüglich y ist, folgt die Gleichheit von φ und ψ auf einem Intervall der Form $]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ aus Satz 22.5 (setze dort $y_0 = z_0$).

Wir setzen nun

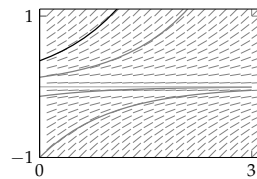
$$x_1 = \sup\{t \mid \varphi(s) = \psi(s) \text{ für } s \in [x_0, t]\},$$

d.h. φ und ψ stimmen bis zu x_1 überein. Im Falle $x_1 = \infty$ (bzw. x_1 ist gleich dem rechten Ende von I), sind wir fertig. Nehmen wir also an, dass dies nicht gilt. Das heißt, es gibt $\delta > 0$, so dass $[x_1, x_1 + \delta] \subset I$. Wegen der Stetigkeit von φ und ψ gilt $\varphi(x_1) = \psi(x_1)$ und nach dem ersten Beweisschritt existiert $\epsilon > 0$, so dass $\varphi(x) = \psi(x)$ für $x \in I \cap]x_1 - \epsilon, x_1 + \epsilon[$. Dies widerspricht der Definition von x_1 und also muss x_1 das rechte Intervallende von I sein (bzw. ∞). Es gilt also $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I, x \geq x_0$.

Analog zeigt man $\varphi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in I, x \leq x_0$. $\square$

Beispiel.

Wir betrachten $y' = |y|$. Da $y \mapsto |y|$ Lipschitz-stetig mit Konstante $L = 1$ ist, muss es hier eindeutige Lösungen geben. Diese sind zum Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ wie folgt: Ist $y_0 \geq 0$ so ist $\varphi(x) = y_0 \exp(x - x_0)$ und ist $y_0 < 0$, dann $\varphi(x) = y_0 \exp(x_0 - x)$. (Einfach nachrechnen.) Richtungsfeld und ein paar Lösungen sehen so aus:



$\triangle$

Dass Eindeutigkeit tatsächlich nicht erfüllt sein muss, haben wir schon am Beispiel $y' = \sqrt{|y|}$. Mit anderen Worten: Die lokale Lipschitz-Stetigkeit kann nicht ersatzlos gestrichen werden.

Allerdings ist die Lipschitz-Bedingung nicht notwendig für Eindeutigkeit von Lösungen. Es gibt zum Beispiel die schwächere sogenannte „Osgood-Bedingung“, die auch für nicht-lokal-Lipschitz-stetige f eindeutige Lösungen garantiert. Diese besagt, dass es eine stetige Funktion ω geben muss, für die gilt

1. $\omega(0) = 0, \omega(t) > 0$ für $t > 0$,

2. $\|f(x, y) - f(x, \tilde{y})\| \leq \omega(\|y - \tilde{y}\|)$, und
3. $\int_0^1 \frac{dt}{\omega(t)} = \infty$ (genauer: $\int_\epsilon^1 \frac{dt}{\omega(t)}$ ist unbeschränkt für $\epsilon \rightarrow 0$).

23 Existenz-Sätze

In diesem Abschnitt behandeln wir die Frage nach der Existenz von Lösungen von nichtlinearen gewöhnlichen Differentialgleichungen. Existenzsätze benutzen oft Fixpunktsätze; in unseren Fällen wird der Banachsche Fixpunktsatz eingesetzt um eine Lösung einer Differentialgleichung im Raum $(C[a, b], \|\cdot\|_{\sup})$ zu finden.

Der erste Satz zeigt, dass eine lokale Lösung existiert wenn die rechte Seite in y lokal Lipschitz-stetig ist.

Satz 23.1 (Satz von Picard-Lindelöf). *Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y . Dann gibt es zu jedem $(x_0, y_0) \in G$ ein $\epsilon > 0$ und genau eine Funktion $\varphi : [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ löst.*

Beweis.

Nach Satz 22.1 ist die Differentialgleichung (inklusive Anfangswert) äquivalent zur Integralgleichung

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \varphi(t)) dt.$$

Dies ist eine Fixpunktgleichung für die gesuchte Funktion φ , genauer: Wir suchen einen Fixpunkt der Abbildung T , welche einer Funktion ψ die Funktion $\eta = T\psi$ definiert durch

$$\eta(x) = (T\psi)(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt$$

zuerordnet. Die Idee des Beweises ist es, mit dem Banachschen Fixpunktsatz zu zeigen, dass dieses Fixpunktproblem eine Lösung hat. Dazu müssen wir einen geeigneten vollständigen metrischen Raum finden, auf dem T eine Kontraktion ist. Als metrischer Raum bietet sich eine geeignete Teilmenge A des normierten Raumes $C([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ mit noch zu bestimmendem $\epsilon > 0$ an (mit der von der Supremumsnorm induzierten Metrik).

Da f bezüglich y lokal Lipschitz stetig ist, gibt es $\delta, r > 0$, so dass

$$Q_{\delta, r} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \mid |x - x_0| \leq \delta, \|y - y_0\|_{\infty} \leq r\} \subset G.$$

f auf dieser Menge Lipschitz stetig bezüglich y mit Konstante L ist. Da f stetig und $Q_{\delta, r}$ kompakt ist, existiert

$$M = \max_{(x, y) \in Q_{\delta, r}} \|f(x, y)\|_{\infty}.$$

Wir betrachten

$$A = \{\psi \in C([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n) \mid \|\psi - y_0\|_{\sup} \leq r\}$$

und versuche, $\epsilon > 0$ so bestimmen, dass

- i) für $\varphi \in A$ immer gilt und,
 ii) dass $T\varphi \in A$ ist, und dass für $\varphi_1, \varphi_2 \in A$ gilt $\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{\sup} < c\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\sup}$ mit $c < 1$ gilt.

Die Menge A ist eine abgeschlossene Teilmenge des vollständigen normierten Raumes $C([x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon], \mathbb{R}^n)$ und daher ein vollständiger metrischer Raum (mit der durch die Supremumsnorm induzierten Metrik).

Zu i): Für $\psi \in A$ gilt $\|\psi - y_0\|_{\sup} \leq r$, also ist der Graph von ψ in $Q_{\delta, r} \subset G$, falls $\epsilon \leq \delta$ gilt. Daher ist $f(t, \psi(t))$ für $t \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ definiert und dort stetig in t . Für $\eta = T\psi$ gilt

$$\|\eta(x) - y_0\|_{\infty} = \left\| \int_{x_0}^x f(t, \psi(t)) dt \right\|_{\infty} \leq |x - x_0| M \leq \epsilon M.$$

Bilden wir links das Supremum über x , so folgt

$$\|\eta - y_0\|_{\sup} \leq \epsilon M.$$

Damit also $\eta \in A$ gilt, muss $\epsilon M \leq r$ gelten, also fordern wir

$$\epsilon \leq r/M.$$

Dann gilt immer $T\varphi \in A$ für $\varphi \in A$.

Zu ii): Seien nun $\varphi_1, \varphi_2 \in A$. Dann gilt

$$(T\varphi_1)(x) - (T\varphi_2)(x) = \int_{x_0}^x \left(f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t)) \right) dt.$$

Jetzt wollen wir Lipschitz-Stetigkeit von f ausnutzen. Für $x \in [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ gilt

$$\begin{aligned} \|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)\|_{\infty} &\leq \left| \int_{x_0}^x L \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|_{\infty} dt \right| \\ &\leq L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\sup} |x - x_0| \leq \epsilon L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\sup}. \end{aligned}$$

Bilden wir das Supremum über x auf der linken Seite, folgt

$$\|T\varphi_1 - T\varphi_2\|_{\sup} \leq \epsilon L \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\sup}.$$

Damit also T eine Kontraktion ist, fordern wir $\epsilon L < 1$, also

$$\epsilon < 1/L.$$

Unsere Beobachtungen zusammengefasst: Gilt

$$\epsilon < \min\left(\delta, \frac{r}{M}, \frac{1}{L}\right)$$

so ist T eine Kontraktion auf A und hat nach dem Banachschen Fixpunktsatz genau einen Fixpunkt φ und dieser ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems. $\square$

Der Banachsche Fixpunktsatz ist konstruktiv, d.h. er gibt sogar ein Verfahren an, welches eine Folge konstruiert, die gegen den Fixpunkt konvergiert.

Für eine beliebige Funktion $\varphi_0 \in A$ konvergiert die Folge φ_k , rekursiv konstruiert durch

$$\varphi_{k+1} = T\varphi_k,$$

gegen die Lösung φ der Gleichung $y' = f(x, y)$ mit $\varphi(x_0) = y_0$ (und das in der Supremumsnorm). Nehmen wir zum Beispiel $\varphi_0 \equiv y_0$, so konvergiert die Folge (φ_k) auf einer gewissen Umgebung $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$ gleichmäßig gegen die Lösung. Diese Iteration wird auch *Picard-Iteration* genannt.

Diese kann in manchen Fällen benutzt werden, um Lösung zu berechnen (und in allen Fällen kann man damit Lösungen Approximieren):

Beispiel.

Wir betrachten die Gleichung $y' = 2xy$ und suchen die Lösung φ mit $\varphi(0) = y_0$. Die Iterationsvorschrift ist hier

$$\varphi_{k+1}(x) = y_0 + 2 \int_0^x t \varphi_k(t) dt.$$

Mit $\varphi_0(x) \equiv y_0$ ergibt sich

$$\varphi_1(x) = y_0 + 2y_0 \int_0^x t dt = y_0(1 + x^2)$$

$$\varphi_2(x) = y_0 + 2y_0 \int_0^x t(1 + t^2) dt = y_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2})$$

$$\varphi_3(x) = y_0 + 2y_0 \int_0^x t(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}) dt = y_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!})$$

und per Induktion zeigt man

$$\varphi_k(x) = y_0(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2k}}{k!}).$$

Wir erhalten

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(x) = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = y_0 \exp(x^2)$$

als Lösung. △

Beispiel.

Wir betrachten $y' = 1 + y^2$. Hier wissen wir schon, dass die Lösung φ zum Anfangswert $\varphi(0) = 0$ die Funktion $\varphi(x) = \tan(x)$ ist. Wir führen die Picard-Iteration durch und starten mit $\varphi_0(0) \equiv 0$. Die

ersten Iterierten sind

$$\varphi_1(x) = \int_0^x (1 + 0^2) dt = x$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x (1 + t^2) dt = x + \frac{1}{3}x^3$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x) &= \int_0^x (1 + (t + \frac{1}{3}t^3)^2) dt = \int_0^x (1 + t^2 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{9}t^6) dt \\ &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{63}x^7.\end{aligned}$$

Die nächste Iterierte ist schon

$$\varphi_4(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{38}{2835}x^9 + \frac{134}{4725}x^{11} + \frac{4}{12285}x^{13} + \frac{1}{59535}x^{15}.$$

Die ersten vier Summanden sind schon die Summanden der Taylor-Entwicklung des Tangens (und die Koeffizienten folgen keiner einfacher Formel). $\triangle$

Unter weiteren Forderungen an die rechte Seite kann man auch globale Existenz von Lösungen zeigen. Dies ist der Inhalt des nächsten Satzes. Wir formulieren den Satz für Funktionen mit Werten in einem Banach-Raum X . Das ist nicht komplizierter als der Spezialfall und zeigt, wie weitreichend unsere bisher entwickelten Begriffe sind.

Satz 23.2 (Globale Existenz und Eindeutigkeit). *Es sei X ein reeller Banach-Raum, $x_0 \in X$ und $f \in C([0, \infty[\times X, X)$ global Lipschitz-stetig auf $\mathbb{R} \times X$ mit Lipschitz-Konstanten $M < \infty$. Weiterhin sei $t \mapsto f(t, x_0)$ exponentiell beschränkt, d.h. es gebe ein $\tilde{M} < \infty$, sodass $\tilde{C} := \sup_{t \geq 0} \|e^{-\tilde{M}t} f(t, x_0)\| < \infty$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$x' = f(t, x), \quad x(0) = x_0,$$

eine eindeutige Lösung $x \in C^1([0, \infty[, X)$.

Beweis. Wir benutzen auch hier die *Picard-Iteration*, zeigen deren Konvergenz aber in einem anderen Banach-Raum. Für ein noch zu wählendes $\alpha > 0$ definieren wir den Raum $Y \subset C([0, \infty[, X)$ der stetigen X -wertigen Funktionen auf $[0, \infty[$ für welche die gewichtete Supremumsnorm

$$\|x\|_\alpha := \sup_{t \geq 0} \{e^{-\alpha t} \|x(t)\|_X\}$$

endlich ist, d.h. $Y := \{x \in C([0, \infty[, X) \mid \sup_{t \geq 0} e^{-\alpha t} \|x(t)\|_X < \infty\}$. Dass $(Y, \|\cdot\|_\alpha)$ einen Banachraum ist, sieht man analog zu Satz 4.9.

Wir definieren $F : C([0, \infty[, X) \rightarrow C([0, \infty[, X)$ durch

$$F(x)(t) := x_0 + \int_0^t f(s, x(s)) ds.$$

Aus der exponentiellen Beschränktheit folgt, dass für alle $t > 0$ gilt $\|f(t, x_0)\|_X \leq \tilde{C}e^{\tilde{M}t}$ und für $\alpha \geq \tilde{M}$, so gilt

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \|F(x_0)(t) - x_0\|_X &\leq e^{-\alpha t} \int_0^t \|f(s, x_0)\|_X ds \leq \tilde{C} e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\tilde{M}s} ds \\ &= \frac{\tilde{C}}{\tilde{M}} \left(e^{-(\alpha - \tilde{M})t} - e^{-\alpha t} \right) \leq \frac{\tilde{C}}{\tilde{M}}, \end{aligned}$$

für jedes $t \geq 0$. Fassen wir x_0 als Element von Y auf, nämlich als konstante Funktion $x_0(t) = x_0$, für alle $t \geq 0$, so ist $\|x_0\|_\alpha = \|x_0\|_X$ und daher

$$\|F(x_0)\|_\alpha \leq \|x_0\|_\alpha + \|F(x_0) - x_0\|_\alpha \leq \|x_0\|_\alpha + \frac{\tilde{C}}{\tilde{M}} < \infty.$$

Somit sind $x_0, F(x_0) \in Y$.

Sind nun $x, \tilde{x} \in Y$, so beobachten wir weiterhin, dass

$$\begin{aligned} e^{-\alpha t} \|F(x)(t) - F(\tilde{x})(t)\|_X &\leq \int_0^t e^{-\alpha t} \|f(s, x(s)) - f(s, \tilde{x}(s))\|_X ds \\ &\leq M \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} \{e^{-\alpha s} \|x(s) - \tilde{x}(s)\|_X\} ds \\ &\leq M \|x - \tilde{x}\|_\alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} ds \\ &= M \|x - \tilde{x}\|_\alpha \frac{1 - e^{-\alpha t}}{\alpha} \leq \frac{M}{\alpha} \|x - \tilde{x}\|_\alpha \end{aligned}$$

Bilden wir das Supremum über $t \geq 0$, so folgt daraus, dass

$$\|F(x) - F(\tilde{x})\|_\alpha \leq \frac{M}{\alpha} \|x - \tilde{x}\|_\alpha.$$

Für $\alpha > M$ ist also F eine Kontraktion bzgl. $\|\cdot\|_\alpha$. Außerdem folgt

$$\|F(x)\|_\alpha \leq \|F(x_0)\|_\alpha + \|F(x) - F(x_0)\|_\alpha \leq \|F(x_0)\|_\alpha + \frac{M}{\alpha} \|x - x_0\|_\alpha < \infty$$

und somit auch $F(x) \in Y$ liegt, dass also $F : Y \rightarrow Y$ eine Kontraktion auf dem ganzen Banach-Raum Y ist. Der Banachsche Fixpunktsatz garantiert also eine Lösung $x_* \in Y$.

□

Ist man nur an der Existenz von Lösungen interessiert, so gibt es den *Existenzsatz von Peano*. Dieser lautet:

Ist $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, sei $(x_0, y_0) \in G$. Dann existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Funktion $\varphi : [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}^n$ welche die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ mit Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ erfüllt.

Der Beweis dieses Satzes ist nicht sehr tiefgehend, benutzt aber Hilfsmittel, die uns aktuell nicht zur Verfügung stehen. Eine Möglichkeit besteht darin, eine Folge von approximativen Lösungen zu konstruieren, in dem man stückweise linear durch das Richtungsfeld geht und dabei eine immer kleinere Schrittweite nimmt. Dann muss man schließen, dass die stückweisen linearen Lösungen gegen eine Lösung konvergieren. Hier hilft einem der Satz von Arzelà-Ascoli, den wir in dieser Vorlesung nicht behandeln.

24 Differentialgleichungen höherer Ordnung

Wir formalisieren noch einmal, was eine Differentialgleichung der Ordnung n ist. Wir betrachten wieder nur den eindimensionalen Fall. Wir werden sehen, dass wir für solche Differentialgleichungen kaum neue Theorie entwickeln müssen, um Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu bekommen, da wir diese mit einem Trick auf den Fall der Ordnung 1 zurückführen können.

Definition 24.1. Es sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

gewöhnliche (eindimensionale) Differentialgleichung der Ordnung n . Eine Lösung davon ist eine auf einem Intervall I definierte, n -mal differenzierbare Funktion φ mit der Eigenschaft, dass

i) Die Menge

$$\{(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{R}^n \mid y_v = \varphi^{(v)}(x), v = 0, \dots, n-1\}$$

ist in G enthalten, und

ii) für alle $x \in I$ gilt

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Wir zeigen nun, dass eine eindimensionale Differentialgleichung der Ordnung n äquivalent ist zu einer n -dimensionalen Differentialgleichung der Ordnung 1: Zur Gleichung

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

mit $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ betrachten wir folgendes System für Funktionen $y_0, \dots, y_{n-1}$:

$$\begin{aligned} y_0' &= y_1 \\ y_1' &= y_2 \\ &\vdots \\ y_{n-2}' &= y_{n-1} \\ y_{n-1}' &= f(x, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}). \end{aligned} \quad (**)$$

Definieren wir

$$Y := \begin{bmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad F(x, Y) = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(x, Y) \end{bmatrix},$$

so schreibt sich die Differentialgleichung (**) einfach als

$$Y' = F(x, Y). \quad (***)$$

Ebenso könnten wir mehrdimensionale gewöhnliche Differentialgleichungen der Ordnung n definieren. Eine solche hat die Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

mit $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{mn}$ und $f : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig.

Sei nun $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (*), d.h. es gilt

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)).$$

Wir definieren die vektorwertige Funktion Φ

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{bmatrix} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

durch

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= \varphi(x), \\ \varphi_1(x) &= \varphi'(x), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}(x) &= \varphi^{(n-1)}(x). \end{aligned}$$

Dann ist Φ eine Lösung von (**).

Ist umgekehrt Φ eine Lösung von (**) so setze $\varphi = \varphi_0$. Dann gilt nach den ersten $n - 1$ Gleichungen von (**):

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi'_0 = \varphi' \\ \varphi_2 &= \varphi'_1 = \varphi''_0 = \varphi'' \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1} &= \varphi'_{n-2} = \dots = \varphi^{(n-1)}_0 = \varphi^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Da $\varphi^{(n-1)}$ differenzierbar ist, ist φ n -mal differenzierbar und es folgt aus der n -ten Gleichung von (**)

$$\varphi^{(n)} = f(x, \varphi, \varphi', \dots, \varphi^{(n-1)}).$$

Wir haben also gezeigt:

Satz 24.2. Ist die Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung (*) n -ter Ordnung, so ist $\Phi = [\varphi \quad \varphi' \quad \dots \quad \varphi^{(n-1)}]^T$ Lösung von (**). Ist umgekehrt $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Phi = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_{n-1}]^T$ eine Lösung von (**), so ist φ_0 eine Lösung von (*).

Analog kann man auch Systeme von m Gleichungen n -ter Ordnung auf Systeme von nm Gleichungen erster Ordnung zurückführen.

Wir übertragen nun die Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen aus den Sätzen 22.6 und 23.1 auf den Fall von Gleichungen

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

wobei $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ mit $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ stetig. Hier sagen wir, dass f lokal Lipschitz-stetig bezüglich Y ist, wenn es zu jedem $z =$

$(x, Y) \in G$ eine Umgebung U und ein $L \geq 0$ gibt, so dass für $(x, Y), (x, \tilde{Y}) \in U$ gilt

$$|f(x, Y) - f(x, \tilde{Y})| \leq L \|Y - \tilde{Y}\|.$$

Wir bekommen:

Satz 24.3. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig lokal Lipschitz-stetig bezüglich Y . Dann gilt:

i) (Eindeutigkeit) Sind $\varphi, \psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lösungen von

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (*)$$

und gilt für ein $x_0 \in I$

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0), \quad \varphi'(x_0) = \psi'(x_0), \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0)$$

so gilt für alle $x \in I$: $\varphi(x) = \psi(x)$.

ii) (Existenz) Ist $(x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}) \in G$ so gibt es $\epsilon > 0$ und eine Lösung $\varphi : [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung (*) mit

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y_1, \dots, \quad \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Um eine Lösung einer Differentialgleichung n -ter Ordnung eindeutig festzulegen, muss man also nicht nur den Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ festlegen, sondern auch die Werte der ersten $(n-1)$ -Ableitungen an der Stelle x_0 .

Für nichtlineare Differentialgleichungen höherer Ordnung gibt es wenige Methoden, Lösungen auszurechnen. Folgendes Beispiel ist daher linear.

Beispiel.

Wir betrachten $y'' = -y$. Zwei verschiedene Lösungen sind schnell gefunden:

$$\varphi(x) = \sin(x), \quad \psi(x) = \cos(x).$$

Da die Differentialgleichung linear ist, ist für $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ auch

$$\varphi_{c_0, c_1}(x) = c_0 \cos(x) + c_1 \sin(x)$$

eine Lösung. Da gilt

$$\varphi_{c_0, c_1}(0) = c_0, \quad \varphi'_{c_0, c_1}(0) = c_1$$

ist φ_{c_0, c_1} die eindeutige Lösung zu den Anfangsbedingungen $\varphi(0) = c_0$ und $\varphi'(0) = c_1$. $\triangle$

Hier noch ein Beispiel, in dem man mit Tricks tatsächlich in manchen Fällen explizite Lösungen angeben kann:

Beispiel.

Wir betrachten die Gleichung

$$y'' = f(y)$$

mit Lipschitz-stetigem f (d.h. eine eindeutige Lösung ist garantiert, wenn wir Anfangsbedingungen $\varphi(0) = y_0$ und $\varphi'(0) = y_1$ festlegen).

Der Trick besteht darin, die Gleichung mit $2y'$ zu multiplizieren und mit Hilfe der Kettenregel umzuformen. Aus der Gleichung wird $2y'y'' = 2y'f(y)$. Die linke Seite ist $((y')^2)' = 2y'y''$. Ist F eine Stammfunktion von f , nehmen wir z.B. F so, dass $F(y_0) = 0$, dann gilt $y'f(y) = \frac{d}{dx}F(y)$ und wir bekommen

$$((y')^2)' = 2y'y'' = 2y'f(y) = 2\frac{d}{dx}F(y). \quad (*)$$

Durch Integration beider Seiten (es steht jeweils eine Ableitung nach x dort!) ergibt sich

$$(y')^2 = 2F(y) + C.$$

Gilt $y_1 \geq 0$, so muss die positive Wurzel gezogen werden, d.h. es folgt

$$y' = \sqrt{2F(y) + C}$$

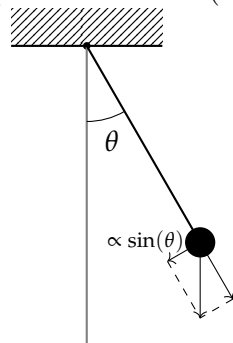
Die Konstante C ist ebenfalls durch die Anfangsbedingung bestimmt: Integrieren wir $(*)$ von x_0 bis x , so folgt (da wir $F(y_0) = 0$ angenommen haben)

$$(y')^2 - y_1^2 = 2F(y) - 2F(y_0) = 2F(y),$$

also gilt $C = y_1^2$. Per Trennung der Variablen lässt sich hier ggf. eine Lösung bestimmen. $\triangle$

Beispiel.

Das sogenannte *Mathematische Pendel*, fällt in die Klasse des vorigen Beispiels: Ist θ die Winkel-Auslenkung eines Pendels, so ist die Rückstellkraft proportional zu $-\sin(\theta)$.



Dies führt auf eine Differentialgleichung der Form

$$\theta'' = -c \sin(\theta)$$

mit Anfangswerten $\theta(0) = \theta_0$ für Ort (=Winkel) und $\theta'(0) = \theta_1$ für Ableitung (=Winkel-Geschwindigkeit). Obige Rückführung auf eine Gleichung erster Ordnung führt für $\theta_1 \geq 0$ auf

$$\theta' = \sqrt{2c(\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) + \theta_1^2}.$$

Hier kommt man allerdings mit den uns bekannten Funktionen nicht weiter: Trennung der Variablen führt auf ein Integral der Form

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(\theta) + K}}$$

welches durch Substitution $t = \cos(\theta)$ übergeht in sogenanntes *elliptisches Integral*

$$\int \frac{dt}{\sqrt{K + t - Kt^2 - t^3}}$$

deren Untersuchung ganze mathematische Zweige hervorgebracht hat. $\triangle$

25 Lineare Differentialgleichungen in mehreren Dimensionen

In diesem Teil wird es von Vorteil sein, komplexwertige Differentialgleichungen zu betrachten. Dies macht die Sache nicht komplizierter. Im Folgenden bezeichnet $\mathbb{K}$ „entweder $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ “.

Definition 25.1. Es sei I ein Intervall und

$$A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$$

eine stetige, Matrix-wertige Abbildung mit den Komponentenfunktionen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dann heißt die Gleichung

$$y' = A(x)y$$

homogenes lineares Differentialgleichungssystem (erster Ordnung).

Ist $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig, dann heißt die Gleichung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

inhomogenes lineares Differentialgleichungssystem (erster Ordnung).

Eine Lösung ist eine auf einem Intervall I definierte Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$, so dass $\varphi'(x) = A(x)\varphi(x) + b(x)$.

Existenz von Lösungen lässt sich mit schon bekannten Ergebnissen erzielen. Wir halten jedoch einen eigenen Satz fest, da sich im linearen Fall die Voraussetzungen knapp formulieren lassen und wir globale Existenz bekommen:

Satz 25.2. Es sei I ein Intervall und $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$, $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ der Gleichung

$$y' = A(x)y + b(x)$$

zum Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$.

Wir untersuchen zuerst homogene Gleichungen:

Satz 25.3. Es sei I ein Intervall (welches mehr als einen Punkt enthält), $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ stetig. Es bezeichne L_H die Menge aller Lösungen der Gleichung $y' = A(x)y$. Dann gilt:

- i) L_H ist ein $\mathbb{K}$ -Vektorraum der Dimension n ,
- ii) sind $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ Lösungen von $y' = A(x)y$, dann ist äquivalent:

- a) Die Funktionen $\varphi^1, \dots, \varphi^k \in \text{Abb}(I, \mathbb{K}^n)$ sind linear unabhängig über $\mathbb{K}$.
- b) Es gibt ein $x_0 \in I$, so dass die Vektoren $\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$ sind.
- c) Für jedes $x \in I$ sind die Vektoren $\varphi^1(x), \dots, \varphi^k(x) \in \mathbb{K}^n$ linear unabhängig über $\mathbb{K}$.

Beweis.

Der Beweis ist wie folgt strukturiert: Wir zeigen zuerst, dass L_H ein Untervektorraum des Raumes $\text{Abb}(I, \mathbb{K}^n)$ ist, dann die Gleichwertigkeit der Aussagen a) bis c) und schließlich, dass L_H die Dimension n hat.

1. Offensichtlich löst $\varphi(x) \equiv 0$ die Gleichung $y' = A(x)y$, also $0 \in L_H$. Sind weiterhin $\varphi, \psi \in L_H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, so gilt $\varphi' = A\varphi$ und $\psi' = A\psi$, also $(\varphi + \lambda\psi)' = \varphi' + \lambda\psi' = A\varphi + \lambda A\psi = A(\varphi + \lambda\psi)$. Beides zusammen zeigt, dass L_H ein Unterraum ist.
2. Wir zeigen die Äquivalenz von a) bis c). Klar ist die Implikationen c) $\implies$ b). Für b) $\implies$ a) sehen wir: Ist $\lambda_1\varphi^1 + \dots + \lambda_k\varphi^k \equiv 0$ so gilt im Punkt x_0 , dass $\lambda_1\varphi^1(x_0) + \dots + \lambda_k\varphi^k(x_0) = 0$. Da die Vektoren $\varphi^1(x_0), \dots, \varphi^k(x_0)$ linear unabhängig sind, muss dann $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ gelten.

Für die Implikation a) $\implies$ c) argumentieren wir per Widerspruch: Es seien $\psi^1, \dots, \psi^k$ linear unabhängige Lösungen von $y' = A(x)y$ und $x_0 \in I$. Wir nehmen an, dass die Vektoren $\psi^1(x_0), \dots, \psi^k(x_0) \in \mathbb{K}^n$ linear abhängig wären. Dann gäbe es $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ (nicht alle gleich Null), so dass

$$0 = \lambda_1\psi^1(x_0) + \dots + \lambda_k\psi^k(x_0)$$

Dann ist die Funktion

$$\varphi = \lambda_1\psi^1 + \dots + \lambda_k\psi^k$$

nach dem ersten Beweisschritt eine Lösung von $y' = A(x)y$ und erfüllt $\varphi(x_0) = 0$. Nach Satz 25.2 gibt es dafür aber nur eine Lösung und diese muss also $\varphi \equiv 0$ sein. Dies heißt aber, dass $\varphi^1, \dots, \varphi^k$ linear abhängig sind. Widerspruch!

3. Eine direkte Konsequenz aus dem zweiten Beweisschritt ist, dass $\dim L_H \leq n$ ist, denn gäbe es $n+1$ linear unabhängige Lösungen $\psi^1, \dots, \psi^{n+1}$, so wären die Vektoren $\psi^1(x_0), \dots, \psi^{n+1}(x_0)$ in $\mathbb{K}^n$ linear unabhängig, was nicht sein kann.

Andererseits ist auch $\dim L_H \geq n$: Die Funktionen φ^i , welche $y' = A(x)y$ mit $\varphi^i(x_0) = e_i$ (i -ter Einheitsvektor) lösen, sind an der Stelle x_0 per Konstruktion linear unabhängig, also sind es, nach dem zweiten Beweisschritt, auch die Funktionen $\varphi^1, \dots, \varphi^n$.

□

Mit $\text{Abb}(X, Y)$ bezeichnen wir die Menge aller Abbildungen von einer Menge X in eine andere Menge Y . Ist Y ein Vektorraum, so ist die Menge $\text{Abb}(X, Y)$ auf natürliche Art selbst ein Vektorraum.

Beachte, dass hier lineare Unabhängigkeit in verschiedenen Vektorräumen vorkommt: Im n -dimensionalen $\mathbb{K}^n$ und im unendlichdimensionalen $\text{Abb}(I, \mathbb{K}^n)$.

Satz 25.2 gibt Anlass zu dieser Definition:

Definition 25.4. Ein *Fundamentalsystem* von Lösungen $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ der Differentialgleichung $y' = A(x)y$ ist eine Basis des Raumes L_H .

Ein paar Bemerkungen zu Begriff des Fundamentalsystems:

- Zu jedem $x_0 \in I$ und jeder Basis $y^1, \dots, y^n$ von $\mathbb{K}^n$ sind die Lösungen φ^k von $y' = A(x)y$ mit $\varphi^k(x_0) = y^k$ ein Fundamentalsystem.
- Fassen wir n Lösungen $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ zu einer Matrix

$$\Phi = [\varphi^1 \quad \dots \quad \varphi^n] \in \text{Abb}(I, \mathbb{K}^{n \times n})$$

zusammen, so gilt nach Satz 25.3, dass die Lösungen ein Fundamentalsystem bilden, wenn für ein $x_0 \in I$ gilt

$$\det \Phi(x_0) \neq 0.$$

Es folgt dann $\det \Phi(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. In diesem Fall nennen wir Φ *Fundamentalmatrix* zur Gleichung $y' = A(x)y$.

- Ist $\varphi^1, \dots, \varphi^n$ ein Fundamentalsystem zu $y' = A(x)y$, so lässt sich jede Lösung φ schreiben als $\varphi = c_1 \varphi^1 + \dots + c_n \varphi^n$ mit $c \in \mathbb{K}^n$. In Matrix-Schreibweise ist das

$$\varphi = \Phi c.$$

Eine Fundamentalmatrix ist also eine Matrix-wertige Lösung der Differentialgleichung

$$\Phi' = A\Phi$$

zu einem invertierbaren Anfangswert $\Phi(x_0) = \Phi_0$. Außerdem ist eine Lösung von $\Phi' = A\Phi$ durch Angabe eines Anfangswertes eindeutig festgelegt.

Beispiel.

Wir betrachten das einfache lineare, zweidimensionale System

$$\begin{cases} y_1' &= -\omega y_2 \\ y_2' &= \omega y_1 \end{cases}$$

mit $\omega \in \mathbb{R}$. In Matrix-Schreibweise

$$y' = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{bmatrix} y.$$

Man überzeugt sich schnell davon, dass zwei Lösungen davon gegeben sind durch

$$\varphi^1(x) = \begin{bmatrix} \cos(\omega x) \\ \sin(\omega x) \end{bmatrix}, \quad \varphi^2(x) = \begin{bmatrix} -\sin(\omega x) \\ \cos(\omega x) \end{bmatrix}.$$

Diese Lösungen sind linear unabhängig und

$$\Phi(x) = [\varphi^1(x) \quad \varphi^2(x)] = \begin{bmatrix} \cos(\omega x) & -\sin(\omega x) \\ \sin(\omega x) & \cos(\omega x) \end{bmatrix}$$

ist eine Fundamentalmatrix, denn es gilt für jedes x : $\det \Phi(x) = 1 \neq 0$. Das heißt, die allgemeine Lösung ist

$$\varphi(x) = \Phi(x)c, \quad c \in \mathbb{K}^2.$$

△

Fundamentalmatrizen sind praktisch, um Lösungen zu allgemeinen Anfangswerten in kompakter Schreibweise anzugeben:

Korollar 25.5. Ist Φ eine Fundamentalmatrix zu $y' = A(x)y$, dann ist die Lösung dieser Gleichung zum Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ gegeben durch

$$\varphi(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}y_0.$$

Die Funktion φ löst $y' = A(x)y$, da $\Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}y_0$ eine Linearkombination von Lösungen ist und der Anfangswert ist erfüllt wegen $\varphi(x_0) = \Phi(x_0)\Phi(x_0)^{-1}y_0 = y_0$.

Dies motiviert die Definition der Übergangsmatrix:

Definition 25.6. Ist Φ eine Fundamentalmatrix von $y' = A(x)y$, dann ist die Matrix

$$\Lambda(x, \xi) = \Phi(x)\Phi(\xi)^{-1}$$

die sogenannte *Übergangsmatrix* von $y' = A(x)y$; sie ist unabhängig von der gewählten Fundamentalmatrix.

Ist Γ eine weitere Fundamentalmatrix, dann lässt sich die eindeutige Lösung von $y' = A(x)y$ mit Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ auf zwei Arten schreiben, nämlich

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(x_0)^{-1}y_0 = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}y_0.$$

Da dies für alle Anfangswerte y_0 gilt, folgt $\Gamma(x)\Gamma(x_0)^{-1} = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}$.

Anders ausgedrückt: Die Übergangsmatrix $\Lambda(x, x_0)$ bildet einen Vektor y_0 auf die Lösung von $y' = A(x)y$, $\varphi(x_0) = y_0$ zur Zeit x ab, denn es gilt

$$\varphi(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}y_0 = \Lambda(x, x_0)y_0.$$

Direkte Folgerungen sind:

Korollar 25.7. i) $\Lambda(x, x) = E_n$,

ii) $\Lambda(x_3, x_2)\Lambda(x_2, x_1) = \Lambda(x_3, x_1)$,

iii) $\Lambda(x, x_0)^{-1} = \Lambda(x_0, x)$.

i): $\Lambda(x, x) = \Phi(x)^{-1}\Phi(x) = E_n$.

ii): $\Lambda(x_3, x_2)\Lambda(x_2, x_1) = \Phi(x_3)\Phi(x_2)^{-1}\Phi(x_2)\Phi(x_1)^{-1} = \Phi(x_3)\Phi(x_1)^{-1} = \Lambda(x_3, x_1)$.

iii): Folgt aus $E_n = \Lambda(x, x) = \Lambda(x, x_0)\Lambda(x_0, x)$.

26 Lineare Gleichungssysteme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Ist die Matrix-Funktion A konstant, so ergibt sich eine elegante Theorie, die immer noch eine Vielzahl von interessanten Phänomenen enthält. Wir betrachten also nun, zu einer festen Matrix A vorerst das homogene System

$$y' = Ay.$$

Wir erinnern uns kurz an den eindimensionalen Fall:

Beispiel.

Ist $A = a \in \mathbb{R}$ ein Skalar, so ergibt sich die Lösung zu $\varphi(0) = y_0$ einfach durch

$$y(x) = y_0 \exp(ax).$$

Dies lässt sich zum Beispiel mit Hilfe der Potenzreihen-Darstellung der Exponentialfunktion sehen: Es gilt

$$\exp(ax) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k x^k}{k!} = 1 + ax + \frac{a^2 x^2}{2} + \dots$$

und die Reihe konvergiert absolut in ganz $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ und gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge. Wir können daher gliedweise differenzieren und bekommen

$$\frac{d}{dx}(\exp(ax)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{ka^k x^{k-1}}{k!} = a + a^2 x + a^3 \frac{x^2}{2} + \dots = a \exp(ax)$$

(was wir natürlich schon vorher wussten). $\triangle$

Schauen wir dieses Beispiel genau an, so scheint es, also gäbe es kein Problem, wenn wir den Skalar a durch eine $n \times n$ Matrix A ersetzen. Dies ist tatsächlich im Wesentlichen wahr (es sind allerdings ein paar Unterschiede zu bemerken).

Definition 26.1 (und Satz). Sie Matrix-Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ ist definiert durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

(mit der Konvention $A^0 = E_n$). Die Reihe konvergiert absolut in $\mathbb{K}^{n \times n}$ (z.B. versehen mit der Operator-Norm $\|A\| = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2$).

Die Reihe konvergiert absolut, wenn die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\|$ absolut konvergiert. Es gilt $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ und daher folgt absolute Konvergenz der Exponentialreihe aus der absoluten Konvergenz von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$.

Beispiel.

i) Ist 0_n die Null-Matrix in $\mathbb{K}^{n \times n}$, so ist

$$\exp(0_n) = E_n.$$

ii) Wir betrachten

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$A^0 = E_2, \quad A^1 = A, \quad \text{und} \quad A^k = 0_2 \text{ für } k \geq 2.$$

Es ergibt sich also:

$$\exp(A) = E_2 + A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

iii) Betrachte für $t \in \mathbb{C}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hier gilt wieder $A^0 = E_2$, $A^1 = A$ (wie immer...) und außerdem zeigt man leicht per Induktion

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & kt \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es folgt also

$$\begin{aligned} \exp(A) &= E_2 + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{kt}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e & te \\ 0 & e \end{bmatrix} \end{aligned}$$

für die Matrix-Exponentialfunktion in diesem Fall.

△

Wir halten ein paar wichtige Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion fest:

Satz 26.2. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $T \in GL_n(\mathbb{K})$, dann gilt:

i) $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T,$

ii) $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|),$

iii) Die für alle $x \in \mathbb{R}$ erklärte Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$, $x \mapsto \exp(Ax)$ ist differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dx}(\exp(Ax)) = A \exp(Ax).$$

Beweis.

1. Es gilt

$$(T^{-1}AT)^k = (T^{-1}AT)(T^{-1}AT) \cdots (T^{-1}AT) = T^{-1}A^kT$$

und daher

$$\exp(T^{-1}AT) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{-1}A^kT}{k!} = T^{-1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right) T = T^{-1} \exp(A) T.$$

2. Man rechnet

$$\|\exp(A)\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|).$$

3. Dies folgt im Wesentlichen daraus, dass man Potenzreihen gliedweise ableiten darf. Hier geht das Argument dafür so: Wir setzen $F(x) := \exp(Ax)$, bezeichnen die Partialsummen mit $F_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k A^k}{k!}$ und bemerken $F'_n(x) = AF_{n-1}(x)$. Es folgt $F'_n(x) \rightarrow G(x) := A \exp(Ax)$ für $n \rightarrow \infty$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Intervallen. Es folgt also die Konvergenz der Integrals in

$$F_n(x) = F_n(0) + \int_0^x F'_n(t) dt$$

also

$$\exp(Ax) = I + \int_0^x A \exp(At) dt.$$

Ableiten dieser Gleichung nach x zeigt die Behauptung.

□

Aus Satz 26.2 iii) folgt sofort:

Satz 26.3. Die Matrix-wertige Abbildung $\Phi(x) = \exp(Ax)$ ist eine Fundamentalmatrix zu $y' = Ay$. Die Lösung der Gleichung zum Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0 \in \mathbb{K}^n$ ist

$$\varphi(x) = \exp(Ax) \exp(Ax_0)^{-1} y_0 = \exp(A(x - x_0)) y_0$$

anders ausgedrückt:

$$\Lambda(x, \xi) = \exp(A(x - \xi))$$

ist die Übergangsmatrix von $y' = Ay$.

Beweis.

Dies folgt aus der Eindeutigkeit von Lösungen (Satz 25.2) wie folgt:
Es gilt

$$\frac{d}{dx} \left(\exp(A(x - x_0)) y_0 \right) = A \exp(A(x - x_0)) y_0$$

und

$$\exp(A(x_0 - x_0))y_0 = y_0,$$

also ist $\exp(A(x - x_0))y_0$ die eindeutige Lösung von $y' = Ay$ mit Anfangswert $\varphi(x_0) = y_0$ und dies heißt, $\Lambda(x, \xi) = \exp(A(x - \xi))$. Andererseits ist $\Phi(x) = \exp(Ax)$ eine Fundamentalmatrix zu von $y' = Ay$, und daher ist $\exp(A(x - x_0)) = \Lambda(x, x_0) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1} = \exp(Ax)\exp(Ax_0)^{-1}$ $\square$

Es folgen weitere Eigenschaften der Matrix-Exponentialfunktion:

Satz 26.4. Für $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $x, x' \in \mathbb{R}$ gilt

- i) $\exp(Ax)\exp(Ax') = \exp(A(x + x'))$,
- ii) $\exp(Ax)$ ist invertierbar und es gilt $\exp(Ax)^{-1} = \exp(-Ax)$,
- iii) $\exp(Ax)\exp(Bx) = \exp((A + B)x)$ falls $AB = BA$.

Beweis.

Punkt i) folgt direkt aus dem vorigen Satz, Punkt ii) aus Punkt i) via $\exp(Ax)\exp(-Ax) = \exp(A(x - x)) = E_n$.

Für Punkt iii) beobachten wir: Aus $AB = BA$ folgt $A^k B = B A^k$ und daher

$$\exp(Ax)B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k A^k}{k!} \right) B = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^k A^k}{k!} B \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(B \frac{x^k A^k}{k!} \right) = B \exp(Ax).$$

Aus der Produktregel (die ebenso für Matrix-wertige Funktionen und deren Produkte gilt) folgt nun für $F(x) = \exp(Ax)\exp(Bx)$:

$$F'(x) = A \exp(Ax) \exp(Bx) + \exp(Ax) B \exp(Bx) = (A + B)F(x),$$

und wegen $F(0) = E_n$ genügen F und die Funktion $\exp((A + B)x)$ beide der Matrix-Differentialgleichung

$$\Phi' = (A + B)\Phi, \quad \text{mit Anfangswert } \Phi(0) = E_n.$$

$\square$

Zum Lösen von homogenen Gleichungen mit konstanten Koeffizienten müssen wir also „nur“ die Matrix-Exponential-Funktion auswerten. Das dies nicht ganz einfach ist, sieht man schnell, wenn man versucht

$$\exp \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

mit Hilfe der Potenzreihe auszurechnen.

Eine Möglichkeit zum Berechnen von $\exp(Ax)$ bietet Satz 26.2 i): Es gilt $\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}\exp(A)T$. Mit Hilfe der *Jordanschen Normalform* für Matrizen lässt sich nämlich jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ faktorisieren als

$$A = QJQ^{-1} \quad \text{mit } J = \begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix}$$

Das	Ergebnis	lautet	übrigens
$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{e^{-\frac{1-\sqrt{5}}{2}}}{10}$	$\left[\begin{array}{cc} 5 + \sqrt{5} + (5 - \sqrt{5})e^{\sqrt{5}} & 2\sqrt{5}(e^{\sqrt{5}} - 1) \\ 2\sqrt{5}(e^{\sqrt{5}} - 1) & 5 - \sqrt{5} + (5 + \sqrt{5})e^{\sqrt{5}} \end{array} \right]$	

wobei die J_j sogenannte Jordan-Blöcke sind, d.h. die haben die Form

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_j \end{bmatrix}$$

mit den Eigenwerten λ_j auf der Diagonalen. Damit haben wir die Aufgabe mit

$$\exp(A) = Q \exp(J) Q^{-1}$$

auf das Berechnen der Matrix-Exponential-Funktion für Jordan-Matrizen zurückgeführt. Da sich Block-Diagonal-Matrizen auch blockweise multiplizieren ergibt sich

$$\exp \left(\begin{bmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \exp(J_1) & & \\ & \ddots & \\ & & \exp(J_k) \end{bmatrix}.$$

Das Problem ist also nur noch, die Matrix-Exponential-Funktion für einzelne Jordan-Blöcke auszurechnen:

Lemma 26.5. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ und

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

gilt

$$\exp(Jt) = \exp(\lambda t) \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{bmatrix}.$$

Beweis.

Wir schreiben

$$J = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix}}_{:=D} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{:=P}.$$

Es gilt $PD = \lambda P = DP$ und nach Satz 26.4 iii) gilt

$$\exp(Jt) = \exp((P + D)t) = \exp(Pt) \exp(Dt).$$

Für die Diagonalmatrix D gilt $\exp(Dt) = \exp(\lambda E_n t) = \exp(\lambda t) E_n$.

Die Matrix P ist *nilpotent*: Es gilt $P^n = 0_n$ und insbesondere wandert die Nebendiagonale bei jeder Multiplikation mit sich selbst um eine Diagonale nach oben. Es folgt

$$\exp(Pt) = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{t^l}{l!} P^l$$

und zusammen ergibt sich die Behauptung. $\square$

Im folgenden werden wir noch zwei weitere Ergebnisse benötigen, welche hier nur als Bonusmaterial ohne Beweis auftauchen:

Satz 26.6 (Lösungsraum von inhomogenen Systemen). Sei I ein Intervall, $A : I \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$, $b : I \rightarrow \mathbb{K}^n$ stetig und L_H den Vektorraum aller Lösungen der homogenen Gleichung

$$y' = A(x)y.$$

Ist L_I die Menge aller Lösungen der inhomogenen Gleichung $y' = A(x)y + b(x)$, dann gilt: Ist $\psi_0 \in L_I$, dann ist

$$L_I = \psi_0 + L_H.$$

Anders ausgedrückt: Jede Lösung ψ der inhomogenen Gleichung lässt sich schreiben als $\psi = \psi_0 + \varphi$, wobei φ eine Lösung der homogenen Gleichung ist.

Satz 26.7 (Variation der Konstanten in mehreren Dimensionen). Es sei $\Phi = [\varphi_1 \ \cdots \ \varphi_n]$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung

$$y' = A(x)y.$$

Dann hat die inhomogene Gleichung

$$y' = A(x)y + b(x) \text{ mit Anfangswert } \varphi(x_0) = y_0$$

die Lösung $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ der Form

$$\psi(x) = \Phi(x) \left(y_0 + \int_{x_0}^x \Phi(t)^{-1} b(t) dt \right) = \Phi(x) y_0 + \int_{x_0}^x \Lambda(x, t) b(t) dt.$$

Der reelle Fall ist komplizierter. Für $A \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ gilt auch $A = QJQ^{-1}$, allerdings haben hier die Jordan-Blöcke für einen Paar komplexer Eigenwerte $\lambda = a \pm ib$ folgende Form: Mit

$$C := \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad 0_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ist

$$J = \underbrace{\begin{bmatrix} C & & 0_2 \\ & \ddots & \\ 0_2 & & C \end{bmatrix}}_{:=B} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0_2 & E_2 & & 0_2 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0_2 & & \ddots & E_2 \\ & & & 0_2 \end{bmatrix}}_{:=Q}.$$

Auch hier gilt $QB = BQ$ und mit etwas mehr Arbeit und der Abkürzung

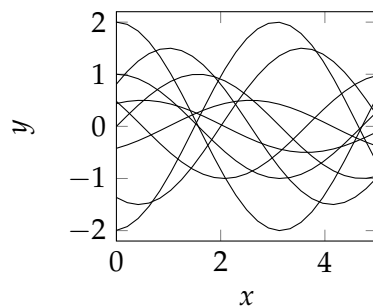
$$G(t) := \begin{bmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ -\sin(bt) & \cos(bt) \end{bmatrix}$$

folgt

$$\exp(Jt) = e^{at} \begin{bmatrix} G(t) & tG(t) & \cdots & \frac{t^{n-1}G(t)}{(n-1)!} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & tG(t) \\ & & & G(t) \end{bmatrix}.$$

27 Phasenportraits

Für mehrdimensionale Systeme und Gleichungen höherer Ordnung kann man die Lösungsgesamtheit nicht mehr einfach visualisieren. Man kann in zwei Dimensionen (oder bei Gleichungen zweiter Ordnung) zwar verschiedene Lösungen plotten, das Bild, das sich ergibt, ist aber nicht sehr informativ. Dies sieht man schon an der einfachen Gleichung $y'' = -y$; hier ein paar Lösungen:



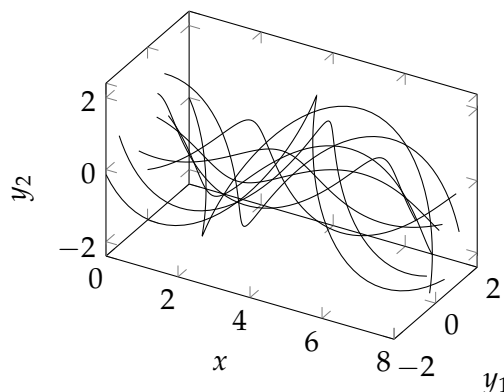
Das zugehörige System erster Ordnung ist

$$Y' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} Y$$

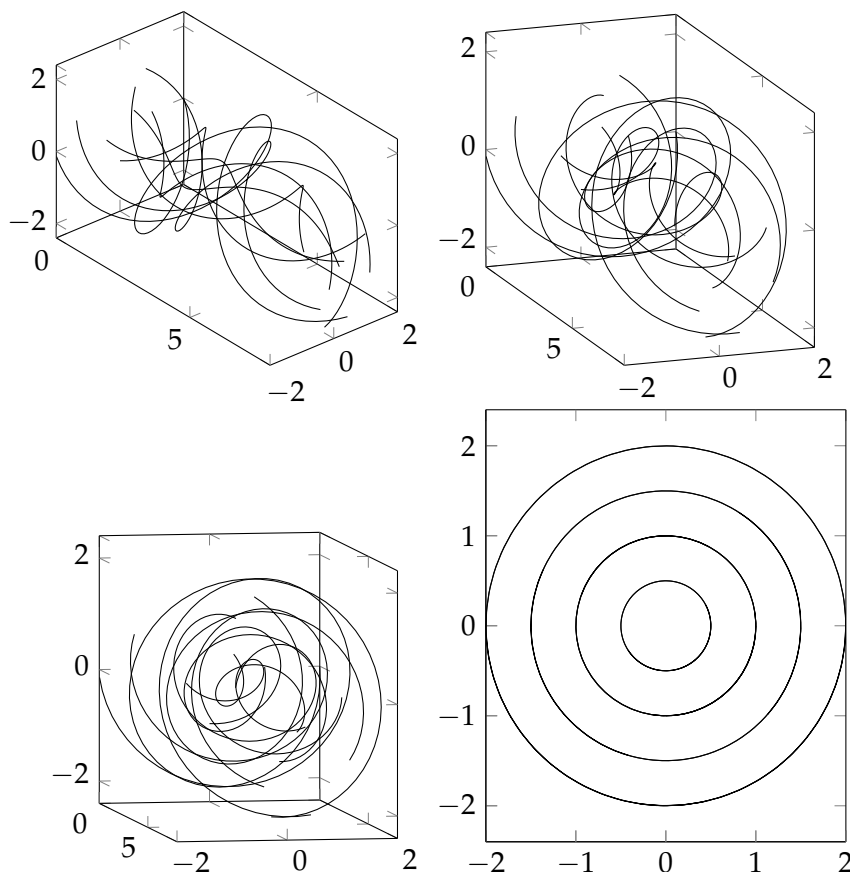
und die Lösungen dazu sind

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) \\ -c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x) \end{bmatrix}.$$

Diese können wir gerade noch als Kurven im $\mathbb{R}^3$ visualisieren. Die Lösungen von oben sehen nun so aus:



Da die Gleichung autonom ist (d.h. die rechte Seite ist unabhängig von x) ist für jede Lösung φ und jedes x_0 auch $\varphi(\cdot - x_0)$ eine Lösung. Mit anderen Worten: jede Lösung bleibt bei Verschiebung entlang der x -Achse eine Lösung. Das bedeutet, dass man auf die x -Koordinate für eine Visualisierung verzichten kann. Dies sieht man auch, wenn man den Blickwinkel auf die Lösungsgesamtheit ändert:



Blendet man die Abhängigkeit von x aus, so kommt Ordnung ins Bild. Es ergeben sich sauber geordnete und sich nicht-schneidende Kurven im $\mathbb{R}^2$. Diese Kurven nennt man Trajektorien:

Definition 27.1. Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Eine Teilmenge $T \subset D$ heißt *Trajektorie* der autonomen Gleichung

$$y' = f(y),$$

wenn es ein Intervall I und eine Lösung $\varphi : I \rightarrow D$ der Gleichung gibt, so dass

$$T = \varphi(I) = \{\varphi(x) \mid x \in I\}.$$

Ist $y_0 \in T$, so nennen wir T auch *Trajektorie durch* y_0 .

Um die Begriff „Trajektorie“ und „Lösung“ voneinander abzugrenzen halten wir noch einmal fest:

- Eine *Lösung* ist eine Funktion $\varphi : I \rightarrow D$,
- eine *Lösungskurve* ist der Graph einer Lösung, also eine Teilmenge von $I \times D$, nämlich

$$\{(x, \varphi(x)) \mid x \in I\} \subset I \times D,$$

- eine *Trajektorie* ist eine Teilmenge von D , nämlich

$$\{\varphi(x) \mid x \in I\} \subset D.$$

Beispiel.

Für eindimensionale autonome Systeme $y' = f(y)$ sind Trajektorien relativ uninteressant: Betrachten wir die Gleichung

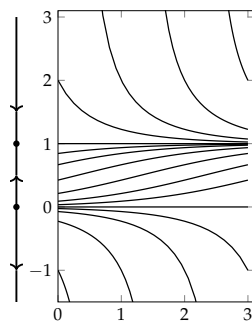
$$y' = y - y^2$$

so erkennen wir zwei konstante Lösungen

$$\varphi(x; 0) \equiv 0 \quad \varphi(x; 1) \equiv 1.$$

Schaut man sich die Lösungskurven an, so sieht man, dass es genau fünf verschiedenen Trajektorien gibt, nämlich die Mengen

$$]-\infty, 0[, \quad \{0\}, \quad]0, 1[, \quad \{1\}, \quad]1, \infty[.$$



Qualitativ lässt sich die Schar der Lösungskurven auch schon anhand der Nullstellen und Vorzeichen der rechten Seite $y - y^2$ ablesen. $\triangle$

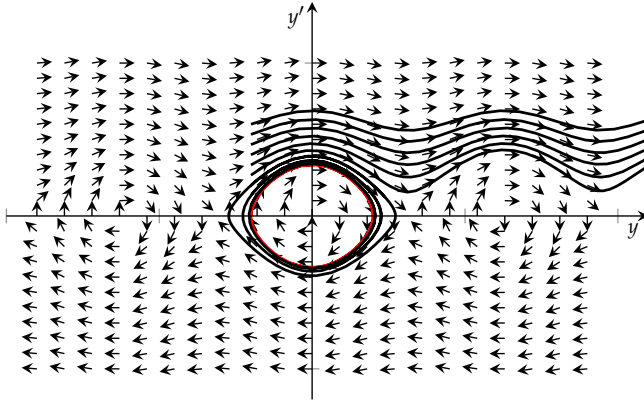
Die Menge aller Trajektorien bezeichnet man auch als *Phasenportrait* und die Menge D , in der die Lösung verläuft als *Phasenraum*. Für eine Gleichung $y^{(n)} = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ ist der Phasenraum Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und wird von den Koordinaten $y, y', \dots, y^{(n)}$ aufgespannt. Wir betrachten dazu wieder das mathematische Pendel:

Beispiel.

Das System erster Ordnung zur Gleichung $y'' = -\sin(y)$ ist

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) \end{bmatrix}.$$

Der Phasenraum wird von $y = y_1$ (Winkel) und $y' = y_2$ (Winkelgeschwindigkeit) aufgespannt. Im autonomen Fall können wir im Phasenraum ein Richtungsfeld zeichnen, in dem wir an einen Punkt $Y = (y_1, y_2)$ den Vektor $f(Y) = (y_2, -\sin(y_1))$ anhängen. Das Richtungsfeld im Phasenraum und ein paar Trajektorien sehen für das mathematische Pendel wie folgt aus:

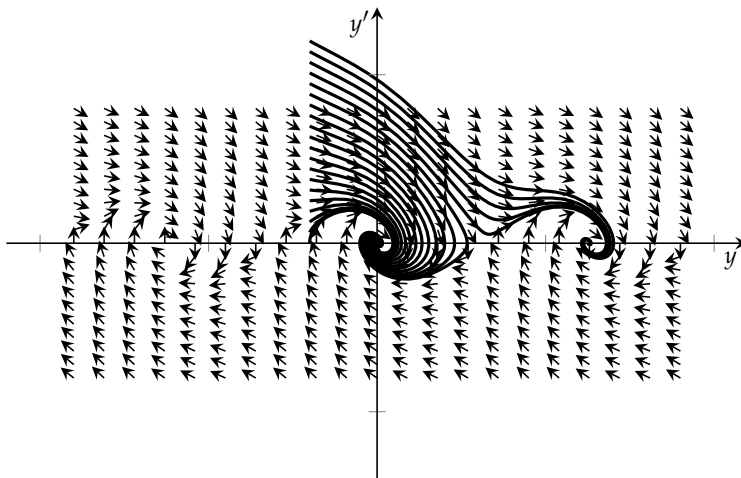


Man beachte, dass die zeitliche Dynamik in diesem Bild nicht mehr abgebildet wird.

Fügen wir dem Pendel Dämpfung hinzu, die proportional zur Geschwindigkeit ist, so bekommen wir die Gleichung $y'' = -\sin(y) - cy'$, also das System

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -\sin(y_1) - cy_2 \end{bmatrix}.$$

Für $c = 0,7$ sehen Richtungsfeld im Phasenraum und ein paar Trajektorien so aus:



△

Für autonome lineare Differentialgleichungen im $\mathbb{R}^2$ kann man die Situation vollständig beschreiben:

Beispiel.

Wir betrachten $y' = Ay$ mit reeller 2×2 Matrix A . Das charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \text{spur}(A)\lambda + \det(A)$$

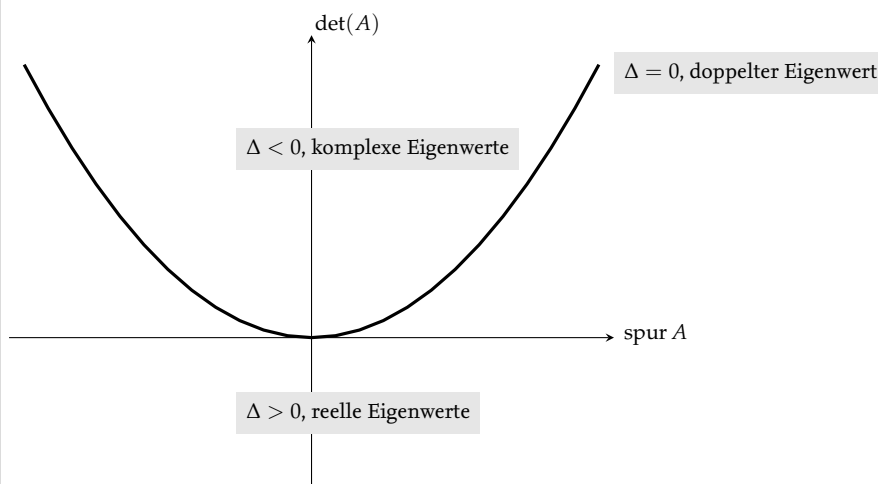
und daher sind die Eigenwerte

$$\lambda_{1/2} = \frac{\text{spur}(A) \pm \sqrt{\text{spur}(A)^2 - 4 \det(A)}}{2}.$$

In Abhängigkeit der Diskriminante $\Delta = \text{spur}(A)^2 - 4 \det(A)$ ergeben sich also die Fälle:

1. Ist $\Delta > 0$ so gibt es zwei verschiedene reelle Eigenwerte.
2. Ist $\Delta < 0$, so gibt es zueinander konjugierte komplexe Eigenwerte.
3. Ist $\Delta = 0$, so gibt es einen doppelten reellen Eigenwert (welcher dann die geometrische Vielfachheit 1 oder 2 haben kann).

Wir können dies in der Spur-Det-Ebene zeichnen:



Die Größen $\det(A)$ und $\text{spur}(A)$ sind invariant unter Ähnlichkeitstransformationen. Wir können uns daher auf die Jordanschen Normalformen beschränken. Etwas genauer: Ist $A = TJT^{-1}$, so können wir $z = T^{-1}y$ substituieren, und bekommen

$$z' = T^{-1}y' = T^{-1}Ay = T^{-1}TJT^{-1}y = Jz.$$

- $\Delta > 0$: In diesem Fall ist

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \exp(Jx) = \begin{bmatrix} \exp(\lambda_1 x) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 x) \end{bmatrix}$$

Die Lösungen sind also von der Form

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} c_1 \exp(\lambda_1 x) \\ c_2 \exp(\lambda_2 x) \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta < 0$: In diesem Fall gilt es die Eigenwerte $\lambda_{1/2} = a \pm ib$ und wir können die reelle Jordansche Normalform

$$J = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \quad \exp(Jx) = \exp(ax) \begin{bmatrix} \cos(bx) & -\sin(bx) \\ \sin(bx) & \cos(bx) \end{bmatrix}$$

nehmen. Die Lösungen sind also von der Form

$$\varphi(x) = \exp(ax) \begin{bmatrix} c_1 \cos(bx) - c_2 \sin(bx) \\ c_1 \sin(bx) + c_2 \cos(bx) \end{bmatrix}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- $\Delta = 0$: Hier gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder ist A diagonalisierbar (und dann ist $J = \lambda E_2$ und dies ist das gleiche wie im Fall $\Delta > 0$ mit $\lambda_1 = \lambda_2$) oder nicht. Im zweiten Fall ist

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad \exp(Jx) = \exp(\lambda x) \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Die Lösungen sind also von der Form

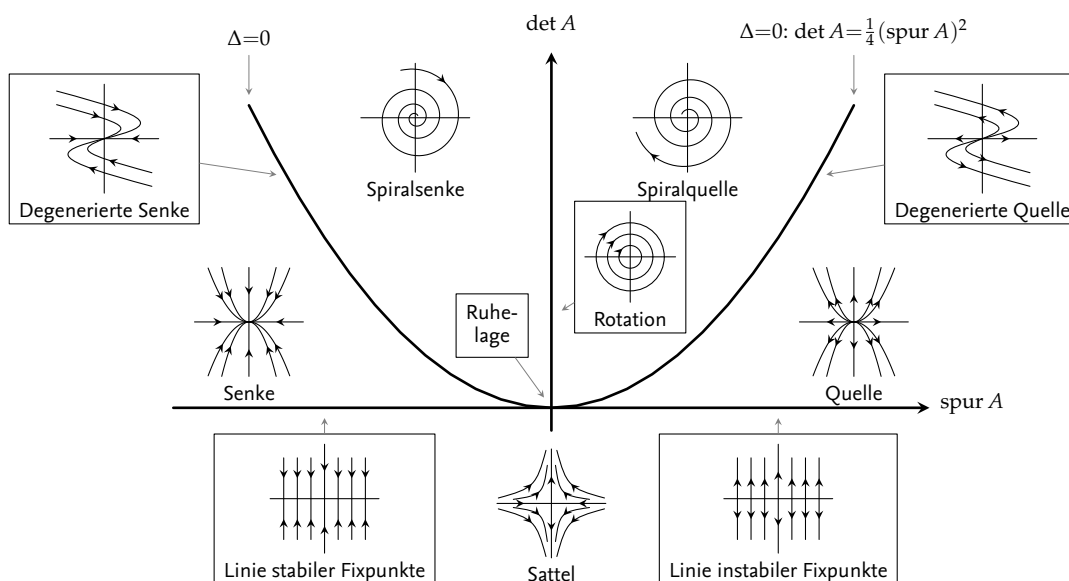
$$\varphi(x) = \exp(\lambda x) \begin{bmatrix} c_1 + c_2 x \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Hier ist besonders der Fall $\lambda = 0$ bemerkenswert: In diesem Fall ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert, aber trotzdem gibt es mit

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 x \\ c_2 \end{bmatrix} \text{ und } c_2 \neq 0 \text{ eine unbeschränkte Lösung.}$$

Man kann das Verhalten in der sogenannten Spur-Det-Ebene einzeichnen, wo man noch zusätzlich die Vorzeichen von $\det(A)$ und $\text{spur}(A)$ berücksichtigen kann:^a

Klassifikation der Phaseportraits in der $(\det A, \text{spur } A)$ -Ebene



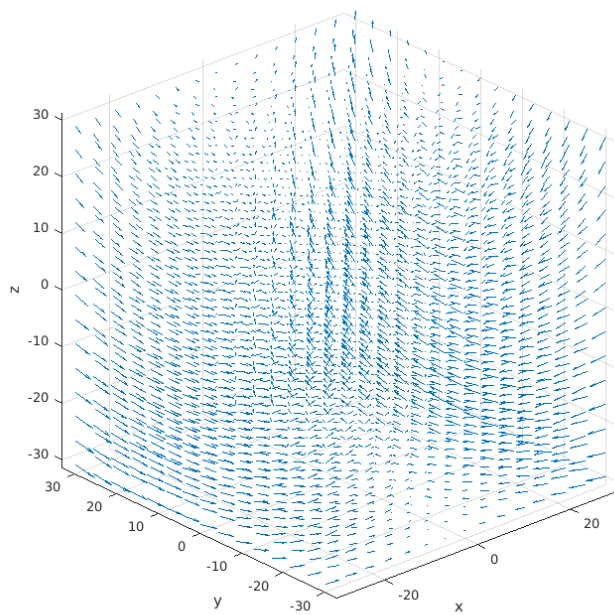
△

^aQuelle: Gernot Salzer, <https://tex.stackexchange.com/a/347401/7573>

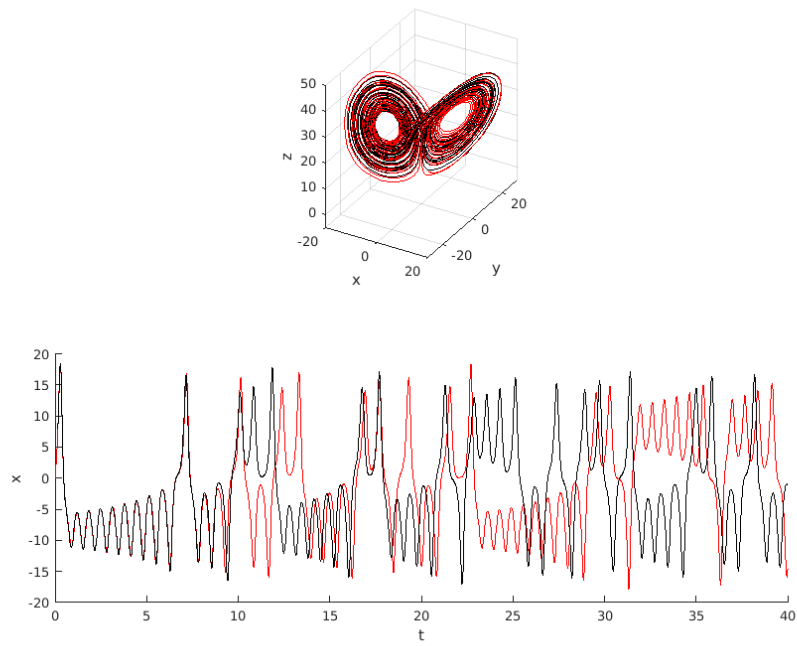
Beispiel.

In drei Dimensionen können die Dinge wesentlich komplizierter werden, so dass auch Richtungsfeld und Phasenportrait nicht mehr viel Einsicht geben. Als Beispiel dazu hier das Richtungsfeld des Systems

$$\begin{aligned}x' &= 10(y - x) \\ y' &= x(28 - z) - y \\ z' &= xy - \frac{8}{3}z.\end{aligned}$$



Dieses System ist das berühmte Lorenz-System,^a welches insbesondere für die chaotische Dynamik bekannt ist. Hier zwei Lösungen zu fast gleichen Anfangswerten (oben im Phasenraum gezeichnet, unten nur die x -Komponente in Abhängigkeit der Zeit t).



“Benannt nach Edward N. Lorenz, der es 1963 als einfaches Model für Konvektionsströmungen in der Atmosphäre entwickelte.

28 Lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

Die Ergebnisse aus den vorigen Abschnitten übertragen wir jetzt auf lineare Gleichungen n -ter Ordnung, d.h. auf Gleichungen der Form

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x) \quad (*)$$

mit stetigen Funktionen $a_0, \dots, a_{n-1}, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ (bzw. $= 0$ im homogenen Fall).

Übertragung der bisherigen Ergebnisse aus Satz 25.3 und Satz 26.6 liefert:

Korollar 28.1. i) Die Menge L_H aller Lösungen der homogenen Gleichung zu $(*)$ ist ein n -dimensionaler Vektorraum.

ii) Die Menge L_I aller Lösungen der inhomogenen Gleichung $(*)$ ist von der Form $L_I = \psi + L_H$, wobei ψ eine beliebige Lösung von $(*)$ ist.

iii) Ist $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in L_H$, dann sind diese linear unabhängig, wenn für ein (und dann auch für alle) $x \in I$ gilt, dass die Wronski-Determinante

$$W(x) := \det \begin{bmatrix} \varphi_1(x) & \dots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{bmatrix}$$

ungleich Null ist.

Besonders übersichtlich verhält es sich mit linearen Gleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b \quad (**)$$

Für eine kompakte Formulierung bezeichnen wir mit $\mathbb{C}[T]$ die Menge aller Polynome

$$P(T) = a_0 + a_1 T + \dots + a_n T^n$$

mit komplexen Koeffizienten a_k in der Unbestimmten T . Ersetzen wir formal die Unbestimmte T durch $D = \frac{d}{dx}$ so erhalten wir einen linearen Differentialoperator

$$P(D) = a_0 + a_1 D + \dots + a_n D^n,$$

also eine Abbildung, die einer n -mal differenzierbaren Funktion $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ (auf einem Intervall I) die Funktion

$$P(D)\varphi(x) := a_0\varphi(x) + a_1\varphi'(x) + \dots + a_n\varphi^{(n)}(x)$$

zuordnet. Die Differentialgleichung $(**)$ wird also zu

$$P(D)y = b.$$

Die Differentialoperatoren $P(D)$ verhalten sich besonders einfach, wenn sie auf Exponentialfunktionen angewendet werden:

Mit Polynomen von (Differential-)Operatoren kann man rechnen wie mit gewöhnlichen Polynomen. So gilt zum Beispiel: Sind $P_1(T), P_2(T) \in \mathbb{C}[T]$ und

$$P(T) := P_1(T) + P_2(T),$$

dann gilt für jede genügend oft differenzierbare Funktion φ

$$P(D)\varphi = P_1(D)\varphi + P_2(D)\varphi.$$

Lemma 28.2. Für $P(T) \in \mathbb{C}[T]$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\varphi(x) = \exp(\lambda x)$ gilt

$$P(D)\varphi(x) = P(\lambda)\varphi(x).$$

Beweis.

Wir schreiben $P(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k$. Es gilt

$$D\varphi(x) = \frac{d}{dx}\varphi(x) = \lambda \exp(\lambda x) = \lambda \varphi(x).$$

Es folgt

$$P(D)\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k D^k \varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^k \exp(\lambda x) = P(\lambda)\varphi(x)$$

durch wiederholtes Anwenden. $\square$

Es folgt direkt:

Korollar 28.3. Ist λ eine Nullstelle des Polynoms P , so ist $\varphi(x) = \exp(\lambda x)$ eine Lösung der Differentialgleichung $P(D)y = 0$.

Man kann sogar die Lösungsgesamtheit für die Gleichung $P(D)y = 0$ einfach angeben, wenn die Nullstellen von P alle einfach sind:

Satz 28.4. Es sei $P(T) = \sum_{k=0}^n a_k T^k \in \mathbb{C}[T]$ und P habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Dann bilden die Funktionen

$$\varphi_k(x) = \exp(\lambda_k x), \quad k = 1, \dots, n$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Differentialgleichung $P(D)y = 0$.

Beweis.

Dass die φ_k Lösungen sind, sagt Korollar 28.3. Um zu zeigen, dass die φ_k linear unabhängig sind, berechnen wir die Wronski-Determinante an der Stelle $x = 0$ (denn dies reicht nach Korollar 28.1 aus). Dazu bemerken wir, dass $\varphi_k^{(j)}(x) = \lambda_k^j \exp(\lambda_k x)$. Es gilt also

$$W(0) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(0) & \cdots & \varphi_n(0) \\ \varphi_1'(0) & & \varphi_n'(0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{n-1}(0) & \cdots & \varphi_n^{n-1}(0) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Die auftauchende Matrix ist die wohlbekannte *Vandermonde Matrix* und ihre Determinante ist

$$W(0) = \prod_{1 \leq k < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_k)$$

und da wir $\lambda_j \neq \lambda_k$ für $j \neq k$ angenommen haben, gilt $W(0) \neq 0$. $\square$

Dies löst die homogene Gleichung $P(D)y = 0$ im Falle von einfachen Nullstellen.

Wie in der Randbemerkung können wir auch den Fall mehrfacher Nullstellen von P auf den Fall mehrfacher Eigenwerte der Begleitmatrix zurückführen. Zu einer mehrfachen Nullstelle erhalten wir einen Jordanblock, für den wir die Matrix-Exponentialfunktion auswerten können.

Satz 28.5. Das Polynom

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0 \in \mathbb{C}[T]$$

habe r verschiedene Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ mit den Vielfachheiten $k_1, \dots, k_r$. Dann hat die Differentialgleichung $P(D)y = 0$ das Fundamentalsystem

$$\varphi_{j,m}(x) = x^m \exp(\lambda_j x), \quad j = 1, \dots, r, \quad m = 0, \dots, k_j - 1.$$

Beweis.

Wir nutzen die Umformulierung als System (wie in obiger Randbemerkung) und die komplexe Jordansche-Normalform für die Begleitmatrix. Mit Lemma 26.5 erhalten wir die entsprechenden Lösungen $\varphi_{j,m}$ als erste Komponenten der Lösungen des Systems. $\square$

Kommen wir schließlich zu inhomogenen Gleichungen

$$P(D)y = b(x).$$

Prinzipiell können wir wie folgt vorgehen: Mit Hilfe von Satz 28.5 bestimmen wir ein Fundamentalsystem für die homogene Gleichung, formulieren die Gleichung als System erster Ordnung um, und bestimmen eine spezielle Lösung der Gleichung mit Hilfe der Variation der Konstanten nach Satz 26.7 (die Hürden dabei sind insbesondere das Invertieren der Fundamentalmatrix und das Lösen des Integrals für die variable Konstante u). Für spezielle Funktionen b gibt es eine andere Möglichkeit, die zum Ziel führt.

Satz 28.6. Es sei

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$$

und $\mu \in \mathbb{C}$, so dass $P(\mu) \neq 0$. Dann gilt

- i) Die Gleichung $P(D)y = \exp(\mu x)$ hat die spezielle Lösung $\varphi(x) = \frac{1}{P(\mu)} \exp(\mu x)$.
- ii) Für jedes Polynom f vom Grad m hat die Differentialgleichung $P(D)y = f(x) \exp(\mu x)$ eine Lösung der Form $\psi(x) = g(x) \exp(\mu x)$ mit einem Polynom g vom Grad $\leq m$.

Beweis.

- i) Nach Lemma 28.2 gilt $P(D) \exp(\mu x) = P(\mu) \exp(\mu x)$, was die Behauptung zeigt.

gleichung

$$P(D)y = a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

lässt sich für $a_n \neq 0$ schreiben als

$$y^{(n)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} y' + \frac{a_0}{a_n} y = 0$$

und dies entspricht dem System

$$Y' = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}}_{=:A} Y.$$

Die Matrix A ist die *Begleitmatrix* von P . Die Nullstellen von P sind genau die Eigenwerte von A . Sind diese alle verschieden, so ist $A = TDT^{-1}$ mit $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und $T = [v_1 \ \dots \ v_n]$ mit Eigenwerten λ_k und Eigenvektoren v_k . Zu jedem v_k gibt es die Lösung φ_k zum Anfangswert $\varphi_k(0) = v_k$

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) &= \exp(Ax)v_k = T \exp(Dx) \underbrace{T^{-1}v_k}_{=e_k, \text{ da } Te_k = v_k} \\ &= [v_1 \ \dots \ v_n] \exp(\lambda_k x) e_k \\ &= \exp(\lambda_k x) v_k. \end{aligned}$$

Die erste Komponente dieses Vektors ist dann eine Lösung von $P(D)y = 0$ mit

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{bmatrix} = v_k.$$

- ii) Für $m = 0$ ist dies die Aussage aus i) und wir nehmen dies als Induktionsanfang. Für den Induktionsschritt beginnen wir: Gelte die Aussage für Polynome vom Grad höchstens $m - 1$. Aus der Produktregel folgt, dass

$$P(D)(x^m \exp(\mu x)) = f_0(x) \exp(\mu x)$$

mit einem Polynom vom Grad m . Für ein gegebenes Polynom f vom Grad m existiert also ein c , so dass der Grad von $f_1 = f - cf_0$ nur noch höchstens $m - 1$ ist (eliminiere den Term vom höchsten Grad). Nach Induktionsvoraussetzung gibt es ein Polynom g_1 vom Grad höchstens $m - 1$, so dass

$$P(D)(g_1(x) \exp(\mu x)) = f_1(x) \exp(\mu x)$$

und für $g(x) = cx^m + g_1(x)$ folgt

$$\begin{aligned} P(D)(g(x) \exp(\mu x)) &= cP(D)(x^m \exp(\mu x)) + P(D)(g_1(x) \exp(\mu x)) \\ &= cf_0(x) \exp(\mu x) + f_1(x) \exp(\mu x) \\ &= f(x) \exp(\mu x). \end{aligned}$$

□

Beispiel.

Die Gleichung

$$y'' + py' + qy = \sin(\omega_0 x)$$

kommt von den Polynom $P(T) = T^2 + pT + q$. Ist $p^2 < 4q$ so hat dieses zwei komplexe Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \mu \pm i\omega, \quad \mu = -\frac{p}{2}, \quad \omega = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$$

Die homogene Gleichung hat nach Satz 28.4 das Fundamentalsystem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \exp((\mu + i\omega)x) = \exp(\mu x) \exp(i\omega x), \\ \varphi_2(x) &= \exp((\mu - i\omega)x) = \exp(\mu x) \exp(-i\omega x). \end{aligned}$$

Daraus können wir mit der Euler-Formel ein reelles Fundamentalsystem bekommen

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= \frac{1}{2}(\varphi_1(x) + \varphi_2(x)) = \exp(\mu x) \cos(\omega x), \\ \psi_2(x) &= \frac{1}{2i}(\varphi_1(x) - \varphi_2(x)) = \exp(\mu x) \sin(\omega x). \end{aligned}$$

Für eine Lösung des inhomogenen Systems schreiben wir $\sin(\omega_0 x) = \operatorname{Re}(-i \exp(i\omega_0 x))$ und betrachten die Gleichung

$$y'' + py' + qy = -i \exp(i\omega_0 x).$$

Ist $\mu \neq 0$, so ist $i\omega_0$ keine Nullstelle von P , und wir bekommen nach Satz 28.6 i) die spezielle Lösung

$$\varphi_0(x) = \frac{-i}{P(i\omega_0)} \exp(i\omega_0 x) = \gamma \exp(i\omega_0 x), \quad \gamma \in \mathbb{C}.$$

Da die Koeffizienten von P reell sind, gilt

$$\operatorname{Re}(P(D)\varphi_0(x)) = P(D)\operatorname{Re}(\varphi_0(x)),$$

also ist eine spezielle Lösung von $y'' + py' + qy = \sin(\omega_0 x)$ gegeben durch

$$\psi_0(x) = \operatorname{Re}(\varphi_0(x)) = c \cos(\omega_0 x).$$

Die allgemeine Lösung ist also

$$\psi(x) = \exp(\mu x)(c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)) - c \cos(\omega_0 x).$$

Physikalisch lässt sich die Lösung so interpretieren:

- Ist $\mu > 0$, so sind alle Lösungen unbeschränkt.
- Ist $\mu < 0$, so klingt die *Eigenfrequenz* ω mit der Zeit ab, und die *Anregungsfrequenz* ω_0 setzt sich mit der Zeit durch.

Was ist für $\mu = 0$? Können wir einfach in obiger Lösung zur Grenze $\mu \rightarrow 0$ übergehen und sehen einfach nur die Anregungsfrequenz?
 $\triangle$

Für den Fall, dass die Anregung eine der Eigenfrequenz der Gleichung trifft, passiert etwas anderes. Hier erst der mathematische Satz:

Satz 28.7. Es sei

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0,$$

f ein Polynom vom Grad m und μ eine k -fach Nullstelle von P . Dann hat die Gleichung

$$P(D)y = f(x) \exp(\mu x)$$

eine Lösung

$$\psi(x) = h(x) \exp(\mu x), \quad \text{mit Polynom } h(x) = \sum_{j=k}^{m+k} c_j x^j.$$

Beweis.

Da μ eine k -fache Nullstelle von P ist, können wir schreiben

$$P(T) = Q(T)(T - \mu)^k$$

mit einem Polynom Q mit $Q(\mu) \neq 0$. Satz 28.6 sagt uns, dass es ein Polynom g vom Grad m gibt, so dass

$$Q(D)(g(x) \exp(\mu x)) = f(x) \exp(\mu x).$$

Aus g können wir durch k -faches bilden einer Stammfunktion das Polynom $h(x) = \sum_{j=k}^{m+k} c_j x^j$ bilden, für das gilt $h^{(k)}(x) = g(x)$. Es gilt

$$(D - \mu)^k(h(x) \exp(\mu x)) = h^{(k)}(x) \exp(\mu x) = g(x) \exp(\mu x)$$

und es folgt

$$\begin{aligned} P(D)(h(x) \exp(\mu x)) &= Q(D) \left((D - \mu)^k (h(x) \exp(\mu x)) \right) \\ &= Q(D)(g(x) \exp(\mu x)) = f(x) \exp(\mu x) \end{aligned}$$

wie behauptet. $\square$

Beispiel.

Wir betrachten eine Gleichung ohne Dämpfung (d.h. ohne den Term y')

$$y'' + \omega^2 y = a \cos(\omega_0 x)$$

und wieder ist es vorteilhaft, die rechte Seite komplexwertig zu schreiben als

$$y'' + \omega^2 y = a \exp(i\omega_0 x).$$

Das zugehörige Polynom ist $P(T) = T^2 + \omega^2$ und hat die Nullstellen

$$\lambda_{1/2} = \pm i\omega.$$

- Im Fall $\omega_0 \neq \omega$ gibt es eine Lösung der Form $\psi(x) = c \exp(i\omega_0 x)$, nämlich

$$\psi(x) = \frac{a}{P(i\omega_0)} \exp(i\omega_0 x) = \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \exp(i\omega_0 x).$$

Eine Lösung zur rechten Seite $a \cos(\omega_0 x)$ ist dann

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}(\psi(x)) = \frac{a}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 x).$$

- Im Fall $\omega_0 = \omega$ ist ω_0 eine Nullstelle von P . Es gibt also zur rechten Seite $a \exp(i\omega_0 x)$ eine Lösung der Form $\psi(x) = cx \exp(i\omega_0 x)$, nämlich

$$\psi(x) = \frac{a}{2i\omega_0} x \exp(i\omega_0 x)$$

also ist

$$\varphi(x) = \operatorname{Re}(\psi(x)) = \frac{a}{2\omega_0} x \sin(\omega_0 x).$$

$\triangle$

Bemerkung. Im letzten Beispiel taucht ein Phänomen auf, welches in größerem Kontext sehr wichtig ist: Resonanz.

Hat die Anregung der Differentialgleichung die gleiche Frequenz, die auch die homogenen Lösungen haben, so kommt es zu Resonanz und es gibt *unbeschränkte* Lösungen, auch wenn die Nullstellen des zugehörigen Polynoms alle rein imaginär sind. Die Frequenzen, bei denen dies auftritt, nennt man *Eigenfrequenzen* des Systems.

Tatsächlich ist das gleiche Phänomen auch bei Differentialgleichungen n -ter Ordnung zu sehen: Hat das Polynom

$$P(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \dots + a_1T + a_0$$

die rein komplexe Nullstelle $i\omega$, so hat die Gleichung

$$P(D)y = a \sin(\omega x)$$

eine unbeschränkte Lösung.

Eigenfrequenzen treten auch bei Systemen höherer Ordnung auf, wie z.B. bei n -dimensionalen Systemen zweiter Ordnung:

$$MY'' + BY' + CY = F, \quad M, B, C \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad F : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Mit solchen Gleichungen werden zum Beispiel mechanische Systeme beschrieben, wie zum Beispiel Bauwerke, Maschinen oder Karosserien, aber auch die Schall-Phänomene (nach Diskretisierung). Hier ist M die Massenmatrix, B die Dämpfungsmatrix und C die Steifigkeitsmatrix; F ist die einwirkende Kraft. Die Kenntnis von Eigenfrequenzen und den zugehörigen Eigenschwingungsformen des Systems ist besonders wichtig, um die Stabilität des Systems bei Anregungen garantieren zu können. Aus dem alltäglichen Leben ist vielleicht die Situation bekannt, dass im Auto bei bestimmten Geschwindigkeiten oder Drehzahlen das Armaturenbrett oder etwas anderes laut vibriert, bei anderen Geschwindigkeiten und Drehzahlen jedoch nicht. Hier liegt bei bestimmten Anregungen Resonanz vor. ■