Handout
Analysis 1

Dirk Lorenz

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung

Dies ist das Handout zur Vorlesung „Analysis 1“, gehalten an der TU Braunschweig im Wintersemester 2019/20. Es keinerlei Anspruch, auch ohne Besuch der Vorlesung verständlich zu sein. Diese Version enthält mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit zahlreiche Fehler; seien Sie also aufmerksam beim Lesen.

Die Inhalte in diesem Handout sind in zahlreichen Büchern zu finden und ich habe unter anderem folgende Bücher benutzt:

- *Analysis 1 – Differentialrechnung und Integralrechnung in einer Veränderlichen*, 11., erweiterte Auflage, Otto Forster, Springer Spektrum, 2013.
  https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-00317-3
  Die Vorlesung folgt i.W. diesem Buch - steht in der Mathe-Bibliothek, alte Auflagen sind auch geeignet.
- *Analysis 1*, 6., durchgesehene Auflage, Konrad Königsberger, Springer, 2004.
  https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-642-18490-1
  Etwas ausführlicher als der Forster; steht ebenfalls in der Mathe-Bibliothek.
- *Analysis 1*, 4. Auflage, Wolfgang Walter, Springer, 1997
  https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-662-05696-7
  Führt Differentiation und Integration in anderer Reihenfolge ein. Für ergänzendes Lesen geeignet. Etwas ausführlicher in den Grundlagen.
- *Understanding Analysis*, Second Edition, Stephen Abbott, Springer, 2015
  Englischer Text der ähnlich zu dieser Vorlesung aufgebaut ist.
- *Calculus*, Third Edition, Michael Spivak, Cambridge University Press, 2006
  Vielleicht das berühmteste englischsprachige Buch zur Analysis.
- *Analysis I*, Third Edition, Terence Tao, Springer, 2016
  Englischer Text. Geht mehr in die Tiefe, ist aber sehr gut geschrieben.

Im Text sind ab und zu Absätze in leichtem grau leicht abgesetzt. Dabei handelt es sich um kurze Argumente, die das darüber Stehende begründen oder weiter erläutern. Ist Ihnen etwas vor einem solchen Abschnitt klar, dann können Sie den grauen Absatz getrost überspringen.

Es kann sich natürlich trotzdem lohnen, diese Absätze zu lesen, da vielleicht ein anderes Argument als Ihres gegeben wird.

Zahlreiche Randbemerkungen erläutern oder illustrieren die Konzepte oder erinnern an etwas, was evtl. schon bekannt war.

Die Nummerierung sollte in diesem Skript genau so wie in Ihrer Mitschrift sein. Die Formulierungen von Sätzen, Definitionen usw. und auch von Beweisen sind wahrscheinlich oft verschieden. Das liegt einfach daran, dass man Mathematik mündlich oft anders besser präsentiert, als schriftlich..

Braunschweig, den 3. Juni 2020 Dirk Lorenz

`d.lorenz@tu-braunschweig.de`

1 Einführung

In der Analysis geht es um Grenzwerte von unendlichen Folgen oder Grenzwerte von unendlichen Summen, aber auch um Funktionen, deren Grenzwerte, Ableitungen und Integrale. Die Begriffe haben alle etwas dem Begriff "unendlich" zu tun, und zwar sowohl von "unendlich groß" also auch "unendlich klein". Wir brauchen hierfür ein geeignetes Konzept, um mit diesem Begriff korrekt arbeiten zu können. Dem Ganzen liegen die reellen Zahlen zu Grunde. Auch für diese brauchen wir ein geeignetes Konzept. Fragen, die die Vorlesung beantworten wird, sind zum Beispiel:

- Gibt es eine größte reelle Zahl? Unter den reellen Zahlen, die größer als Null sind, gibt es da eine kleinste? Zu welchen reellen Zahlen gibt es Wurzeln?
- Wie bestimmt man den Grenzwert einer unendlichen Folge von reellen Zahlen? Welche Folgen haben Grenzwerte, welche nicht? Kann man unendlich viele Zahlen zusammenaddieren und trotzdem etwas Endliches erhalten?
- Was ist eine Funktion? Was ist eine stetige Funktion? Hat eine stetige Funktion eine "Steigung"? Kann man zu jeder Funktion die "Fläche unter dem Graphen" (also das bestimmte Integral) bestimmen?

Einige dieser Fragen haben Sie sicher schon in der Schule behandelt und bestimmt kennen Sie auch einige Techniken, um Grenzwerte, Ableitungen oder Integrale auszurechnen. Hier werden wir uns tiefergehend mit den Grundlagen der Analysis beschäftigen und zur Motivation kommen erst einige Beispiele, die Ihnen zeigen sollen, wie schnell man falsche Schlüsse ziehen kann, wenn man Regeln ohne die genaue Kenntnis ihrer Grundlagen anwendet:

Beispiel (Teilen durch Null). Die Kürzungsregel

$$ac = bc \implies a = b$$

funktioniert nur für $c \neq 0$. Zum Beispiel ist $1 \cdot 0 = 2 \cdot 0$, aber einfacher "wegkürzen" der 0 führt auf $1 = 2$, was nicht stimmt. In diesem Fall ist es offensichtlich, wo wir falsch durch Null geteilt haben, in anderen Fällen ist das schwieriger zu sehen.

Beispiel (Divergente Reihen). Wir betrachten die Reihe

Eine *Reihe* ist eine unendliche Summe.

$$S = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} + \cdots .$$

Hier ist ein Trick, den Wert S zu bestimmen: Wir multiplizieren beide Seiten mit 2 und bekommen

$$2S = 2 + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \cdots = 2 + S.$$

Es folgt $2S = 2 + S$ und also gilt $S = 2$. Aber Achtung! Machen wir das Gleiche mit der Reihe

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots,$$

bekommen wir

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \cdots = S - 1,$$

woraus wir $S = -1$ folgern könnten. Wieso erscheint uns das erste Ergebnis $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2$ plausibel, aber $1 + 2 + 4 + \cdots = -1$ nicht?

Ein anderes Problem bekommen wir bei der Reihe

$$S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

Einerseits könnten wir schreiben

$$S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + \cdots) = 1 - S$$

woraus $S = \frac{1}{2}$ folgen würde. Andererseits könnten wir auch

$$S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

schreiben oder auch

$$S = 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \cdots = 1 + 0 + 0 + \cdots = 1.$$

Was ist nun richtig? $S = 0$, $S = \frac{1}{2}$, oder $S = 1$? Oder ist alles falsch?

Beispiel (Divergente Folgen). Ein ähnliches Beispiel, aber diesmal mit Folgen. Es sei x eine reelle Zahl und wir bezeichnen

$$L = \lim_{n\to\infty} x^n.$$

Ersetzen wir $n = m + 1$, so bekommen wir

$$L = \lim_{m+1\to\infty} x^{m+1} = \lim_{m+1\to\infty} x \cdot x^m = x \lim_{m+1\to\infty} x^m.$$

Da aber auch $m + 1 \to \infty$ auch $m \to \infty$ folgt, schließen wir

$$\lim_{m+1\to\infty} x^m = \lim_{m\to\infty} x^m = L.$$

Es folgt $xL = L$. Jetzt kürzen wir L und bekommen $x = 1$ für jede reelle Zahl x!? Das ergibt keinen Sinn. Aber da wir schon wissen, dass wir eine Null nicht wegkürzen können, können wir uns ein bisschen schlauer anstellen und schließen, dass wir entweder $x = 1$ oder $L = 0$ haben. Es scheint, als hätten wir gezeigt, dass $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ für alle $x \neq 1$. Aber auch das ergibt keinen Sinn, da sich z.B. für $x = 2$ die Folge $1,2,4,8,\ldots$ ergibt.

Beispiel (Vertauschen von Summen). Haben wir ein Muster von Zahlen, wie z.B.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

und wollen alle Zahlen aufsummieren, so können wir einerseits erst die Zeilen aufsummieren und dann zusammenzählen, oder die Spalten aufsummieren und dann zusammenzählen. Im ersten Fall erhalten wir $6 + 15 + 24 = 45$, im zweiten Fall $12 + 15 + 18 = 45$. Bei unendlich großen solchen Summen ist das allerdings nicht mehr richtig! Hier ist ein Gegenbeispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Die Summe der ersten Zeile ist 1, die der weiteren Zeilen ist 0. Daher ist die Summer der Zeilensummen 1. Die Spaltensummen sind aber alle 0, daher ist die Summe der Spaltensummen ebenfalls 0. Kann man also Doppelsummen nicht vertauschen?

Beispiel (Vertauschen von Grenzwerten). Sind die beiden Grenzwerte

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n+m} \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{m}{n+m}$$

gleich? Für den ersten Grenzwert bemerken wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n+m} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{m}{n}}{\frac{n}{n} + \frac{m}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0,$$

und es folgt $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n+m} = 0$. Für den zweiten Grenzwert hingegen bekommen wir

$$\lim_{m\to\infty} \frac{m}{n+m} = \lim_{m\to\infty} \frac{\frac{m}{m}}{\frac{n}{m} + \frac{m}{m}} = \frac{1}{0+1} = 1,$$

und es folgt $\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \frac{m}{n+m} = 1$. Können wir Grenzwerte also nicht vertauschen?

Beispiel (Vertauschung von Ableitung und Grenzwert). Es sei ϵ eine positive reelle Zahl. Wir betrachten die Ableitung der Funktion $\frac{x^3}{\epsilon+x^2}$. Nach der Ableitungsregel für Quotienten bekommen wir

Es gilt $(f/g)' = (f'g - fg')/(g')^2$.

$$\left(\frac{x^3}{\epsilon + x^2}\right)' = \frac{3x^2(\epsilon + x^2) - x^3 \cdot (2x)}{(\epsilon + x^2)^2} = \frac{3x^2\epsilon + x^4}{(\epsilon + x^2)^2}.$$

An der Stelle $x = 0$ haben wir also

$$\left.\left(\frac{x^3}{\epsilon + x^2}\right)'\right|_{x=0} = 0$$

für jedes positive ϵ. Kann man also erwarten, dass auch für den Grenzfall $\epsilon = 0$ gilt

$$\left(\frac{x^3}{0 + x^2}\right)'\Bigg|_{x=0} = 0?$$

Die linke Seite ist aber $(x)'|_{x=0} = 1$. Können wir also Ableitungen nicht mit Grenzwerten vertauschen?

All diese Beispiele sollen zeigen, dass man mit jeder Art des “Unendlichen” vorsichtig umgehen muss. Das Ziel der Vorlesung ist es, sorgfältig die Rechenregeln für Grenzwerte, Ableitungen und auch Integrale herzuleiten, so dass uns solche Widersprüche erspart bleiben, und wir sicher entscheiden können, welche Ergebnisse richtig sind, und welche nicht.

2 Vollständige Induktion

Das erste Mal begegnet einem das Konzept “unendlich” schon bei den natürlichen Zahlen. In dieser Vorlesung benutzen wir

$$\mathbb{N} := \{0,1,2,\dots\}$$

für die Menge der natürlichen Zahlen. Die ganzen Zahlen sind

$$\mathbb{Z} := \{0,1,-1,2,-2,3,-3,\dots\}.$$

Das Symbol $:=$ bedeutet, dass der linke Ausdruck durch den rechten definiert wird.

Die wichtigste Eigenschaft der natürlichen Zahlen: Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau einen Nachfolger $n+1$. Wie ist es nun, wenn wir unendliche viele Aussagen $A(n)$ haben, die wir alle beweisen wollen? Ein Beispiel dafür ist die Formel

$$0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir können das für jeden Wert für n einzeln nachrechnen, z.B.

$$\begin{aligned}
A(0):&\qquad & 0 &= \frac{0\cdot 1}{2}\\
A(1):&\qquad & 1 &= \frac{1\cdot 2}{2}\\
A(2):&\qquad & 1+2 &= \frac{2\cdot 3}{2}\\
A(3):&\qquad & 1+2+3 &= \frac{3\cdot 4}{2}\\
\vdots&\qquad & &\vdots
\end{aligned}$$

aber das zeigt niemals die Behauptung für *alle* $n \in \mathbb{N}$.

Hier hilft:

Prinzip der vollständigen Induktion: Ist n_0 eine natürliche Zahl und $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$ eine Aussage. Gilt dann:

I0: $A(n_0)$ ist wahr und

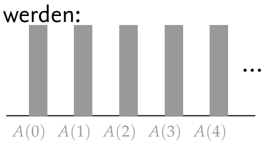
Induktionsanfang

I1: für $n \geq n_0$ gilt: Ist $A(n)$ wahr, so ist auch $A(n+1)$ wahr,

Induktionsschritt

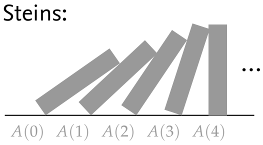
so folgt, dass $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr ist.

Das Prinzip der vollständigen Induktion kann mit einer unendlichen Reihe von Dominosteinen veranschaulicht werden:



.

Der Induktionsschritt entspricht dem sorgfältigen Aufstellen der Dominosteine, d.h. dass wir sicherstellen, dass der n-te Stein auch wirklich den $n+1$-ten Stein umstößt. Der Induktionsanfang ist dann das Umstoßen des ersten Steins:



.

Wir illustrieren das Prinzip der vollständigen Induktion am Beispiel der Aussagen $A(n)$: $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$:

Beispiel.

Den Induktionsanfang haben wir schon für $n_0 = 0$ gesehen: $A(0)$ ist die Aussage $0 = 0$, also wahr. (Ebenso haben wir schon die Aussagen $A(1)$, $A(2)$ und $A(3)$ als wahr erkannt, aber wir machen uns das Leben so einfach wir möglich.) Nun zum Induktionsschritt. Dafür *nehmen wir an*, dass die Aussage $A(n)$ für ein bestimmtes n wahr ist, d.h. wir nehmen an, dass für ein n gilt $1+2+\cdots+n =$

$n(n+1)/2$. Unter dieser Annahme folgern wir, durch Addition von $n+1$ auf beiden Seiten,

$$\begin{aligned} 1+2+\cdots+n+n+1 &= \tfrac{n(n+1)}{2}+n+1 = \tfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)}{2} \end{aligned}$$

(im letzten Schritt haben wir $(n+1)$ ausgeklammert). Das ist aber genau Aussage $A(n+1)$, womit der Induktionsschritt vollbracht ist. $\triangle$

Wir führen eine abkürzende Schreibweise für Summen ein:

Definition 2.1. Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und ist a_k für jedes k mit $m \leq k \leq n$ eine reelle Zahl, dann ist

$$\sum_{k=m}^{n} a_k := a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n.$$

Es gilt zum Beispiel

$$\sum_{k=n}^{n} a_k = a_n.$$

Es ist wichtig, dass man mathematische Ausdrücke auch mündlich ausdrücken kann. Der Ausdruck $\sum_{k=m}^{n} a_k$ liest sich zum Beispiel

> "Die Summe über a_k von $k = m$ bis n."

Für den etwas seltsamen Fall, dass $n < m$ ist, spricht man von *leeren Summen* und definiert ihren Wert als 0, also z.B.

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0.$$

Falls Ihnen die Pünktchen $\cdots$ in der Definition des Summenzeichen etwas ungenau vorkommen, hätten wir auch eine *rekursive Definition* benutzen können: Wir definieren

$$\sum_{k=m}^{m-1} a_k := 0$$

und dann rekursiv für $n \geq m+1$

$$\sum_{k=m}^{n+1} a_k := \left(\sum_{k=m}^{n} a_k \right) + a_{n+1}.$$

Ähnlich wie bei Summen, führt man eine abkürzende Schreibweise für Produkte ein.

Definition 2.2. Sind $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ und ist a_k für jedes k mit $m \leq k \leq n$ eine reelle Zahl, dann ist

$$\prod_{k=m}^{n} a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \cdots \cdot a_n.$$

Weiterhin ist

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k$$

die *Fakultät von n*.

Für das *leere Produkt* setzt man

$$\prod_{k=m}^{m-1} a_k := 1.$$

Das erscheint auf den ersten Blick evtl. seltsam; immerhin ermöglicht es einen sinnvollen Beginn für eine rekursive Definition.

Satz 2.3. *Die Anzahl aller Möglichkeiten die Elemente einer n-elementigen Menge $\{E_1, \dots, E_n\}$ anzuordnen ist $n!$.*

Beweis.
Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion. Als Induktionsanfang nehmen wir $n = 1$: Die einelementige Menge $\{E_1\}$ kann auf genau eine Art angeordnet werden und es gilt $1! = 1$.

Zum Induktionsschritt: Wir betrachten die Anordnungen der Menge $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$. Wir nennen eine Anordnung *k-beginnend*, wenn sie mit dem Element E_k beginnt. Die Induktionsannahme sagt, dass es für jedes k genau $n!$ k-beginnende Anordnungen gibt (da hinter dem ersten Element E_k noch genau n Elemente angeordnet werden können). Da k jeden Wert von 1 bis $n+1$ annehmen kann, ist die Gesamtzahl der Anordnungen daher $(n+1)n! = (n+1)!$. $\square$

Definition 2.4. Für $n \geq k$ definieren wir den *Binomial-Koeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

und für $k > n$ und $k < 0$ definiert man $\binom{n}{k} := 0$.

Man bemerkt schnell

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ein Lemma ist ein Hilfssatz.

Lemma 2.5. *Für $n \geq 1$ und $k \in \mathbb{Z}$ gilt*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis.
Wir behandelt zuerst ein paar Randfälle: In den Fällen $k > n$ und $k < 0$, so sind beide Seiten der Formel $= 0$ und daher wahr. Ist $k = n$, so gilt

$$\binom{n}{n} = 1 = 1 + 0 = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}.$$

Für $k = 0$ gilt für alle $n > k$

$$\binom{n}{0} = 1 = 0 + 1 = \binom{n-1}{-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Sei also $0 < k < n$ Dann bekommen wir, wenn wir auf den

Hauptnenner bringen und anschließend $(n-1)!$ ausklammern

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}\\ &= \frac{k(n-1)!+(n-k)(n-1)!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)!}{k!(n-k)!}\\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

□

Satz 2.6. *Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge $\{E_1,\ldots,E_n\}$ ist $\binom{n}{k}$.*

Beweis.
Wir benutzen noch einmal vollständige Induktion über die Variable n. (D.h. wir müssen immer die Aussage für alle $k \le n$ zeigen).

Induktionsanfang bei $n_0 = 1$: Die Anzahl der nullelementigen Teilmengen von $\{E_1\}$ ist 1 (da gibt es nur die leere Menge $\emptyset$) und die Anzahl der einelementigen Teilmengen ist ebenfalls 1. Da $1 = \binom{1}{0} = \binom{1}{1}$, ist der Induktionsanfang gezeigt.

Induktionsschritt: Wir nehmen an, dass die Behauptung für alle Teilmengen der n-elementigen Menge $M_n := \{E_1,\ldots,E_n\}$ wahr ist. Wir betrachten jetzt die k-elementigen Teilmengen von $M_{n+1} := \{E_1,\ldots,E_n,E_{n+1}\}$. Für $k=0$ gibt es wieder nur die leere Menge und für $k = n+1$ gibt es auch nur genau eine Teilmenge (die ganze Menge). Damit ist die Behauptung für $k=0$ und $k = n+1$ gezeigt. Also sei nun $1 \le k \le n$. Für eine k-elementige Teilmenge von M_{n+1} gilt immer genau einer der beiden folgenden Fälle:

Fall 1: Sie enthält E_{n+1} nicht.

Fall 2: Sie enthält E_{n+1}.

Die Teilmengen aus Fall 1 sind aber auch Teilmengen von M_n. Also gibt es nach Induktionsannahme $\binom{n}{k}$-viele solche. Jede Teilmenge aus Fall 2 enthält das Element E_{n+1} und noch $k-1$ weitere Elemente, die aber aus der Menge M_n kommen. Daher gibt es (wieder mit der Induktionsannahme) genau $\binom{n}{k-1}$ viele solche Teilmengen. Zusammen mit Lemma 2.5 bekommen wir für die Gesamt-Anzahl der Fälle

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k},$$

was die Behauptung zeigt. □

Der Name "Binomial-Koeffizient" kommt vom Binomischen Lehrsatz, den man schnell selbst per Induktion beweisen kann.

Satz 2.7 (Binomischer Lehrsatz)**.** *Für reelle Zahlen x, y und natürliche*

Zahlen n gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

3 Die reellen Zahlen als Körper

Das zentrale Objekt der Analysis sind die reellen Zahlen. Die Intuition hinter den reellen Zahlen ist, dass die "die Zahlengerade lückenlos ausfüllen". Das ist allerdings keine mathematische Definition. Leider gibt es auch keine einfache Definition die besagt, was die reellen Zahlen sind. Wir verfolgen hier einen anderen Zugang, als die reellen Zahlen zu konstruieren. Die Idee ist simpel, aber weitreichend: Wir erklären nicht, *was die reellen Zahlen sind*, sondern *was man mit ihnen machen kann.* D.h. wir erklären die reellen Zahlen durch die Regeln, denen sie gehorchen. Solche grundlegenden Regeln nennen wir *Axiome* und insgesamt brauchen wir nur 16 Axiome, um die reellen Zahlen vollständig zu charakterisieren. Schon einmal vorweg:

Ein Möglichkeit ist, reelle Zahlen als "unendliche Dezimalzahlen" zu konstruieren, d.h. eine reelle Zahl besteht aus endlich vielen Ziffern $\{0,1,\ldots,9\}$ gefolgt von einem Komma, gefolgt von unendlich vielen weiteren Ziffern $\{0,1,\ldots,9\}$. Hierbei muss man nun noch Zahlen der Form 02,343 und 2,343 ebenso wie 1,99 . . . und 2,00 . . . als gleich erklären und dann erklären, wie man für solche Zahlen Additions und Multiplikation durchführen soll. Es stellt sich heraus, dass dies einiges an Arbeit ist.

> Eine Menge versehen mit zwei Verknüpfungen, genannt Addition und Multiplikation, und einer Ordnungsrelation, genannt "größer als", welche neben den üblichen Rechenregeln auch noch das archimedische Axiom und das Intervallschachtelungsprinzip erfüllt, nennen wir die reellen Zahlen.

In diesem Abschnitt behandeln wir die Axiome für die Addition und die Multiplikation. Die Axiome der Ordnung kommen in Abschnitt 4, das archimedische Axiom behandeln wir in Abschnitt 5 und das Intervallschachtelungsprinzip kommt dann in Abschnitt **??**.

Wir bezeichnen die Menge der reellen Zahlen mit $\mathbb{R}$ und postulieren, dass für reelle Zahlen zwei Verknüpfungen erklärt sind, nämlich Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} + :& \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto x+y\\ \cdot :& \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad (x,y)\mapsto xy. \end{aligned}$$

Diese Verknüpfungen genügen diesen Axiomen:

(A.1) Assoziativgesetz der Addition: Für alle $x,y,z\in\mathbb{R}$ gilt

$$(x+y)+z = x+(y+z).$$

(A.2) Kommutativgesetz der Addition: Für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt

$$x+y = y+x.$$

(A.3) Existenz der Null: Es gibt eine Zahl $0\in\mathbb{R}$, so dass für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt

$$x+0 = x.$$

(A.4) Existenz von negativen Elementen: Zu jedem $x\in\mathbb{R}$ existiert ein Element $-x\in\mathbb{R}$, so dass

$$x+(-x) = 0.$$

(M.1) Assoziativgesetz der Multiplikation: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$(xy)z = x(yz).$$

Bei der Multiplikation lassen wir das Symbol $\cdot$ auch oft weg, d.h. wir schreiben xy oder $x \cdot y$, je nachdem, was gerade besser passt.

(M.2) Kommutativgesetz der Multiplikation: Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$xy = yx.$$

(M.3) Existenz der Eins: Es gibt eine Zahl $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$x \cdot 1 = x.$$

(M.4) Existenz von inversen Elemente: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ existiert ein Element $x^{-1} \in \mathbb{R}$, so dass

$$xx^{-1} = 1.$$

(D) Distributivgesetz: Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Auf den ersten Blick vielleicht erstaunlich: Alle Rechenregeln für Addition und Multiplikation von reelle Zahlen folgen aus diesem vergleichsweise kleinen Satz von Regeln. Hier ein Beispiel:

Lemma 3.1. *Für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ gilt $x \cdot 0 = 0$.*

Beweis.
Wegen (A.3) folgt

$$0 + 0 = 0. \qquad (*)$$

Aus dem Distributivgesetz (D) folgt

$$x \cdot 0 \overset{(*)}{=} x \cdot (0 + 0) \overset{(D)}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0.$$

Jetzt Addieren wir zu beiden Seiten das Negative von $x \cdot 0$ und erhalten

$$x \cdot 0 + (-(x \cdot 0)) = (x \cdot 0 + x \cdot 0) + (-(x \cdot 0)). \qquad (**)$$

Die linke Seite von (**) ist nach (A.4) gleich 0. Die rechte Seite ist nach (A.1), (A.4) und (A.3) gleich

$$(0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-(x \cdot 0)) \overset{(A\,1)}{=} 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-(x \cdot 0))) \overset{(A\,4)}{=} 0 \cdot x + 0 \overset{(A\,3)}{=} x \cdot 0$$

und es folgt $0 = x \cdot 0$ wie behauptet. □

Für die inversen Elemente schreiben wir auch wie gewohnt

$$\tfrac{1}{x} := x^{-1}$$

und entsprechend benutzen wir auch die Schreibweise als Bruch

$$\tfrac{x}{y} := xy^{-1}.$$

Die Regeln (A.1)–(A.4), (M.1)–(M.4) und (D) gelten nicht nur für die reellen Zahlen. Sie gelten zum Beispiel auch für die *rationalen Zahlen*

$$\mathbb{Q} := \{\tfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

Den Ausdruck $\{x \mid E(x)\}$ liest man "Die Menge der x mit der Eigenschaft $E(x)$."
Das Zeichen $\setminus$ ist die Mengensubtraktion, d.h. $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots\}$.

Für die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ sind auch Addition und Multiplikation erklärt, aber es gelten nur (A.1)–(A.4), (M.1)–(M.3) und (D) (die Existenz von inversen für die Multiplikation ist nicht erfüllt). Für die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ gelten sogar nur (A.1)–(A.3), (M.1)–(M.3) und (D). Im Allgemeinen nennt man eine Menge K auf der zwei Verknüpfungen erklärt sind, und die die Regeln (A.1)–(A.4), (M.1)–(M.4) und (D) erfüllen einen *Körper*.

Da auch die rationalen Zahlen einen Körper bilden sehen wir: Die obigen Axiome charakterisieren die reellen Zahlen noch nicht eindeutig - es gibt noch einige andere Körper, die den gleichen Regeln gehorchen (neben $\mathbb{Q}$ auch noch, zum Beispiel, die Restklassenringe $\mathbb{Z}_p$ die in der linearen Algebra behandelt werden). Bevor wir weitere Regeln angeben, denen reelle Zahlen gehorchen, hier erst noch ein paar weitere Folgerungen.

Per Induktion folgt aus den Kommutativgesetzen, dass es bei beliebigen Summen und Produkten nicht auf die Reihenfolge der Summanden, bzw. Faktoren ankommt, d.h. es gilt zum Beispiel

$$\begin{aligned} & a + b + c + d = d + b + c + a \\ \text{oder} \qquad & abcde = eadbc. \end{aligned}$$

Weiterhin kommt es bei Doppelsummen nicht auf die Reihenfolge an, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} &= \sum_{i=1}^{n} (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im}) \\ &= a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1m} \\ &\quad + a_{21} + a_{22} + \cdots + a_{2m} \\ &\quad + \cdots + a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nm} \\ &= a_{11} + a_{21} + \cdots + a_{n1} \\ &\quad + a_{12} + a_{22} + \cdots + a_{n2} \\ &\quad + \cdots + a_{1m} + a_{2m} + \cdots + a_{nm} \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}. \end{aligned}$$

Ebenso einfach zeigt man das allgemeine Distributivgesetz für das Produkt zweier Summen

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \left(\sum_{j=1}^{m} y_j\right) &= x_1 \sum_{j=1}^{m} y_j + \cdots x_n \sum_{j=1}^{m} y_j \\ &= x_1 y_1 + x_1 y_2 + \cdots + x_1 y_m + \cdots + x_n y_1 + x_n y_2 + \cdots x_n y_m \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j \end{aligned}$$

d.h., es kommen alle möglichen Produkte eines x_i mit einem y_j genau einmal vor.

Wir erklären nun für reellen Zahlen x und $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen x^n rekursiv:

$$x^0 := 1, \quad x^{n+1} := x^n x \quad \text{für } n \geq 0.$$

Beachte: Nach dieser Definition ist $0^0 = 1$. Das ist nur eine Möglichkeit; auch die Möglichkeit $0^0 = 0$ ist in manchen Fällen sinnvoll. Taucht irgendwo ein Ausdruck x^n auf, der eventuell 0^0 sein kann, sollte man immer dazu schreiben, was in diesem Fall gelten soll.

Ist $x \neq 0$, so erklärt man auch negative Potenzen: Für $n \geq 0$ ist

$$x^{-n} := (x^{-1})^n.$$

Lemma 3.2. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ (wobei $x, y \neq 0$ falls die Exponenten negativ sein sollten) gilt*

$$x^n x^m = x^{n+m} \tag{1}$$
$$(x^n)^m = x^{nm} \tag{2}$$
$$x^n y^n = (xy)^n. \tag{3}$$

Beweis.
Wir beweisen zuerst die Aussagen für alle $n \geq 0$ mit vollständiger Induktion. Induktionsafang: Es gilt $x^0 = 1$ und daher gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$, $x^0 x^m = x^m = x^{0+m}$, $(x^0)^m = 1^m = 1 = x^{0m}$ und $x^0 y^0 = 1 = (xy)^0$.

Induktionsvoraussetzung: Die Aussagen (1)– (3) gelten für ein festes n und jedes $m \in \mathbb{Z}$.

Induktionsschritt: Die erste Behauptung folgt so:

$$x^{n+1}x^m \overset{\text{Def}}{=} x^n x x^m \overset{\text{I.V.}}{=} x^{n+m}x \overset{\text{Def}}{=} x^{n+1+m}.$$

Für die dritte Behauptung folgern wir

$$x^{n+1}y^{n+1} \overset{\text{Def}}{=} x^n x y^n y \overset{\text{I.V.}}{=} (xy)^n (xy) \overset{\text{Def}}{=} (xy)^{n+1}.$$

Dies können wir benutzen, um den Induktionsschritt für die zweite Behauptung zu machen

$$(x^{n+1})^m \overset{\text{Def}}{=} (x^n x)^m \overset{(3)}{=} (x^n)^m x^m \overset{\text{I.V.}}{=} x^{nm} x^m \overset{(1)}{=} x^{nm+m} = x^{(n+1)m}.$$

Jetzt behandeln wir den Fall $n < 0$. Dann ist $-n > 0$ und wir bekommen

$$x^n x^m = (x^{-1})^{-n}(x^{-1})^{-m} = (x^{-1})^{-n-m} = (x^{-1})^{-(n+m)} = x^{n+m}$$

Ebenso kann man (2) und (3) für $n < 0$ auf die vorigen Fälle zurückführen. □

4 Die reellen Zahlen als angeordneter Körper

In den reellen Zahlen gibt es welche, die wir als *positiv* kennzeichnen, und zwar durch das Symbol > 0. Wir nehmen zu den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ also eine *Relation* $>$ hinzu und fordern hierfür weitere Regeln. Ungleichungen spielen in der Analysis eine ebenso wichtige Rolle wie Gleichungen. Wir geben eine (kurze) Liste von Regeln (Axiomen) an, die das Symbol $>$ erfüllen soll, und leiten alles weitere daraus ab. Tatsächlich reicht es, wenn die Axiome nur erklären, was > 0 bedeutet, d.h. wir axiomatisieren nur den Begriff "positiv". Die Axiome nennt man auch *Anordnungsaxiome*:

Eine *Relation* R auf einer Menge kann als Teilmenge der Produkts $V \times V$ gesehen werden. Wir sagen dann xRy (in Worten: x steht in Relation R zu y), falls $(x, y) \in R$. In unserem Kontext ist diese formale Definition allerdings nicht wichtig.

Alternativ könnten wir auch Axiome für die Relation $\geq$ bzw. für ≥ 0 benutzen.

(O.1) Trichotomie: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$x > 0, \quad x = 0, \quad -x > 0.$$

(O.2) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x > 0 \quad \text{und} \quad y > 0 \implies x + y > 0.$$

(O.3) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$x > 0 \quad \text{und} \quad y > 0 \implies xy > 0.$$

Das Zeichen "$A \implies B$" bedeutet, dass die Aussage B aus der Aussage A folgt. Lies "A impliziert B".
Der Ausdruck $A \iff B$ bedeutet, dass sowohl $A \implies B$ als auch $B \implies A$ gilt, d.h. dass A und B logisch äquivalent sind. Lies: "genau dann wenn".
Wir benutzen auch auch das Zeichen $A :\iff B$ was bedeutet, dass der Ausdruck A durch den Ausdruck B definiert wird. Lies: "per Definition genau dann wenn".

Definition 4.1. Für reelle Zahlen x, y definieren wir

$$\begin{aligned}
x > y &:\iff x - y > 0 \\
x < y &:\iff y > x \\
x \geq y &:\iff x > y \quad \text{oder } x = y \\
x \leq y &:\iff x < y \quad \text{oder } x = y
\end{aligned}$$

Es folgt direkt aus (O.1), dass für $x, y \in \mathbb{R}$ immer genau eine der drei Aussagen

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x.$$

Damit können wir nun das Maximum und das Minimum von zwei reellen Zahlen definieren:

$$\max(x, y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq y \\ y, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\min(x, y) := \begin{cases} x, & \text{falls } x \leq y \\ y, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Lemma 4.2. *Es gilt*

i) Transitivität der Kleiner-Relation: Für $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt

$$x < y \quad \textit{und} \quad y < z \implies x < z.$$

Einen Körper, auf dem man eine Ordnungsrelation $>$ definieren kann, nennt man *angeordneten Körper*. Auch auf $\mathbb{Q}$ lässt sich eine Relation $>$ definieren, also ist auch $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper. D.h. die Körperaxiome (A.1-4), (M.1-4), (D) zusammen mit den Anordnungsaxiomen (O.1-3) zusammen charakterisieren $\mathbb{R}$ immer noch nicht.

ii) *Translationsinvarianz der Kleiner-Relation: Für $a, x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$x < y \implies x + a < y + a.$$

"Translation" bedeutet "Verschiebung".

iii) *Spiegelung: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$x < y \iff -x > -y.$$

Beweis. Die beiden Voraussetzungen der ersten Aussage bedeuten $y - x > 0$ und $z - y > 0$. Aus (O.2) folgt also $y - x + z - y > 0$, also $z - x > 0$ und das bedeutet $z > x$.

Die zweite Aussage folgt aus $0 < y - x = (y + a) - (x + a)$.

Die dritte Aussage folgt, da $0 < y - x = (-x) - (-y)$. □

Hier weitere Aussagen, die die Relationen $<, \leq$ erfüllen:

Lemma 4.3. *Für $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ gilt:*

i) *Aus $x < y$ und $a < b$ folgt $x + a < y + b$.*

ii) *Aus $x < y$ und $a > 0$ folgt $ax < ay$.*

iii) *Aus $0 \leq x < y$ und $0 \leq a < b$ folgt $ax < by$.*

iv) *Aus $x < y$ und $a < 0$ folgt $ax > ay$.*

v) *Für $x \neq 0$ gilt immer $x^2 > 0$.*

Es folgt $1 = 1^2 > 0$.

vi) *Aus $x > 0$ folgt $x^{-1} > 0$.*

vii) *Aus $0 < x < y$ folgt $x^{-1} > y^{-1}$.*

Beweis.

i) Translationsinvarianz (Lemma 4.2 ii)) zeigt $x + a < y + a$ und auch $a + y < b + y$. Mit Transitivität (Lemma 4.2 i)) folgt daraus $x + a < y + b$ wie behauptet.

ii) Es gilt $y - x > 0$, und nach Axiom (O.3) folgt $a(y - x) > 0$, was gerade $ax < ay$ bedeutet.

iii) Im Fall dass $x = 0$ oder $a = 0$ gilt, ist $ax = 0$ und die Behauptung stimmt. Seien also $x > 0$ und $a > 0$. Nach Punkt ii) gilt $ax < ay$ und auch $ay < by$. Transitivität zeigt $ax < by$ wie behauptet.

iv) Es gilt nach Lemma 4.2 iii), dass $-a > 0$ und mit ii) folgt $-ax < -ay$ wenden wir noch einmal Spiegelung (Lemma 4.2 ii)) an, folgt die Behauptung.

v) Ist $x > 0$, so ist nach Axiom (O.3) auch $x^2 = xx > 0 \cdot x = 0$. Ist $x < 0$ folgt mit iv) ebenfalls $x^2 = xx > 0 \cdot x = 0$ auch iv).

vi) Nach v) gilt $x^{-2} = (x^{-1})^2 > 0$. Multiplizieren wir $x > 0$ mit x^{-2}, so folgt nach Axiom (O.3) $x^{-2}x > 0$ und damit die Implikation $x > 0 \implies x^{-1} > 0$. Die umgekehrte Implikation

$x^{-1} > 0 \implies x > 0$ folgt durch Vertauschung der Rollen von x und x^{-1}.

vii) Ist $0 < x < y$ so folgt nach (O.3) auch $xy > 0$ und mit vi) auch $x^{-1}y^{-1} = (xy)^{-1} > 0$. Multiplikation von $x < y$ mit $x^{-1}y^{-1} > 0$ liefert nach ii) $y^{-1} < x^{-1}$ wie behauptet.

□

Mit Hilfe der Relation $\geq$ definieren wir:

Definition 4.4. Für eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ ist der *(Absolut-)Betrag* definiert durch

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ wird gelesen als "Betrag von x" oder auch "x-Betrag".

Alternativ könnten wir auch schreiben $|x| = \max(x, -x)$. Man erkennt direkt, dass $|x| = |-x|$.

Satz 4.5. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:*

i) $|x| \geq 0$ *und außerdem* $|x| = 0 \iff x = 0$,

ii) $|xy| = |x||y|$,

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

Induktiv folgt $|x^n| = |x|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Diese Aussage nennt man die *Dreiecksungleichung*.

Beweis.

Der erste Teil der Aussage i) folgt aus der Definition, da $-x \geq 0$, falls $x < 0$. Für den zweiten Teil zeigen wir zuerst, dass aus $x = 0$ folgt, dass $|x| = 0$ gilt: Ist $x = 0$, so ist auch $x \geq 0$, also ist $|x| = x = 0$. Für die Rückrichtung sei $|x| = 0$, d.h. $\max(x, -x) = 0$. Nach der Definition des Maximums folgt also $x \leq 0$ und $x \geq 0$ und das bedeutet $x = 0$.

Aussage ii) ist im Fall $x, y \geq 0$ klar (da dann $xy \geq 0$ und also $|x||y| = xy = |xy|$). Ist z.B. $x < 0$ und $y > 0$, so ist $-x > 0$ und es folgt $|xy| = |-xy| = |-x||y| = |x||y|$. Für die weiteren Fälle ($y < 0$, $x > 0$ und der Fall $x < 0$, $y < 0$) argumentiert man ähnlich.

Aussage iii) wurde in der Übung gezeigt (und basiert nur auf der Beobachtung, dass $x \leq |x|$ und $-x \leq |x|$ gelten). □

Das Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen ist nicht schwer, wenn man sich an die Regeln und Definitionen hält.

Beispiel.

1. Wir betrachten die Gleichung

$$|4x - 2| = 1 \qquad (*)$$

und fragen uns, welche Lösungen diese Gleichung hat. Wir schreiben uns die Definition des Betrags in diesem Fall auf und formen die Bedingungen um:

$$|4x-2| = \begin{cases} 4x-2, & \text{falls } 4x-2 \geq 0 \\ -(4x-2), & \text{falls } 4x-2 < 0. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 4x-2, & \text{falls } x \geq \frac{1}{2} \\ -4x+2, & \text{falls } x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Die Gleichung (*) hat also zwei Fälle:

(1) Ist $x \geq \frac{1}{2}$, so lautet die Gleichung $4x - 2 = 1$ und hat die Lösung $x = \frac{3}{4}$.

(2) Ist $x < \frac{1}{2}$, so lautet die Gleichung $-4x + 2 = 1$ und hat die Lösung $x = \frac{1}{4}$.

Zusammengefasst: Die Gleichung (*) hat die beiden Lösungen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{4}$. Anders geschrieben:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |4x-2| = 1\} = \{\tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}\}.$$

2. Wir betrachten die Ungleichung

$$|x-2| > 4 \qquad (**)$$

und fragen uns, für welche $x \in \mathbb{R}$ sie erfüllt ist. Wir schreiben uns wieder die Definition des Betrags in diesem Fall auf:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & \text{falls } x-2 \geq 0 \\ -(x-2), & \text{falls } x-2 < 0. \end{cases}$$

Wir haben also für die Ungleichung (**) die beiden Fälle:

(1) Ist $x \geq 2$, so lautet die Ungleichung $x - 2 > 4$, also $x > 6$.

(2) Ist $x < 2$, so lautet die Ungleichung $-x + 2 > 4$, also $x < -2$.

Zusammengefasst: Die Ungleichung (**) hat die Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 6 \text{ oder } x < -2\}$.

3. Machen wir noch ein komplizierteres Beispiel:

$$2|x-1| - |3x+2| \geq 2. \qquad (***)$$

Für jeden Betrag haben wir zwei Fälle, so dass wir insgesamt vier Fälle betrachten müssen, nämlich:

(1) $x \geq 1$ und $3x \geq -2$: Hier ist die Ungleichung

$$2x - 2 - 3x - 2 \geq 2 \iff -x - 4 \geq 2 \iff x \leq -6.$$

Fassen wir diesen Fall zusammen: Es muss $x \geq 1$, $3x \geq -2$ und $x \leq -6$ gelten. Diese Ungleichungen widersprechen sich, d.h. es gibt in diesem Fall keine Lösungen.

(2) $x \geq 1$ und $3x < -2$: Dieser Fall tritt gar nicht auf, da die zweite Ungleichung $x < -2/3$ sagt, was $x \geq 1$ widerspricht. Hier gibt es also auch keine Lösungen.

(3) $x < 1$ und $3x \geq -2$: Dieser Fall tritt auf (es sind die x mit $-\frac{2}{3} \leq x < 1$). Die Ungleichung lautet

$$-2(x-1) - 3x - 2 \geq 2 \iff -5x \geq 2 \iff x \leq -\tfrac{2}{5}.$$

Fassen wir diesen Fall zusammen: Es müssen die drei Ungleichungen $x < 1$, $x \geq -\frac{2}{3}$ und $x \leq -\frac{2}{5}$ gelten. Die erste Ungleichung ist überflüssig (die letzte ist nämlich stärker) und daher haben wir in diesem Fall als Lösungen alle x mit $-\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{2}{5}$.

(4) $x < 1$ und $3x < -2$: Hier ist die Ungleichung

$$-2(x-1) + (3x+2) \geq 2 \iff x+4 \geq 2 \iff x \geq -2.$$

Zusammengefasst: Es muss gelten $x < 1$, $x < -\frac{2}{3}$ und $x \geq -2$. Hier ist wieder erste Ungleichung überflüssig und wir bekommen die Lösungen $-2 \leq x < -\frac{2}{3}$.

Sammeln wir die Ergebnisse aus allen drei Ungleichungen zusammen, so bekommen wir als Lösungsmenge

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbb{R} \mid -\tfrac{2}{3} \leq x \leq -\tfrac{2}{5} \text{ oder } -2 \leq x < -\tfrac{2}{3}\} \\ = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq -\tfrac{2}{5}\}.\end{aligned}$$

△

5 Grenzwerte von Folgen

Wir brauchen noch eine wichtige Eigenschaft der reellen Zahlen: Sie sind nicht nur ein angeordneter Körper, sondern es lässt sich auch jede positive Zahl mit einer natürlichen Zahl übertreffen. Genauer: Es gilt das *Achimedische Axiom*:

Angeordnete Körper in denen das Archimedische Axiom gilt, heißen *archimedisch angeordnete Körper*; Beispiele sind $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$. Wir werden also noch mehr Axiome brauchen, um die reellen Zahlen zu charakterisieren. Das Archimedische Axiom ist übrigens von den bisherigen Axiomen unabhängig.

(Arch) Zu je zwei reellen Zahlen $x, y > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$, so dass $ny > x$.

Aus dem Archimedischen Axiom folgt (mit $y = 1$ und weiteren Argumenten), dass es zu jeder reellen Zahl x eine eindeutige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass

$$n \leq x < n + 1.$$

Diese eindeutig bestimmte Zahl n wird mit $\lfloor x \rfloor$ bezeichnet. Entsprechend ist die eindeutige ganze Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $m - 1 < x \leq m$ bezeichnet mit $\lceil x \rceil$.

Man nennt $\lfloor x \rfloor$ auch "Gauß-Klammer". Es gilt zum Beispiel $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor = 1$ und $\lceil \frac{5}{4} \rceil = 2$.

Das folgende Lemma ist unscheinbar, aber die wichtigste Erkenntnis, wenn es um Grenzwerte geht:

Lemma 5.1. *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 0$, so dass*

$$\tfrac{1}{n} < \epsilon.$$

In Worten: Jede positive reelle Zahl kann durch einen Kehrwert eine natürlichen Zahl unterschritten werden.

Beweis.
Wir benutzen das Archimedische Axiom mit $y = 1$ und $x = 1/\epsilon$: Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/\epsilon$. Aus Lemma 4.3 vii) folgt $\epsilon > 1/n$. □

Hier noch ein einfaches technisches Hilfsmittel, was wir in der großen Übung gezeigt haben:

Satz 5.2 (Bernoullische Ungleichung). *Für alle $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Damit zeigt man zum Beispiel, wie sich Potenzen von reellen Zahlen verhalten:

Satz 5.3. *i) Ist $b > 1$, so gibt es zu jedem $K \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass*

$$b^n > K.$$

Hier sollte man denken "zu jedem noch so großen K...".

ii) Ist $0 < b < 1$, so gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$b^n < \epsilon.$$

Hier sollte man denken "zu jedem noch so kleinen, positiven ϵ...".

Beweis.

i) Wir setzen $x = b - 1$. Dann ist in diesem Fall $x > 0$ und aus der Bernoullischen Ungleichung (Satz 5.2) folgt

$$b^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Nach dem Archimedischen Axiom (mit x statt y und $K-1$ statt x) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $nx > K-1$ gilt. Für dieses n gilt also $b^n \geq 1 + nx > 1 + K - 1 = K$.

ii) Ist $0 < b < 1$, so ist $1/b > 1$. Nach i) gibt es zu $K = 1/\epsilon$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(1/b)^n > K$. Das bedeutet aber nichts anderes also $b^n < 1/K = \epsilon$.

□

Wenden wir uns nun dem zentralen Begriffs der Analysis zu: Dem Grenzwert (oder Limes) einer Folge. Definieren wir zuerst den Begriff der Folge:

Definition 5.4. Eine *reelle Folge* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Abbildung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ in die reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahl $a_n \in \mathbb{R}$ zuordnet. Wir schreiben auch $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ oder auch nur (a_n).

Manchmal betrachte wir auch Folgen, die nicht mit dem Index 0 starten, also $(a_n)_{n\geq k}$ bzw. $(a_k, a_{k+1}, \dots)$.

Beispiel.

i) Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es die *konstante Folge*, d.h. $a_n = a$ für alle n, also $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a, a, \dots)$.

ii) Ist $a_n = \frac{1}{n}$ für $n \geq 1$ bekommen wir die Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$.

iii) Für $a_n = (-1)^n$ bekommen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, 1, \dots)$.

iv) Es ist
$$\left(\tfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(0, \tfrac{1}{2}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{3}{4}, \dots\right).$$

v) Es ist
$$\left(\left(\tfrac{n+1}{n}\right)^n\right)_{n\geq 1} = \left(2, (\tfrac{3}{2})^2, (\tfrac{4}{3})^3, (\tfrac{5}{4})^4, \dots\right) = (2, \tfrac{9}{4}, \tfrac{64}{27}, \tfrac{625}{256}, \dots).$$

vi) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gibt es die Folge
$$(x^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, x, x^2, x^3, \dots).$$

△

Für einige der Folgen aus dem Beispiel scheint es einfach zu sein, zu erkennen, was für immer größeres n mit den Folgengliedern a_n passiert. Bei anderen ist das nicht so klar. Wir würden gerne ausdrücken wollen, was es mathematisch korrekt bedeutet, dass eine Folge einen Grenzwert hat, d.h. dass sie, umgangssprachlich ausgedrückt, "gegen einen bestimmten Wert strebt". Hier ist die Definition:

Definition 5.5. Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent*, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so

An dieser Stelle lohnt es sich, Quantoren zu benutzen: Um logische Ausdrücke knapp zu formulieren, benutzt man die Symbole $\forall$ (gelesen "für alle") und $\exists$ (gelesen: "es existiert"). Damit können wir schreiben: (a_n) konvergiert, falls
$$\exists a \in \mathbb{R}\, \forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : |a_n - a| < \epsilon.$$

dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$. Der Wert a heißt *Grenzwert* oder *Limes* der Folge.

Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*.

Den Sachverhalt, dass die Folge (a_n) den Grenzwert a hat, schreiben wir als

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \text{oder} \quad a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a.$$

Ersteres liest man als "Der Grenzwert von a_n für n gegen ∞ ist a," während man das zweite eher "a_n geht gegen a für n gegen ∞" liest; beides hat aber die gleiche Bedeutung.

Folgen, die 0 als Grenzwert haben, heißen *Nullfolgen*. Hier zwei Beispiele für Nullfolgen, die uns häufig begegnen werden: Die *harmonische Folge* $a_n = 1/n$ und die *geometrische Folge* $a_n = q^n$ (mit $-1 < q < 1$):

Beispiel.

1) Wir betrachten die Folge $a_n = 1/n$. Wir zeigen, dass die Folge den Grenzwert 0 hat: Sei $\epsilon > 0$. Wir müssen nun ein $N \in \mathbb{N}$ finden, so dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - 0| < \epsilon$ gilt. Anders gesagt: Wir müssen N so finden, dass für $n \geq N$ immer $1/n < \epsilon$ gilt. Die letzte Ungleichung ist erfüllt, wenn $n > 1/\epsilon$ ist. Wir vermuten also, dass $N := \lceil 1/\epsilon \rceil + 1$ funktioniert. Das stimmt in der Tat: Ist $n \geq N$, dann gilt $|a_n - 0| = 1/n \leq 1/N < \epsilon$ (wobei letztere Ungleichung aus $N > 1/\epsilon$ folgt).

   Es gilt also:
   $$\tfrac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$
   oder, anders gesagt: "$(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Nullfolge".

   Wir bemerken: Jedes $N \geq 1/\epsilon$ geht; die Wahl $N = \lceil 1/\epsilon \rceil$ ist nicht wesentlich. wir müssen aber ja auch nur ein N angeben können, das funktioniert.

2) Wir betrachten die Folge $a_n = q^n$ für $-1 < q < 1$. Wir vermuten, dass auch diese Folge eine Nullfolge ist. Dazu müssen wir zeigen: Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein N, so dass für $n \geq N$ gilt, dass $|q^n - 0| < \epsilon$ gilt. Die Ungleichung, die wir zeigen sollen, lautet also $|q^n| < \epsilon$ und nach Satz 4.5 ii) ist das äquivalent zu $|q|^n < \epsilon$. Wir bemerken, $0 \leq |q| < 1$ und die Aussage von Satz 5.3 ii) ist in diesen Fall: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für dieses n gilt $|q|^n < \epsilon$.

   Kommen wir zum Beweis: Sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 5.3 ii) existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|q|^N < \epsilon$ gilt. Dann gilt für alle $n \geq N$ auch
   $$|q|^n = \underbrace{|q|^{n-N}}_{\leq 1}|q|^N \leq |q|^N < \epsilon,$$
   wie behauptet.

   Wir haben gezeigt: Ist $-1 < q < 1$, so gilt
   $$q^n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

△

Nun kommen wir dazu, wie man nachweisen kann, dass eine Folge *nicht* konvergiert:

Lemma 5.6. *Die Folge* $a_n = (-1)^n$ *ist divergent.*

Beweis.
Um zu zeigen, dass eine Folge nicht konvergiert, müssen wir zeigen, dass jedes a kein Grenzwert der Folge seien kann. Dazu führen wir einen Widerspruchsbeweis: Wir nehmen an, dass ein $a \in \mathbb{R}$ ein Grenzwert der Folge ist, und führen diese Annahme zu einem Widerspruch. Also: Wäre a Grenzwert der Folge $a_n = (-1)^n$, dann würde es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ geben, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$. Wenn das für alle $\epsilon > 0$ geht, dann also auch für $\epsilon = 1/2$: Es gäbe also ein N, so dass für $n \geq N$ immer $|a_n - a| < 1/2$ gilt. Damit würden wir folgenden offensichtlichen Widerspruch bekommen: Für $n \geq N$ gilt dann

$$\begin{aligned} 2 &= |(-1)^{n+1} - (-1)^n| \\ &= |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) - (a_n - a)| \\ &\leq |a_{n+1} - a| + |a_n - a| && \text{(mit Dreiecksungleichung)} \\ &< 1/2 + 1/2 && \text{(nach Annahme)} \\ &= 1. \end{aligned}$$

□

Hier noch eine andere Möglichkeit, sich den Begriff der Konvergenz anschaulich, aber dennoch mathematisch korrekt und rigoros, vorzustellen: Zu $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ nennen wir die Menge

$$]a - \epsilon, a + \epsilon[:= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a - \epsilon < x < a + \epsilon\}$$

die *ϵ-Umgebung von a*. Außerdem sagen wir, dass eine Bedingung *für fast alle $n \in N$* gilt, wenn sie für alle bis auf endlich viele $n \in N$ gilt. Damit lässt sich die Definition der Konvergenz einer Folge auch wie folgt ausdrücken:

Es gilt übrigens auch $]a - \epsilon, a + \epsilon[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ |x - a| < \epsilon\}$.

> Eine Folge (a_n) ist konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass in jeder ϵ-Umgebung von a fast alle Folgenglieder liegen.

6 Eigenschaften und Rechenregeln für Grenzwerte von Folgen

Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert haben:

Erst durch diesen Satz ergibt die Schreibweise $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ erst Sinn!

Satz 6.1. *Hat eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Grenzwerte a und b, so gilt $a = b$.*

Beweis.
Wir argumentieren per Widerspruch. Angenommen, es wäre $a \neq b$. Dann wäre $|b-a| > 0$. Wir setzen $\epsilon := |b-a|/4$ und da a und b beides Grenzwerte von (a_n) sind, gibt es N_a und N_b, so dass

$$\text{für } n \geq N_a\text{: } |a_n - a| < \epsilon, \quad \text{und für } n \geq N_b\text{: } |a_n - b| < \epsilon.$$

Ist dann $n \geq N_a$ und $n \geq N_b$ (also $n \geq \max(N_a, N_b)$), so gilt $|a_n - a| < \epsilon$ und $|a_n - b| < \epsilon$. Mit der Dreiecksungleichung bekommen wir aber damit für diese n den offensichtlichen Widerspruch

$$|a-b| \leq |a-a_n| + |a_n - b| < 2\epsilon = 2|b-a|/4 = |a-b|/2.$$

Also muss $a = b$ gelten. □

Definition 6.2. Eine Folge (a_n) heißt *beschränkt nach oben (bzw. nach unten)*, falls es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \in N$ gilt

Man sagt in diesem Fall z.B. auch "nach oben durch K beschränkt".

$$a_n \leq K \qquad (\text{bzw. } a_n \geq K)$$

Eine Folge heißt *beschränkt*, falls sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Anders: Eine Folge (a_n) ist beschränkt, falls es ein $M \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle n gilt $|a_n| \leq M$.

Satz 6.3. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Beweis.
Es sei (a_n) konvergent mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Zu $\epsilon = 1$ gibt es also ein N, so dass für alle $n \geq N$ gilt, dass $|a_n - a| < 1$ gilt. Dann folgt für diese n mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Setzen wir $K = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_{N-1}|)$, so folgt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n| \leq \max(K, 1 + |a|).$$

□

Die Umkehrung des Satzes gilt nicht: Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist beschränkt (durch 1), aber nicht konvergent, wie wir in Lemma 5.6 gesehen haben.

Satz 6.4. *Sind die Folgen (a_n) und (b_n) konvergent mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$, so sind auch die Folgen $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$ konvergent und es gilt*

$$a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$$
$$a_n b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} ab.$$

Beweis.
Kommen wir zuerst zur Folge der Summen: Sei $\epsilon > 0$. Dann ist auch $\epsilon/2 > 0$ und es gibt also N_a und N_b, sodass

$$\text{für } n \geq N_a \text{ gilt } |a_n - a| < \epsilon/2$$
$$\text{und für } n \geq N_b \text{ gilt } |b_n - b| < \epsilon/2$$

Für $n \geq \max(N_a, N_b)$ gilt also mit der Dreiecksungleichung

$$|a_n + b_n - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} \leq \epsilon,$$

also $a_n + b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + b$.

Nun zur Folge der Produkte: Da die Folge (a_n) konvergent ist, ist sie nach Satz **??** beschränkt, d.h. es existiert K_a mit $|a_n| \leq K_a$ für alle n. Zeigen wir nun die Konvergenz von $(a_n b_n)$ gegen ab. Wir betrachten die Differenz $a_n b_n - ab$ und schieben den Term $a_n b$ ein, indem wir ihn addieren und wieder abziehen. Die Dreiecksungleichung zeigt

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| \\ &= |a_n||b_n - b| + |a_n - a||b| \\ &\leq K_a |b_n - b| + |a_n - a||b| \end{aligned}$$

Sei nun $\epsilon > 0$. Wir müssen nun N so finden, dass der letzte Ausdruck für $n \geq N$ kleiner als ϵ ist. Dazu nutzen wir wieder aus, dass $|a_n - a|$ und $|b_n - b|$ beliebig klein werden. Es ist nämlich auch $\frac{\epsilon}{2K_a} > 0$ und auch $\frac{\epsilon}{2|b|} > 0$. Daher existieren N_b und N_a, sodass

$$\text{für } n \geq N_a \text{ gilt } |a_n - a| < \tfrac{\epsilon}{2|b|}$$
$$\text{und für } n \geq N_b \text{ gilt } |b_n - b| < \tfrac{\epsilon}{2K_a}$$

Für $n \geq \max(N_a, N_b)$ gilt also

$$|a_n b_n - ab| \leq K_a |b_n - b| + |a_n - a||b| < K_a \tfrac{\epsilon}{2K_a} + \tfrac{\epsilon}{2|b|}|b| = \epsilon$$

was die Konvergenz zeigt. □

Korollar 6.5. *Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a, bzw. b, und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch die Folge $(\lambda a_n + \mu b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt*

$$\lambda a_n + \mu b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \lambda a + \mu b.$$

Satz 6.6. *Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten a, bzw. b und ist $b \neq 0$, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt, dass $b_n \neq 0$. Außerdem konvergiert dann die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und es gilt*

$$\frac{a_n}{b_n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a}{b}.$$

Beweis.
Wir zeigen zuerst den Spezialfall, in dem $a_n = 1$ die konstante Folge mit Wert 1 ist. Aus $b \neq 0$ folgt $|b|/2 > 0$, und da $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, existiert ein n_0, so dass für $n \geq n_0$ gilt

$$|b - b_n| < \tfrac{|b|}{2}.$$

Daraus folgt $|b_n| > |b|/2$, und insbesondere $b_n \neq 0$ für $n \geq n_0$.

Zeigen wir jetzt die Konvergenz von $1/b_n$ gegen $1/b$: Sei $\epsilon > 0$. Da $b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$, existiert ein n_1, so dass für $n \geq n_1$ gilt:

$$|b - b_n| < \epsilon \tfrac{|b|^2}{2}.$$

Wir setzen $N := \max(n_0, n_1)$ und rechnen nach, dass für $n \geq N$ gilt

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right| \leq \frac{1}{|b_n||b|}|b - b_n| \leq \frac{2}{|b|^2}\frac{\epsilon|b|^2}{2} = \epsilon.$$

Das zeigt $1/b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1/b$. Die Behauptung folgt nun mit Satz **??**, da

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}.$$

□

Mit Hilfe der Grenzwertsätze können wir, ausgehend von schon bekannten Grenzwerten, weitere berechnen:

Beispiel.

1. Es sei $a_n = 1/n^2$. Aus Abschnitt 5 wissen wir, dass die Folge $b_n = 1/n$ eine Nullfolge ist. Mit

   $$a_n = \tfrac{1}{n^2} = \tfrac{1}{n} \cdot \tfrac{1}{n} = b_n \cdot b_n$$

   folgt

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n b_n = 0 \cdot 0 = 0.$$

   Ebenso sieht man $1/n^k \to 0$ für alle $k = 1, 2, \ldots$

2. Es sei

   $$a_n = \frac{2n^2 + 1}{2n + 3n^2}.$$

   Wir schreiben den Ausdruck für a_n um, bis wir eine geeignete Darstellung mit Hilfe von konvergenten Folgen bekommen:

   $$a_n = \frac{n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(\frac{2}{n} + 3\right)} = \frac{2 + \frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n} + 3}.$$

   Mit Satz **??** folgt

   $$\lim_{n\to\infty}\left(2 + \tfrac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n^2} = 2 + 0 = 2$$

und

$$\lim_{n\to\infty}\left(\tfrac{2}{n}+3\right) = 2\lim_{n\to\infty}\tfrac{1}{n} + \lim_{n\to\infty} 3 = 2\cdot 0 + 3 = 3.$$

Mit Hilfe von Satz 6.6 folgt also

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{2n+3n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{\frac{2}{n}+3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+3\right)} = \frac{2}{3}.$$

△

Für unbeschränkte Folgen ist es sinnvoll, den Begriff der "bestimmten Divergenz gegen $\pm\infty$" einzuführen:

Definition 6.7. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$, wenn es zu jedem $K\in\mathbb{R}$ ein $N\in\mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n\geq N$ gilt, dass $a_n > K$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *bestimmt divergent gegen* $-\infty$, falls $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty, \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Beispiel.

1. Die Folge $a_n = n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$. (Zum Beweis: Ab welchem Index N gilt $a_n > K$?)

   Um zu sehen, dass auch $a_n = n^k$ bestimmt gegen unendlich divergiert, reicht es z.B. einzusehen, dass $a_n \geq n$ gilt.

2. Die Folge $a_n = -2^n$ divergiert bestimmt gegen $-\infty$, denn es gilt $-2^n \leq -n$ für alle n.

3. Es gibt Folgen, die divergieren, aber weder bestimmt gegen $+\infty$ noch bestimmt $-\infty$ divergieren. Das einfachste Beispiel ist $a_n = (-1)^n$. Andere Beispiele sind $a_n = (-2)^n$ oder $a_n = (-1)^n n$.

4. Eine Folge, die bestimmt gegen $+\infty$ divergiert ist nach oben unbeschränkt (das liest man direkt an den Definitionen ab). Umgekehrt gibt es aber Folgen die nach oben unbeschränkt sind, die aber nicht bestimmt gegen $+\infty$ divergieren, z.B. die Folge $a_n = (-2)^n$.

△

Achtung: Für bestimmte Divergenz gelten die bisherigen Grenzwertsätze im Allgemeinen nicht! Zum Beispiel können für Folgen a_n und b_n mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ verschiedene Fälle für $a_n + b_n$ auftreten:

1. Für $a_n = n^2$ und $b_n = -n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = +\infty$.
2. Für $a_n = -n^2$ und $b_n = n$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = -\infty$.
3. Für $a_n = n$ und $b_n = -n$ konvergiert $(a_n + b_n)$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = 0$.
4. Für $(a_n) = (2\lfloor n/2\rfloor) = (0,0,2,2,4,4,\dots)$ und $b_n = -n$ gilt $(a_n - b_n) = (0,-1,0,-1,\dots)$, also ist $(a_n + b_n)$ weder konvergent, noch bestimmt divergent.

7 Die reellen Zahlen als vollständiger, angeordneter Körper

Mit den bisherigen Axiomen können wir schon sehr viel machen, aber einiges auch nicht: Wir können zum Beispiel nicht zeigen, dass die Gleichung

$$x^2 = 2$$

irgendeine Lösung hat. Ebenso wenig können wir zeigen, dass die Folge

$$a_n = (1 + \tfrac{1}{n})^n$$

einen Grenzwert hat. Der Grund dafür ist: Alle bisherigen Axiome sind auch für die rationalen Zahlen gültig. Die Gleichung $x^2 = 2$ hat aber keine rationale Lösung (wir wissen schon, dass es die beiden Lösungen $\pm\sqrt{2}$ gibt) und auch der Grenzwert von der Folge $(1 + \frac{1}{n})^n$ in keine rationale Zahl (sondern eine Mögliche Definition für die irrationale Zahl e).

Das letzte Axiom, was wir benötigen, ist das sogenannte Vollständigkeitsaxiom (oder auch Axiom von der kleinsten oberen Schranke). Hierfür machen wir noch ein paar Definitionen:

Definition 7.1. Es sei $A \subset \mathbb{R}$. Wir nennen A *nach oben (bzw. unten) beschränkt*, falls es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $a \in A$ auch $a \leq b$ (bzw. $a \geq b$) gilt. Ein solches b heißt *obere (bzw. untere) Schranke* für A.

Mit $A \subset B$ ist hier immer der Fall $A = B$ mit eingeschlossen, genauer: Es gilt $A \subset B$ falls für jedes $x \in A$ auch $x \in B$ gilt.

Dann führen wir noch einmal die schon aus den Übungen bekannte Notation für Intervalle ein:

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \mid a \leq x \leq b\} \\
]a, b[&:= \{x \mid a < x < b\} \\
[a, b[&:= \{x \mid a \leq x < b\} \\
]a, b] &:= \{x \mid a < x \leq b\}.
\end{aligned}$$

Beispiel.

Wir betrachten $A = [0, 1]$. Jedes $a \in A$ erfüllt $a \leq 1$, daher ist 1 eine obere Schranke für A. Ebenso ist jede Zahl die größer als 1 ebenfalls eine obere Schranke für A. Jede Zahl $b < 1$ (wie z.B. $19/20$ oder $1 - 10^{-30}$ oder auch -4) ist keine obere Schranke für A.

Nun betrachten wir $B =]0, 1[$. Hier ist die Situation auf den ersten Blick anders, denn jedes $a \in B$ erfüllt die etwas stärkere Bedingung $a < 1$. Trotzdem ist jedes $b \geq 1$ eine obere Schranke von B und ebenso ist jedes $b < 1$ *keine* obere Schranke für B. Warum? Ist $b < 1$ (und der Einfachheit halber auch $b > 0$, so ist $a := (1 + b)/2 = 1/2 + b/2 > b/2 + b/2 = b$ aber $a \in B$. △

Definition 7.2. Eine Zahl s heißt *kleinste obere Schranke*, oder *Supremum* von $A \subset \mathbb{R}$, wenn gilt

1. s ist eine obere Schranke für A, und
2. ist b eine obere Schranke für A, so ist $s \leq b$.

Wir schreiben in diesem Fall $s = \sup A$.

Analog ist s die *größte untere Schranke* oder *Infimum* von A, wenn

- s ist untere Schranke für A, und
- ist b eine untere Schranke, so ist $s \geq b$.

Wir schreiben in diesem Fall $s = \inf A$.

Wie wir schon gesehen haben, kann eine Menge viele verschiedene obere Schranken haben, aber nur höchstens ein einziges Supremum: Wären s_1 und s_2 verschiedene Suprema, so würde sowohl $s_1 \leq s_2$, also auch $s_2 \leq s_1$ gelten, woraus $s_1 = s_2$ folgen würde.

Beispiel.
Wir betrachten die Menge

$$A = \{\tfrac{1}{n} \mid n = 1,2,\dots\} = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \dots\}.$$

Obere Schranken für A sind zum Beispiel 4 oder auch 1,2. Wir behaupten, dass $\sup A = 1$ gilt. Um das zu zeigen, müssen die beiden Punkte der Definition zeigen. Für die erste Eigenschaft: Jedes das für $n = 1,2,\dots$ immer $1/n \leq 1$ gilt, ist 1 eine obere Schranke für A. Für den zweiten Punkt, betrachten wir irgendeine obere Schranke b von A. Da $1 \in A$ gilt, muss insbesondere auch $1 \leq b$ gelten. Das ist aber schon genau der zweite Punkt. Wir haben also $\sup A = 1$ gezeigt.

Wie ist es mit unteren Schranken? Jedes $a \leq 0$ ist eine untere Schranke für A, da für $n = 1,2,\dots$ immer $1/n \geq 0$ gilt. Wir behaupten dass $0 = \inf A$ gilt und zeigen wieder beide Punkte: Den ersten Punkt haben wir gerade schon argumentiert, dass 0 eine untere Schranke ist. Für den zweiten Punkt betrachten wir wieder irgendeine untere Schranke b für A und nehmen aber an, dass $b > 0$ gilt. Dann gibt es nach Lemma 5.1 aber ein $n \in \{1,2,\dots\}$, so dass $1/n < b$ gilt. Also ist jedes $b > 0$ keine untere Schranke für A. Das zeigt also $\inf A = 0$. △

Eine wichtige Erkenntnis dieses Beispiels ist: $\sup A$ und $\inf A$ können sowohl Elemente von A sein, also auch nicht in A liegen!

Definition 7.3. Ein a_0 heißt *Maximum (bzw. Minimum)* von $A \subset \mathbb{R}$, wenn $a_0 \in A$ gilt und für jedes $a \in A$ gilt $a_0 \geq a$ (bzw. $a_0 \leq a$).

Auch Maxima und Minima sind eindeutig (wenn sie existieren) und wir schreiben $\max A$ bzw. $\min A$.

Beispiel.

Für die Menge A aus dem vorigen Beispiel gilt $\max A = 1$. Ein Minimum hat A aber *nicht*! Wieso nicht? Jedes Element von A ist von der Form $1/n$ für ein $n \in \{1,2,\dots\}$, aber für jedes dieser Elemente gibt es ein kleinere Element, welches auch noch in A liegt, nämlich $1/(n+1)$. Daher kann keins der Elemente ein Minimum sein. △

Jetzt ist es Zeit, das Vollständigkeitsaxiom anzugeben:

(Voll) Jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen hat ein Supremum.

Wir geben hier noch einmal die volle (abstrakte) Definition der reellen Zahlen an:

Definition 7.4. Die reellen Zahlen sind eine Menge mit Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ und einer Relation $>$ welche die Axiome (A.1)–(A-4), (M.1)–(M.4), (D), (O.1)–(O.3), erfüllen und für die (Arch) und (Voll) gelten.

Kurz gesagt:

> Die reellen Zahlen sind ein vollständiger, angeordneter, archimedischer Körper.

Hier noch eine praktische alternative Formulierung für Suprema und Infima:

Lemma 7.5. *Ist $s \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke für $A \subset \mathbb{R}$, so gilt $s = \sup A$ genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $a \in A$ gibt, so dass $s - \epsilon < a$ ist.*

Beweis.

Wir sollen hier eine Äquivalenz zeigen, nämlich, dass für eine obere Schranke s von A gilt:

$$s = \sup A \iff \forall \epsilon > 0 \exists a \in A : \ s - \epsilon < a.$$

Dafür zeigen wir die beiden Implikationen:

$\Rightarrow$: Sei $s = \sup A$ und $\epsilon > 0$. Da $s - \epsilon < s$ ist, ist nach dem zweiten Punkt der Definition des Supremums, $s - \epsilon$ kein Supremum von A. Also ist $s - \epsilon$ auch keine obere Schranke für A, und das heißt, dass es ein $a \in A$ geben muss, so dass $s - \epsilon < a$.

$\Leftarrow$: Nehmen wir nun an, dass die Aussage auf der rechten Seite gilt. Mit anderen Worten: s ist eine obere Schranke, aber für jedes $\epsilon > 0$ ist $s - \epsilon$ keine obere Schranke mehr. Anders gesagt: Jedes $b < s$ ist keine obere Schranke für A. Also ist s die kleinste solche, und das bedeutet $s = \sup A$.

□

Definition 7.6. Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *wachsend (bzw. fallend)*, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $a_{n+1} \geq a_n$ (bzw $\leq$) gilt. Sie heißt *streng wachsend (bzw. fallend)*, wenn $>$ statt nur $\geq$ gilt (bzw. $<$ statt nur $\leq$).

Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie wachsend oder fallend ist.

Satz 7.7. *Eine monotone und beschränkte Folge reeller Zahler ist konvergent.*

Beweis.
Wir nehmen an, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und beschränkt ist. Dann ist die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt und hat nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Supremum $a = \sup A$. Wir zeigen, dass a der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist: Sei $\epsilon > 0$. Nach Lemma 7.5 existiert ein Element in A, d.h. ein Folgenglied a_N, so dass $a - \epsilon < a_N$ gilt. Anders ausgedrück: Es gilt $a - a_N < \epsilon$ und da $a_N \leq a$ ist, folgt sogar $|a - a_N| < \epsilon$. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend ist, folgt für $n \geq N$ auch $a_n \geq a_N$, also gilt für diese n auch $0 \leq a - a_n \leq a - a_N \leq \epsilon$. Daraus folgt die Konvergenz $a_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend, so betrachte die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (welche dann wachsend ist). □

Der obige Satz kann auch die Konvergenz einer Folge zeigen, ohne dass der Grenzwert bekannt ist:

Beispiel.
Wir definieren für $n = 1,2,\ldots$

$$a_n = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n,$$

Diese Folge ist monoton wachsend: Mit der Bernoulli-Ungleichung (siehe Große Übung 1) folgt für $n \geq 1$

$$\Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big)^n = \Big(1 - \frac{1}{n^2}\Big)^n \geq 1 - n\frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

Es folgt

$$\frac{n-1}{n} \leq \Big(\frac{n^2+1}{n^2}\Big)^n = \Big(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\Big)^n.$$

Nun Multiplizieren wir diese Ungleichung mit $\big(\frac{n}{n-1}\big)^n$ (hier brauchen wir $n \geq 2$) und bekommen

$$\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^n \cdot \frac{n-1}{n} \leq \Big(\frac{n}{n-1}\Big)^n \cdot \Big(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\Big)^n.$$

Entsprechendes Kürzen ergibt

$$\Big(\frac{n}{n-1}\Big)^{n-1} \leq \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n$$

was die Behauptung zeigt.

Dass die Folge auch beschränkt ist, ist schwieriger einzusehen (siehe große Übung). Wenn man das aber hat, so folgt die Existenz der Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \approx 2{,}71818.$$

Der Wert der Grenzwertes ist keine rationale Zahl, sondern der Wert der Eulerschen Zahl e, die uns noch häufig begegnen wird. $\triangle$

8 Dichtheit, Kardinalität und Überabzählbarkeit

Es gibt viele weitere Möglichkeiten, die Vollständigkeit der reellen Zahlen durch ein Axiom zu beschreiben. Natürlich sind diese Definitionen in gewissem Sinne alle äquivalent. Wir geben noch eine weitere solche Möglichkeit an: Das sogenannte Intervallschachtelungsprinzip.

Im Buch "Analysis 1" von Forster wird zum Beispiel die Vollständigkeit mit Hilfe von Cauchy-Folgen eingeführt; wir bekommen den Begriff später.

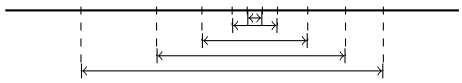
Wir bezeichnen die Länge (bzw. den Durchmesser, engl. *diameter*) des Intervalls $[a, b]$ mit

$$\operatorname{diam}([a, b]) := b - a.$$

Intervallschachtelungsprinzip: Es seien I_0, I_1, …eine Folge von absteigenden Intervallen in $\mathbb{R}$, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $I_{n+1} \subset I_n$ und es gelte

$$\operatorname{diam}(I_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Dann gibt es genau eine Zahl $x \in \mathbb{R}$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, dass $x \in I_n$.



Als erstes zeigen wir, dass das Intervallschachtelungsprinzip tatsächlich in $\mathbb{R}$ gilt.

Satz 8.1. *Das Intervallschachtelungsprinzip folgt aus dem Vollständigkeitsaxiom.*

Beweis.
Es sei $I_n = [a_n, b_n]$ eine Folge von Intervallen, die die Voraussetzungen des Intervallschachtelungsprinzips erfüllt. Wir betrachten nun die Menge $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, d.h. die unteren Intervallgrenzen der Intervalle. Diese Menge ist per Definition nicht leer, und sie ist auch nach oben beschränkt, denn für jedes n gilt $a_n \leq b_n \leq b_0$ und daher ist b_0 eine obere Schranke. Nach dem Vollständigkeitsaxiom gibt es also $x \in \mathbb{R}$ mit $x = \sup A$. Wir zeigen, dass x die einzige reelle Zahl ist, welche in allen I_n enthalten ist.

Da x eine obere Schranke für A ist, folgt $x \geq a_n$ für alle n. Da aber auch jedes b_n eine obere Schranke für A ist, folgt auch (da x die kleinste solche ist), dass $x \leq b_n$ für alle n gilt. Daher ist $x \in I_n$ für alle n.

Angenommen, es gäbe ein $y \in \mathbb{R}$, welches auch in allen I_n liegt. Das heißt, wir hätten $x, y \in I_n = [a_n, b_n]$ und insbesondere es würde folgen, dass $0 \leq |x - y| \leq \operatorname{diam}(I_n)$. Da aber $\operatorname{diam}(I_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt, muss $x = y$ sein. □

Beispiel.
Die Folge von Intervallen

$$I_n = [-2^{-n}, 2^{-n}]$$

erfüllt die Voraussetzungen den Intervallschachtelungsprinzips (da $2^{-(n+1)} \leq 2^{-n}$ gilt, folgt $I_{n+1} \subset I_n$ und außerdem gilt $\operatorname{diam}(I_n) = 2^{-n} - (-2^{-n}) = 2^{-n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, siehe Abschnitt 5). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \in I_n$. Tatsächlich ist 0 auch die einzige Zahl mit dieser Eigenschaft: Ist z.B. $x > 0$, so gibt es (wieder analog zu den Überlegungen aus Abschnitt 5) ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $2^{-n_0} < x$ und damit $x \notin I_{n_0}$. Genau so argumentiert man, dass es für jedes $x < 0$ ein solches n_0 gibt. △

Satz 8.2. *Für zwei reelle Zahlen a, b mit $a < b$ existiert eine rationale Zahl r, mit $a < r < b$.*

Die Aussage dieses Satzes drückt man auch aus, indem man sagt "$\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$", was bedeutet, dass es zu jeder reellen Zahl r und zu jeder $\epsilon > 0$ eine rationale Zahl q gibt, so dass $|r - q| \leq \epsilon$, das heißt, zu jeder reellen Zahl gibt es rationale Zahlen, die beliebig dicht dran liegen.
Das hat praktische Bedeutung: Im Computer lassen sich nur Zahlen darstellen, die mit endlich vielen Werten beschrieben werden. Insbesondere lassen sich alle rationalen Zahlen in Computer darstellen, da für die Darstellung von Zähler und Nenner nur jeweils endlich viele Daten benötigt werden (nur der Speicherplatz begrenzt also die Darstellbarkeit). Durch die Dichtheit der rationalen Zahlen wissen wir jetzt, dass man *jede reelle Zahl beliebig gut mit rationalen Zahlen approximieren kann.*

Beweis.
Um die Behauptung zu zeigen, müssen wir ein $m \in \mathbb{Z}$ und ein $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, so finden, dass

$$a < \frac{m}{n} < b.$$

Wir wählen zuerst n so groß, dass

$$\tfrac{1}{n} < b - a$$

gilt (und das geht nach dem Archimedischen Axiom). Als nächstes wählen wir $m \in \mathbb{Z}$ größtmöglich, sodass immer noch $m - 1 \leq na$ gilt, das heißt, es gilt auch $na < m$.

Wir behaupten, dass m/n dann wirklich zwischen a und b liegt. Aus $na < m$ folgt sofort $a < m/n$. Bleibt noch $m/n < b$ zu zeigen. Aus $m - 1 \leq na$ folgt

$$m \leq na + 1$$

und aus $1/n < b - a$ folgt $a < b - 1/n$ zusammen bekommen wir

$$m \leq na + 1 < n(b - \tfrac{1}{n}) + 1 = nb,$$

woraus $m/n < b$ folgt. □

Wir kommen nun zu einem etwas überraschenden Ergebnis: In gewissem Sinne gibt es viel mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen. Das ist auf den ersten Blick eventuell nicht intuitiv, da es von beiden unendlich viele gibt. Wir werden die Aussage aber präzise formulieren. Kommen wir zuerst zu einem Begriff, der besagt, wann zwei Mengen (nicht notwendigerweise endlich) "gleich groß" sind. Wir verwenden statt "Größe" einen neuen Begriff und dazu benötigen wir folgende wichtige Begriffe für Abbildungen.

Wir haben noch gar nicht definiert, was eine Abbildung ist: f ist eine Abbildung von A nach B, wenn es zu jedem $a \in A$ genau ein $f(a) \in B$ gibt. Man sagt auch: f ist links-total (alles wird abgebildet) und rechts-eindeutig (es gibt immer genau ein Bild).

Definition 8.3. Seien A und B zwei Mengen. Eine Abbildung $f : A \to B$ heißt

1. *surjektiv*, wenn sie *rechtstotal* sind, d.h.

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b,$$

Umgangssprachlich: Jedes $b \in B$ wird durch f erreicht.

2. *injektiv*, wenn sie *linkseindeutig* ist, d.h. für alle $a_1, a_2 \in A$ gilt

$$a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2),$$

Anders: Verschiedene Elemente werden nicht auf das gleiche abgebildet.

3. *bijektiv*, wenn sie surjektiv und injektiv ist.

Eine bijektive Abbildung nennt man auch *Bijektion*.

Man kann sich auch folgendes merken: f ist injektiv, wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes y höchstens eine Lösung hat, surjektiv, wenn sie mindestens eine Lösung hat, und bijektiv, wenn sie genau eine Lösung hat. Außerdem gilt: f ist genau dann bijektiv, wenn f umkehrbar.

Definition 8.4. Wir sagen, dass zwei Mengen A und B *die gleiche Kardinalität* haben, wenn es eine bijektive Abbildung $f : A \to B$ gibt. Wir schreiben in diesem Fall $A \sim B$.

Beispiel.

1. Wir zeigen, dass die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen und die Menge $2\mathbb{N} = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{0,2,4,\dots\}$ der geraden Zahlen die gleiche Kardinalität haben: Hier ist es einfach, eine bijektive Abbildung anzugeben, nämlich die Abbildung $f(n) = 2n$. Wir zeigen die Bijektivität ausführlich. Zur Surjektivität: Wir müssen zeigen, dass zu jedem $n \in 2\mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ existert, so dass $f(m) = n$ ist. Ist $n \in 2\mathbb{N}$, so gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $n = 2k$. Setzen wir also $m = k$, so bekommen wir $f(m) = 2m = 2k = n$, wie gewünscht. Zur Injektivität: Hiefür zeigt man meist einfacher die *Kontroposition*, nämlich dass aus $f(m) = f(n)$ immer $m = n$ folgt. Ist also $f(m) = f(n)$, so gilt $2m = 2n$ und es folgt $m = n$.

2. Auch die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen hat die gleich Kardinalität wie die natürlichen Zahlen: Wir geben auch hier explizit eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ an; wir definieren

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ -\frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

Am besten zeigen Sie selbst, dass das wirklich eine Bijektion ist.

△

Definition 8.5. Wir nennen eine Menge A

- *endlich*, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $A \sim \{1, \dots, n_0\}$,
- *abzählbar unendlich*, falls $A \sim \mathbb{N}$, und
- *überabzählbar*, wenn sie weder endlich , noch abzählbar unendlich ist.

Der Begriff *abzählbar* meint dann "endlich, oder abzählbar unendlich".

Satz 8.6. *i) Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.*

ii) Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

Beweis.
Zu i): Wir illustrieren die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ durch Angabe einer bijektiven Abbildung: Wir teilen die Menge $\mathbb{Q}$ in disjunkte Mengen auf, nämlich in die Mengen

$$A_n := \left\{\pm\tfrac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}_+ \quad p \text{ und } q \text{ gekürzt und } p+q=n\right\}.$$

(Die ersten Mengen sind $A_0 = \{0\}$, $A_1 = \{-1/1, 1/1\}$, $A_2 = \{-1/2, 1/2, -2/1, 2/1\}$.) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge A_n endlich und jedes rationale Zahl ist in genau einer dieser Mengen enthalten. Die Bijektion von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Q}$ funktioniert nun wie folgt: Wir schreiben die Elemente von $A_0, A_1, A_2, \ldots$ hintereinander und bilden $n \in \mathbb{N}$ auf die n-te Stelle der Liste ab:

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\mathbb{N} & : & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & \cdots \\
 & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
\mathbb{Z} & : & 0 & -\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{1} & \frac{2}{1} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{3}{1} & \cdots
\end{array}$$

Für die Abbildung lässt sich zwar nicht so einfach eine konkrete Formel angeben, aber es ist einfach einzusehen, dass jede rationale Zahl in der Liste vorkommt: Um zu sehen, wo die Zahl $\frac{3}{55}$ auftaucht, müssen wir nur wissen, dass $\frac{3}{55} \in A_{58}$ ist, und daher wird sie in der Liste auftauchen, da es nur endlich viele Elemente in den vorigen Mengen $A_0, \ldots, A_{57}$ gibt. Dass jede rationale Zahl nur einmal in der Liste steht, sieht man daran, dass die A_n paarweise disjunkt sind, d.h. eine Zahl die in A_n ist nicht in A_m wenn $m \neq n$ ist.

Zu ii): Wir führen einen Widerspruchsbeweis, d.h. wir nehmen an, es gäbe eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ und zeigen, dass daraus eine Widerspruch entsteht. Hätten wir eine solche bijektive Abbildung f, so könnten wir *alle* reellen Zahlen durchnummerieren, nämlich $x_0 := f(0)$, $x_1 := f(1)$,...

Jetzt konstruieren wir rekursiv eine Folge von Intervallen: Wir starten mit einem Intervall $I_0 = [a_0, b_0]$ welches x_0 nicht enthält. Dann finden wir immer ein Intervall $I_1 = [a_1, b_1]$ welches höchstens halb so lang ist wie I_0 (also $\operatorname{diam}(I_1) \leq \operatorname{diam}(I_0)/2$) und welches x_1 nicht enthält. Wir gehen weiter so vor: Haben wir I_n, so wählen wir I_{n+1} als abgeschlossenes Intervall in I_n welches x_{n+1} nicht enthält und $\operatorname{diam}(I_{n+1}) \leq \operatorname{diam}(I_n)/2$ erfüllt. Damit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ sowohl $I_{n+1} \subset I_n$ also auch $x_{n+1} \notin I_{n+1}$. Es folgt, dass für jedes x_{n_0} aus der Liste und jedes $n \geq n_0$ gilt, dass $x_{n_0} \notin I_n$. Es folgt, dass

$$x_{n_0} \notin \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N} : x \in I_n\}.$$

Da aber nach unserer Annahme jedes $x \in \mathbb{R}$ in der Liste vorkommt, folgt, dass

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n = \emptyset.$$

Andererseits erfüllen die Intervalle I_n die Voraussetzungen des Intervallschachtelungsprinzips, denn es gilt $I_{n+1} \subset I_n$ und $\operatorname{diam}(I_n) \leq 2^{-n} \operatorname{diam}(I_0) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Es gibt also ein reelle Zahl x^* (genau eine, aber das spielt keine Rolle), welche in allen I_n liegt, d.h. es gilt $x^* \in \bigcap_{n=0}^{\infty}$. Das ist ein Widerspruch dazu, das die Menge leer ist, und also war unsere Annahme, dass wir alle reellen Zahlen durchnummerieren können falsch. $\square$

9 Wurzeln

Wurzeln sind Lösungen von Gleichungen der Form $\alpha^k = x$ für $x \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}_+$. Auch für natürliche Zahlen x haben diese Gleichungen für $k \geq 2$ im allgemeinen keine Lösungen in den rationalen Zahlen.

Satz 9.1. *Ist $n \in \mathbb{Z}$, und $k \in \{2,3,4,\dots\}$, so gilt: Entweder ist $n = q^k$ für ein $q \in \mathbb{Z}$, oder es gibt kein $q \in \mathbb{Q}$ mit $n = q^k$.*

Anders ausgedrückt: Eine Lösung von $q^k = n$ für $n \in \mathbb{Z}$ ist entweder eine ganze Zahl oder nicht rational.

Beweis.
Angenommen, es wäre $n = q^k$ für ein $q \in \mathbb{Q}$. Dann gäbe es a, b, so dass $q = \frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ und wir könnten a und b als teilerfremd annehmen (sonst könnten wir den gemeinsamen Teiler kürzen).

Dann würde folgen, dass $n = a^k/b^k$ und also wäre $a^k/b = nb^{k-1}$. Die rechte Seite ist eine ganze Zahl, also wäre auch a^k/b eine ganze Zahl. Da aber a und b teilerfremd wären, wären auch a^k und b teilerfremd. Damit könnte a^k/b nur dann eine ganze Zahl sein, wenn $b = \pm 1$ gilt. Damit wäre aber a/b eine ganze Zahl. □

Es folgt insbesondere, dass es keine rationale q Zahl gibt, mit $q^2 = 2$. Mit Hilfe des Vollständigkeitsaxioms können wir aber zeigen, dass es eine *reelle Zahl* mit dieser Eigenschaft gibt:

Satz 9.2. *Es existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha^2 = 2$ gilt.*

Beweis.
Wir berachten die Menge

$$T = \{t \in \mathbb{R} \mid t^2 < 2\}.$$

Diese Menge ist nach oben beschränkt (da $1{,}5^2 = 2{,}25$ gilt und für $0 < a < b$ auch $a^2 < b^2$ gilt, ist $1{,}5$ größer als jedes Element in T). Wir setzen $\alpha = \sup T$ und zeigen, dass $\alpha^2 = 2$, indem wir zeigen dass sowohl $\alpha^2 < 2$ also auch $\alpha^2 > 2$ falsch sind.

Nehmen wir an, es wäre $\alpha^2 < 2$. Wir schauen, ob eventuell $\alpha + \frac{1}{n}$ noch in T liegt und dazu schätze wir (mit Hilfe von $1/n > 1/n^2$) ab

$$\left(\alpha + \tfrac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 + \tfrac{2\alpha}{n} + \tfrac{1}{n^2} < \alpha^2 + \tfrac{2\alpha}{n} + \tfrac{1}{n} = \alpha^2 + \tfrac{2\alpha+1}{n}. \qquad (*)$$

Wir sehen schon, dass die rechte Seite beliebig nahe an α^2 herankommen kann; wir müssen nur noch zeigen, dass die rechte Seite damit auch wirklich echt kleiner als 2 sein kann, wenn wir n groß genug wählen. Wählen wir $n > \frac{2\alpha+1}{2-\alpha^2}$, so folgt $\frac{2\alpha+1}{n} < 2 - \alpha^2$ (hier haben wir $2 - \alpha^2 > 0$ benutzt). Daraus folgt mit (*) $(\alpha + \frac{1}{n})^2 < 2$ und das bedeutet $\alpha + \frac{1}{n} \in T$ im Widerspruch zu $\alpha = \sup T$.

Nehmen wir nun an, dass $\alpha^2 > 2$. In diesem Fall schätzen wir ab

$$\left(\alpha - \tfrac{1}{n}\right)^2 = \alpha^2 - \tfrac{2\alpha}{n} + \tfrac{1}{n^2} > \alpha^2 - \tfrac{2\alpha}{n}. \qquad (**)$$

Ist nun $n > \frac{2\alpha}{\alpha^2-2}$, so folgt (da in diesem Fall $\alpha^2 - 2 > 0$ gilt) $\alpha^2 - 2 > \frac{2\alpha}{n}$ und aus (**) folgt dann, dass $\left(\alpha - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$ gilt. Das bedeutet aber, dass $\alpha - \frac{1}{n}$ ebenfalls eine obere Schranke für T ist und da $\alpha - \frac{1}{n} < \alpha$ gilt, ist das ein Widerspruch zu $\alpha = \sup T$. $\square$

Ein einfache Modifikation des Beweises zeigt, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$ eine Zahl $r > 0$ gibt, die $r^2 = x$ löst.

Höhere Wurzeln existieren ebenfalls. Der Beweis ist strukturell der gleiche, nur brauchen wir einerseits etwas bessere Abschätzungen und andererseits schreiben wir ihn etwas anders auf.

Zuerst eine einfache Identität und eine Abschätzung, die wir brauchen werden.

Lemma 9.3. *Für $a, b \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_+$ gilt*

$$b^k - a^k = (b-a)\big(b^{k-1} + b^{k-2}a + \cdots ba^{k-2} + a^{k-1}\big)$$

und für $0 < a < b$ gilt zusätzlich

$$b^k - a^k < (b-a)kb^{k-1}.$$

Beweis. Die erste Gleichung erhält man einfach, indem man die rechte Seite ausmultipliziert.

Für die Ungleichung bemerken wir dass aus $0 < a < b$ auch folgt, dass $a^l < b^l$ für alle $l \in \mathbb{N}_+$. Dann benutzen wir die erste Gleichung und schätzen in jedem Summanden rechts mit $a^l < b^l$ ab und bekommen

$$b^k - a^k < (b-a)\big(b^{k-1} + b^{k-2}b + \cdots + bb^{k-2} + b^{k-1}\big) = (b-a)kb^{k-1}.$$

$\square$

Satz 9.4. *Zu jedem $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und jedem $m \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ existiert ein positives $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $\alpha^k = x$.*

Beweis.
Auch hier versuchen wir es mit

$$\alpha = \sup T, \quad T := \{t \in \mathbb{R} \mid t^k < x\}.$$

Zuerst bemerken wir, dass $\alpha > 0$ gilt (0 liegt in der Menge, ist aber nicht das Supremum).

Wir zeigen wieder, dass weder $\alpha^k < x$ noch $\alpha^k > x$ gelten kann. Nehmen wir zuerst an, dass $\alpha^k < x$ gilt. Wir versuchen zu zeigen, dass es dann ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass $(\alpha + \epsilon)^k < x$ gilt.

Jetzt wählen wir ϵ so dass

$$0 < \epsilon < \tfrac{x - \alpha^k}{k(\alpha+1)^{k-1}} \quad \text{und} \quad \epsilon < 1.$$

Das ist möglich, da $x - \alpha^k > 0$ gilt und wir immer durch Verkleinerung auch $\epsilon < 1$ erreichen können. Die Abschätzung aus Lemma 9.3 mit $a = \alpha$ und $b = \alpha + \epsilon$ ergibt dann

$$\begin{aligned}(\alpha+\epsilon)^k - \alpha^k &< \epsilon k(\alpha+\epsilon)^{k-1}\\ &< \tfrac{x-\alpha^k}{k(\alpha+1)^{k-1}} k(\alpha+\epsilon)^{k-1}\\ &< \tfrac{x-\alpha^k}{(\alpha+1)^{k-1}} (\alpha+1)^{k-1} = x - \alpha^k.\end{aligned}$$

Das bedeutet aber $(\alpha+\epsilon)^k < x$ im Widerspruch zu $\alpha = \sup T$.

Nehmen wir jetzt an, dass $\alpha^k > x$ gilt. Hier setzen wir

$$\epsilon = \tfrac{\alpha^k - x}{k\alpha^{k-1}}$$

und bemerken, dass

$$0 < \epsilon < \frac{\alpha^k}{k\alpha^{k-1}} = \tfrac{\alpha}{k} < \alpha$$

gilt. Es folgt $\alpha - \epsilon > 0$ und wieder mit der Abschätzung aus Lemma 9.3 folgt

$$\alpha^k - (\alpha-\epsilon)^k < \epsilon k\alpha^{k-1} = \tfrac{\alpha^k - x}{k\alpha^{k-1}} k\alpha^{k-1} = \alpha^k - x.$$

Ziehen wir α^k auf beiden Seiten ab und multiplizieren wir -1 bekommen wir $(\alpha-\epsilon)^k > x$ was wieder im Widerspruch zu $\alpha = \sup T$ steht. □

Wir würden jetzt gerne k-te Wurzeln als Lösungen von Gleichungen $\alpha^k = x$ definieren, doch wir haben noch das Problem, dass wir nicht sagen können, ob es evtl. mehrere Lösungen gibt. Dass es genau eine Lösung gibt, wenn wir uns auf positive Lösungen einschränken sagt folgendes Lemma:

Satz 9.5. *Ist $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}_+$, so hat die Gleichung $\alpha^k = x$ höchstens eine positive Lösung α.*

Beweis.
Angenommen, α und β erfüllen beide $\alpha^k = x$ und $\beta^k = x$ und sind außerdem beide positiv. Dann sind alle Potenzen α^j und β^j, $j \in \mathbb{N}$ ebenfalls positiv und es gilt (mit der Gleichung aus Lemma 9.3)

$$0 = x - x = \beta^k - \alpha^k = (\beta-\alpha)\underbrace{\left(\beta^{k-1} + \beta^{k-2}\alpha + \cdots \beta\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1}\right)}_{>0}.$$

Daher muss $\beta - \alpha = 0$ sein, und das bedeutet $\beta = \alpha$. □

Definition 9.6. Für $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ und $k \in \mathbb{N}_+$ ist $\sqrt[k]{x}$ die eindeutige positive Lösung von $\alpha^k = x$.

Zu Quadratwurzeln bemerken wir noch, dass die Gleichung $x^2 = a$ mit $a > 0$ immer *zwei* Lösungen hat, nämlich $\sqrt{a}$ und $-\sqrt{a}$: Es gilt nämlich für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = a$

$$(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = x^2 - a = 0,$$

und daher muss einer der Faktoren gleich Null sein.

Um das Rechnen mit Wurzeln zu üben, hier ein paar Beispiele:

Beispiel.

1. Das ziehen der n-ten Wurzel ist monoton, d.h. ist $0 < x < y$, so ist $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$. Das sieht man wie folgt: Wir zeigen

$$\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y} \implies x > y$$

(woraus die Behauptung folgt). Ist $a = \sqrt[n]{x}$ und $b = \sqrt[n]{y}$, so ist $x = a^n$, $y = b^n$ und $a, b > 0$. Weiterhin ist wegen $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$ auch $a > b$ und es folgt (vgl. Satz 4.3) $a^n > b^n$. Das bedeutet aber $x > y$.

2. Jetzt zeigen wir, dass $\frac{1}{\sqrt{n}}$ gegen 0 konvergiert: Sei dazu $\epsilon > 0$. Dann gilt für $n > 1/\epsilon^2$:

$$|\tfrac{1}{\sqrt{n}}| < \epsilon$$

was die Behauptung zeigt.

3. Wir betrachten $a_n = \sqrt[n]{a}$ für ein $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$. Um zu zeigen, dass a_n gegen 1 konvergiert, zeigen wir die Abschätzung $\sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a}{n}$: Mit der Bernoulli-Ungleichung folgt $(1 + \frac{a}{n})^n \geq 1 + na/n = 1 + a \geq a$ und durch Ziehen der n-ten Wurzel folgt die Behauptung. Wir bekommen damit

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 \leq 1 + \tfrac{a}{n} - 1 = \tfrac{a}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

4. Wir wollen zeigen, dass $\sqrt[n]{n}$ ebenfalls gegen 1 konvergiert. Dafür reicht die Ungleichung aus dem vorigen Beispiel nicht aus, denn wir bekommen für $a = n$ nur $\sqrt[n]{n} \leq 1 + 1 = 2$ und es folgt nur $\sqrt[n]{n} - 1 \geq 1$. Wir benutzen den Binomischen Lehrsatz für $x \geq 0$ und bekommen

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \underbrace{1 + nx}_{\geq 0} + \binom{n}{2} x^2 + \underbrace{\cdots + x^n}_{\geq 0} \geq \tfrac{n(n-1)}{2} x^2.$$

Damit können wir für $n = 1, 2, \ldots$ abschätzen

$$\left(1 + \tfrac{2}{\sqrt{n}}\right)^n \geq \tfrac{n(n-1)}{2} \tfrac{4}{n} = 2(n-1) \geq n.$$

Es folgt

$$\sqrt[n]{n} \leq 1 + \tfrac{2}{\sqrt{n}}.$$

Damit können wir zeigen

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = \sqrt[n]{n} - 1 \leq 1 + \tfrac{2}{\sqrt{n}} - 1 = \tfrac{2}{\sqrt{n}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

△

10 Cauchy-Folgen und Häufungspunkte

Definition 10.1. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng wachsende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

D.h. es gilt $n_k \in \mathbb{N}$ und $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$

Beispiel.

1. Ist $a_n = (-1)^n$, so ist z.B. $a_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ eine Teilfolge (und es ist $n_k = 2k$).
2. Ist $a_n = 1/n$ so ist $a_{2^k} = 1/2^k = 2^{-k}$ eine Teilfolge (für $n_k = 2^k$).
3. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1,2,3,1,2,3,1,2,3,1,2,3,\dots)$ sind $(1,1,1,1,\dots), (2,2,2,2\dots), (1,2,1,2,1,2,\dots), (3,2,1,3,2,1,\dots)$ Teilfolgen.

$\triangle$

Satz 10.2 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.*

Beweis.
Da die Folge beschränkt ist, liegen alle Folgenglieder in einem Intervall $[A, B]$. Wir konstruieren jetzt eine Folge von Intervallen I_k mit den Eigenschaften:

i) In jedem I_k liegen noch unendlich viele Glieder der Folge.

ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $I_{k+1} \subset I_k$.

iii) $\operatorname{diam}(I_k) = 2^{-k} \operatorname{diam}(I_0)$.

Wir definieren zuerst $I_0 = [A, B]$ und dann rekursiv: Ist $k \in \mathbb{N}$ und $I_k = [A_k, B_k]$ schon konstruiert, so bezeichnen wir die Intervall-Mitte mit $M = (A_k + B_k)/2$. Da I_k unendlich viele Folgenglieder enthält, muss mindestens eine der beiden Intervall-Hälften $[A_k, M]$, $[M, B_k]$ ebenfalls unendlich viele Folgenglieder enthalten (es könnten auch beide sein). Wir nehmen also $I_{k+1} = [A_k, M]$, falls dies Intervall unendlich viele Folgenglieder enthält, sonst $I_{k+1} = [M, B_k]$. Man prüft einfach nach, dass die Bedingungen i) bis iii) erfüllt sind.

Insbesondere erfüllen die I_k die Voraussetzungen des Intervallschachtelungsprinzips, d.h. es existiert genau ein a, welches in allen I_k enthalten ist.

Wir konstruieren nun eine Teilfolge von (a_n), welche gegen a konvergiert: Die Konstruktion ist ebenfalls rekursiv und zwar so, dass immer $a_{n_k} \in I_k$ gilt. Wir wählen $n_0 = 0$, d.h. $a_{n_0} = a_0$. Sei nun $k \geq 1$ und $n_0, \dots, n_k$ schon gewählt. Dann enthält I_{k+1} unendlich viele Folgenglieder und daher können wir n_{k+1} als die kleinste natürliche Zahl wählen, so dass $n_{k+1} > n_k$ und $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$. Die Folge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen a, da nach Konstruktion $a_{n_k}, a \in I_k$ gilt und es folgt $|a_{n_k} - a| \leq 2^{-k} \operatorname{diam}(I_0)$. $\square$

Definition 10.3. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < \epsilon$.

Lemma 10.4. *Cauchy-Folgen sind beschränkt.*

Beweis.
Der Beweis geht ähnlich wie bei konvergenten Folgen: Wir nehmen $\epsilon = 1$ und folgern, dass es ein N gibt, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| < 1$. Insbesondere gilt für alle $n \geq N$ auch $|a_n - a_N| < 1$ und das heißt, für diese n gilt $a_n \in \,]a_N - 1, a_N + 1[$. Also ist die Folge nach oben durch $\max(a_{1,}, \dots, a_N, a_N + 1)$ und nach unten durch $\min(a_1, \dots, a_N, a_N - 1)$ beschränkt. □

Satz 10.5. *Eine reelle Folge ist konvergent, genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis.
Sei zuerst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Wir wollen zeigen, dass die Folge auch eine Cauchy-Folge ist. Sei dazu $\epsilon > 0$ und a der Grenzwert der Folge. Dann existiert ein N, so dass für $n \geq N$ gilt

$$|a_n - a| < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Dann gilt aber für alle $m, n \geq N$ auch, wegen der Dreiecksungleichung

$$|a_n - a_m| = |(a_n - a) - (a_m - a)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Sei nun umgekehrt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Nach Lemma 10.4 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ daher beschränkt und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, deren Grenzwert wir a nennen. Zeigen wir jetzt, dass die ganze Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$. Da $a_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$, existiert ein k_0, so dass für $k \geq k_0$ gilt, dass $|a_{n_k} - a| \leq \epsilon/2$. Da aber $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein N, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt $|a_n - a_m| \leq \epsilon/2$. Also gilt für alle $n \geq \max(N, n_{k_0})$ auch

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - a| \leq \tfrac{\epsilon}{2} + \tfrac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Definition 10.6. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es eine Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, welche gegen a konvergiert.

Mit diesem Begriff kann man den Satz von Bolzano-Weierstraß auch so formulieren: Jede beschränkte Folge hat einen Häufungspunkt.

Beispiel.

1. Jede konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert. (Das sollten Sie zur Übung einmal zeigen!)

2. Wir betrachten $a_n = (-1)^n$. Diese Folge hat zwei Häufungspunkte, nämlich -1 und 1. Dass dies beides Häufungspunkte sind, sieht man an den Teilfolgen $a_{2k} = 1$ und $a_{2k+1} = -1$. Dass jedes $a \neq 1, -1$ kein Häufungspunkt ist, sieht man z.B. daran, dass dann immer $|a - a_n| \geq \min(|a-1|, |a+1|)$ gilt.

3. Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ hat ebenfalls genau die Häufungspunkte -1 und 1, was man ähnlich einsieht (siehe Übung).

4. Die Folge
$$a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade}, \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade}, \end{cases}$$
ist unbeschränkt und hat genau einen Häufungspunkt, nämlich 0 (da $\lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0$).

5. Ist $N \in \mathbb{N}$, so hat die Folge $(1,2,\ldots,N,1,2,\ldots,N,1,2,\ldots,N,\ldots)$ genau N Häufungspunkte, nämlich die Zahlen $1,2,\ldots,N$.

$\triangle$

Für die folgenden Definition treffen wir noch eine Konvention: Ist $A \subset \mathbb{R}$ nicht nach oben beschränkt, so setzen wir $\sup A = +\infty$. Ist analog A nicht nach unten beschränkt, so setzen wir $\inf A = -\infty$.

Definition 10.7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann definieren wir den *Limes superior* als

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \sup\{a_k \mid k \geq n\}$$

und den *Limes inferior* als

Andere Schreibweisen für lim sup und lim inf sind $\overline{\lim}$ und $\underline{\lim}$.

$$\liminf_{n\to\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} \inf\{a_k \mid k \geq n\}.$$

Man beachte, dass die Folge $b_n := \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ fallend (oder konstant $+\infty$) und die Folge $c_n := \inf\{a_k \mid k \geq n\}$ wachsend (oder konstant $-\infty$) ist . Daher existieren $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$ immer, wenigstens als uneigenliche Grenzwerte, d.h. sie sind entweder reelle Zahlen, oder $\pm\infty$.

Beispiel.

1. Ist (a_n) wachsend und beschränkt, so ist (a_n) nach Satz 7.7 konvergent mit Grenzwert a. Außerdem ist $\sup\{a_k \mid k \geq n\} = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = a$ für alle k und daher ist $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$. Außerdem ist in diesem Fall $\inf\{a_k \mid k \geq n\} = a_n$ und es folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

2. Es sei $a_n = n$. Dann gilt

$$\sup\{a_k \mid k \geq n\} = \infty,$$
$$\inf\{a_k \mid k \geq n\} = n,$$

und es folgen $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$ und $\liminf_{n\to\infty} a_n = \infty$.

3. Wir betrachten $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$ für $n \geq 1$. Dann gilt

$$\sup\{a_k \mid k \geq n\} = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ 1 + \frac{1}{n+1}, & \text{falls } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Da $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $\frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, folgt $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$.
Entsprechend ist

$$\inf\{a_k \mid k \geq n\} = \begin{cases} -(1 + \frac{1}{n}), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ -(1 + \frac{1}{n+1}), & \text{falls } n \text{ gerade,} \end{cases}$$

und es folgt $\liminf_{n\to\infty} a_n = -1$.

$\triangle$ $\triangle$

Satz 10.8. *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $a \in \mathbb{R}$. Es gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$ genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt:*

i) für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < a + \epsilon$, und

ii) für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$ gilt $a_m > a - \epsilon$.

Man sagt "eine Eigenschaft $A(n)$ gilt für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$", falls

$$\forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : A(n) \text{ gilt.}$$

Beweis. Wir setzen $A_n := \{a_k \mid k \geq n\}$ und $b_n = \sup A_n$.

"$\Rightarrow$": Es gelte $\limsup_{n\to\infty} a_n = a$, also $\lim_{n\to\infty} b_n = a$. Sei $\epsilon > 0$. Dann gilt $b_n < a + \epsilon$ für alle n ab einem Index N. Daraus folgt *i)*, da $a_n \leq b_n$. Da b_n fallend ist, gilt $b_n \geq a$ für alle n. Aus der Charakterisierung des Supremums nach Lemma 7.5 folgt, dass es für jedes n ein $k \geq n$ gibt, so dass $a_k > b_n - \epsilon \geq a - \epsilon$, also gilt *ii)*.

"$\Leftarrow$": Seien umgekehrt die Bedingungen *i)* und *ii)* erfüllt. Aus *ii)* folgt, dass $b_n > a - \epsilon$ für alle n und alle $\epsilon > 0$. Wegen *i)* gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $a_n < a + \epsilon$ für alle $n \geq N$. Daraus folgt auch $b_n \leq a + \epsilon$ für diese n und insgesamt folgt $b_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

$\square$

Weitere Fakten zu Teilfolgen, lim sup und lim inf:

- Gilt $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$, so gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n$.
- Sind lim sup und lim inf einer Folge beide endlich und gleich, so konvergiert die Folge gegen diesen Wert.

- Gilt $\limsup_{n\to\infty} a_n = b$ (bzw. $\liminf_{n\to\infty} a_n = b$), so ist b ein Häufungspunkt der Folge (a_n).

11 Konvergenz von Reihen

Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so können wir die Folge

$$S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

bilden. Diese Folge heißt Folge der *Partialsummen* der (unendlichen) *Reihe* mit den Summanden a_n und wird mit dem Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Ist die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so wird mit dem Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ auch der Grenzwert der Folge (S_n) bezeichnet.

Anders ausgedrückt: Das Symbol $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ bezeichnet zwei Dinge:

1. Die Folge $\big(\sum_{k=0}^{n} a_k\big)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen, und
2. den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$ (falls der Grenzwert existiert).

Übrigens lässt sich jede Folge auch als Reihe schreiben: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, so setzt man $b_0 = a_0$ und für $k \geq 1$ dann $b_k = a_k - a_{k-1}$. Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} b_k &= b_n + b_{n-1} + \cdots b_1 + b_0\\ &= a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + a_1 - a_0 + a_0 = a_n.\end{aligned}$$

Wir haben folgendes Korollar aus Satz **??**:

Korollar 11.1. *Sind die beiden Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent und sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, so ist auch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \mu \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

Wende Satz **??** auf die Folgen $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ der Partialsummen an.

Beispiel.

1. Auf Übungsblatt 2 haben wir schon die geometrische Summe gesehen: Für $x \neq 1$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. Ist nun $|x| < 1$, so gilt $x^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, und daher konvergiert in diesem Fall die *geometrische Reihe* und hat den Wert

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}.$$

2. Unendliche Dezimalbrüche lassen sich als Reihen schreiben: Für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_+}$ mit $a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$ lässt sich der Dezimalbruch

$$0, a_1a_2a_3\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 10^{-k}.$$

bilden. So ist zum Beispiel

$$\begin{aligned} 0{,}2333\ldots &= 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + \cdots \\ &= 2\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2}(10^0 + 3\cdot 10^{-1} + \cdots) \\ &= \tfrac{2}{10} + \tfrac{3}{100}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{10}\right)^k \qquad \text{(Geometrische Reihe)} \\ &= \tfrac{2}{10} + \tfrac{3}{100}\tfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = \tfrac{2}{10} + \tfrac{3}{100}\tfrac{10}{9} = \tfrac{2}{10} + \tfrac{1}{30} \\ &= \tfrac{7}{30}. \end{aligned}$$

△

Satz 11.2 (Cauchy-Kriterium für Reihen)**.** *Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt*

$$\Big|\sum_{k=m}^{n} a_k\Big| \leq \epsilon.$$

Beweis.
Die Aussage ist genau die Tatsache, dass die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen eine Cauchy-Folge ist. □

Die Konvergenz von Reihen mit positiven Summanden ist einfach zu beschreiben:

Lemma 11.3. *Ist (a_n) eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen, so gilt: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ ist konvergent genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis.
Das folgt direkt aus dem Satz 7.7, da die Folge der Partialsummen wachsend ist, wenn die Summanden nicht-negativ sind. □

Satz 11.4. *Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Beweis.
Es sei $\epsilon > 0$. Nach Satz 11.2 gibt es ein N, so dass für $n \geq m \geq N$ gilt $|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \epsilon$. Insbesondere können wir $n = m$ nehmen und bekommen $|a_n| \leq \epsilon$, was die Behauptung zeigt. □

Korollar 11.5. *Gilt $a_n \not\to 0$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ nicht konvergent.*

Dass die Umkehrung von Satz 11.4 nicht gilt, sieht man an folgendem einfachen Beispiel:

Beispiel.
Wir betrachten die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \underbrace{\tfrac{1}{4}, \ldots, \tfrac{1}{4}}_{4\text{-mal}}, \ldots, \underbrace{\tfrac{1}{n}, \ldots, \tfrac{1}{n}}_{n\text{-mal}}, \ldots).$$

Betrachten wir die Partialsumme, die alle bis zum letzten $\frac{1}{n}$ aufsummiert (das sind die ersten $\frac{n(n+1)}{2}$ Folgenglieder, vgl. Abschnitt 2), so bekommen wir

$$S_{\frac{n(n+1)}{2}} = 1 + \overbrace{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}}^{=1} + \overbrace{\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}}^{=1} + \overbrace{\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}}^{=1} + \cdots + \underbrace{\tfrac{1}{n} + \cdots + \tfrac{1}{n}}_{=1} = n.$$

Also ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und daher ist die Folge nicht konvergent.

Ein weiteres wichtiges Beispiel ist die *harmonische Reihe*

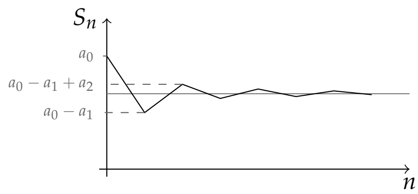
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

deren Summanden gegen Null gehen, welche aber nicht konvergiert. △

Nun ein Ergebnis für Reihen, deren Glieder *alternieren*, das heißt, deren Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind.

Satz 11.6 (Leibniz'sches Konvergenz-Kriterium). *Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen mit $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dann ist die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ konvergent.*

Die Beweisidee ist ganz einfach: Jeder Summand mit geradem Index vergrößert den Wert, die anderen verkleinern den Wert der Reihe. Der Wert der Partialsummen verhält sich wie folgt:



Es sieht aus, als würden die jeweils geraden Partialsummen eine fallende und die ungeraden Partialsummen eine wachsende Folge bilden, die jeweils beschränkt sind und deren Abstand gegen Null geht. Das würde die Konvergenz der Reihe bedeuten.

Beweis.

Wir formalisieren die Randbemerkung zu einem Beweis. Für die geraden Partialsummen $S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k$ gilt, da die Folge (a_n) fallend ist,

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \le 0.$$

Wir folgern also

$$S_0 \ge S_2 \ge S_4 \cdots \ge S_{2n} \ge S_{2n+2} \ge \cdots .$$

Analog gilt für die ungeraden Partialsummen $S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \ge 0$ und daher

$$S_1 \le S_3 \le \cdots \le S_{2n+1} \le S_{2n+3} \le \cdots .$$

Außerdem gilt $S_{2n} = S_{2n+1} + a_{2n+1} \ge S_{2n+1} \ge S_1$. Daher ist die Folge $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ fallend und nach unten beschränkt, also nach Satz 7.7 konvergent. Wir setzen also $S := \lim_{n\to\infty} S_{2n}$. Analog sieht man, dass die Folge $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, also auch konvergent und wir setzen $S' := \lim_{n\to\infty} S_{2n+1}$.

Jetzt betrachten wir die Differenz von S und S' und sehen (mit Satz **??**)

$$S - S' = \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0.$$

Zeigen wir noch, dass die ganze Reihe gegen S konvergiert: Zu $\epsilon > 0$ existieren N_1 und N_2, so dass für $n \ge N_1$ gilt $|S_{2n} - S| < \epsilon$ und für $n \geq N_2$ gilt $|S_{2n+1} - S| < \epsilon$. Dann gilt für $n \geq \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ immer $|S_n - S| < \epsilon$. □

Gelten die Voraussetzungen des Leibniz'schen Konvergenzkriteriums, so kann man aus dem Beweis ablesen, dass die folgende Abschätzung für den Abstand zum Wert der Reihe:

$$|\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k| \leq a_{n+1}. \tag{*}$$

Beispiel.

1. Die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ konvergiert nach dem Leibniz'schen Konvergenzkriterium (die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist eine positive und fallende Nullfolge). Der Wert der Reihe ist

$$1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots = \log(2) \approx 0{,}6931\ldots$$

(was wir erst viel später zeigen können). Wollen wir den Wert $\log(2)$ damit bis auf 3 Nachkommastellen genau bestimmen, also bis auf $\epsilon = 10^{-3}$, so brauchen wir nach der Fehlerabschätzung (*) n Summanden, so dass $a_{n+1} < 10^{-3}$ gilt. Da $a_n = 1/n$, sind das also 1 000 Summanden. Für 4 Nachkommastellen sind es schon 10 000 Summanden. Tatsächlich ist $S_{1000} \approx 0{,}69265$ und $S_{10000} \approx 0{,}693097$.

2. Auch die *Leibniz'sche Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ konvergiert nach den Leibniz'schen Kriterium. Ihr Wert ist

$$1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \cdots = \tfrac{\pi}{4}$$

was wir auch erst viel später zeigen können.

△

12 Absolute Konvergenz von Reihen

Definition 12.1. Eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, falls die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

Beispiel.

1. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ ist für $|q| < 1$ absolut konvergent, da in diesem Fall die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |q|^k$ konvergent ist.

2. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ ist konvergent (nach dem Leibniz-Kriterium, Satz 11.6), aber nicht absolut konvergent, denn die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |\frac{(-1)^k}{k}| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ der Beträge ist die harmonische Reihe, welche divergiert (vgl. große Übung 6).

△

Satz 12.2. *Ist eine Reihe absolut konvergent, so ist sie auch konvergent.*

Beweis.
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine absolut konvergente Reihe und sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es nach dem Cauchy-Kriterium (Satz 11.2) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon.$$

Dann gilt aber (wegen der Dreiecksungleichung) für diese n, m auch

$$|\sum_{k=m}^{n} a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \epsilon,$$

was die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ zeigt. □

Dass die Umkehrung der Aussage des Satzes nicht gilt, haben wir schon im Beispiel oben gesehen.

Satz 12.3 (Majoranten-Kriterium). *Es sei $c_k \geq 0$ für alle k und $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ konvergent. Dann gilt: Ist $|a_k| \leq c_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.*

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt in diesem Fall eine *konvergente Majorante* für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Beweis.
Wir zeigen die Konvergenz mit dem Cauchy-Kriterium (Satz 11.2. Es sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq m \geq N$ gilt $|\sum_{k=m}^{n} c_k| < \epsilon$. Dann gilt für diese m, n auch

$$\sum_{k=m}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=m}^{n} c_k < \epsilon,$$

was sie absolute Konvergenz zeigt. □

Beispiel.

Zeigen wir die Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-\sqrt{k}}$: Wir suchen eine konvergente Majorante, indem wir den Zähler vergrößern. Für $k \geq 1$ gilt $\sqrt{k} \leq k$ und für $k \geq 2$ auch $2k \leq k^2$. Zusammen bekommen wir

$$\sqrt{k} \leq k \leq \tfrac{1}{2}k^2.$$

Damit haben wir auch

$$\frac{1}{k^2-\sqrt{k}} \leq \frac{1}{k^2-\frac{1}{2}k^2} = \frac{2}{k^2}$$

und da $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{k^2}$ konvergiert, konvergiert auch $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-\sqrt{k}}$ absolut. $\triangle$

Korollar 12.4 (Minoranten-Kriterium). *Ist $c_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ divergent, so gilt: Ist $a_k \geq c_k$ für alle k, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent.*

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt in diesem Fall eine *divergente Minorante* für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.

Anderfalls wäre $\sum a_k$ eine konvergente Majorante für $\sum c_k$ und daher müsste $\sum c_k$ konvergieren,

Beispiel.

Wir betrachten $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k-\sqrt{k}}$. Da $k - \sqrt{k} \leq k$ gilt, haben wir mit $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ eine Minorante gefunden, was die Divergenz zeigt. $\triangle$

Nun zwei Kriterien, die im Wesentlichen eine Anwendung des Majoranten-Kriteriums mit der geometrischen Reihe sind:

Satz 12.5 (Quotientenkriterium). *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe mit $a_k \neq 0$ für alle $k \geq k_0$. Dann gilt: Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls es eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt*

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta.$$

Gilt hingegen $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ für $k \geq k_0$, so ist die Reihe divergent.

Beweis.

Da wir endlich viele Summanden einer Reihe abändern können, ohne das Konvergenzverhalten der Reihe zu ändern, können wir annehmen, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \theta$. Damit folgt

$$|a_k| \leq \theta|a_{k-1}| \leq \theta^2|a_{k-2}| \leq \cdots \leq \theta^k|a_0|.$$

Das heißt, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_0|\theta^k$ eine Majorante für $\sum a_k$ ist. Dies ist aber eine geometrische Reihe, deren Konvergenz wir in Abschnitt 11 gesehen haben.

Ist $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \geq 1$ für $k \geq k_0$, so gilt für diese k auch $|a_k| \geq |a_{k_0}|$. Das heißt, (a_k) ist keine Nullfolge, und daher kann die Reihe nicht konvergieren. $\square$

Beispiel.

Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$, also die Summanden $a_k = k^2/2^k$. Es gilt

$$|\tfrac{a_{k+1}}{a_k}| = \tfrac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \tfrac{2^k}{k^2} = \left(\tfrac{k+1}{k}\right)^2 \tfrac{1}{2}.$$

Da $(k+1)/k$ fallend ist, gilt für $k \geq 3$, dass $\left(\frac{k+1}{k}\right)^2 \leq \left(\frac{4}{3}\right)^2 \leq \frac{16}{9}$. Es folgt für $k \geq 3$:

$$|\tfrac{a_{k+1}}{a_k}| \leq \tfrac{16}{9} \cdot \tfrac{1}{2} < 1$$

und daher ist die Reihe absolut konvergent. △

Satz 12.6 (Wurzelkriterium)**.** *Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut, falls es eine reelle Zahl θ mit $0 < \theta < 1$ gibt, so dass für alle $k \geq k_0$ gilt*

$$\sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta.$$

Gilt hingegen $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für $k \geq k_0$, so ist die Reihe divergent.

Beweis.

Wiederum nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass $\sqrt[k]{|a_k|} \leq \theta$ für alle k gilt. Dann gilt aber auch $|a_k| \leq \theta^k$ und die absolute Konvergenz folgt wieder aus dem Majorantenkriterium.

Ist $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$, so gilt $|a_k| \geq 1$, und daher kann (a_k) keine Nullfolge sein. □

Beispiel.

Betrachten wir $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k}{2^k+5^k}$. Wir verwenden das Wurzelkriterium und schätzen ab:

$$\sqrt[k]{\tfrac{4^k}{2^k+5^k}} \leq \sqrt[k]{\tfrac{4^k}{5^k}} = \tfrac{4}{5} < 1$$

und daher konvergiert die Reihe absolut. (Hier würde natürlich auch das Majoranten-Kriterium direkt funktionieren, da $\frac{4^k}{2^k+5^k} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$.) △

Mit Hilfe des lim sup können wir das Quotienten- und Wurzelkriterium anders formulieren:

Korollar 12.7. *Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Gilt dann*

$$\limsup_{k\to\infty} |\tfrac{a_{k+1}}{a_k}| < 1 \quad \textit{oder} \quad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} < 1,$$

so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut. Gilt $\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so divergiert die Reihe.

Gilt $\limsup_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1$, so gibt es nach Satz 10.8 ein $\epsilon > 0$, so dass $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1-\epsilon$ ab einem Index k_0. Daher gilt die Voraussetzung von Satz 12.5 mit $\theta = 1-\epsilon$. Ebenso argumentiert man, dass auch $\sqrt[k]{|a_k|} < 1-\epsilon$ gilt und daher die Voraussetzung von Satz 12.6 gilt. Gilt $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} > 1$, so gilt $\sqrt[k]{a_k} \geq 1$ unendlich oft, insbesondere auch $|a_k| \geq 1$ unendlich oft. Daher kann (a_k) keine Nullfolge sein.

Mach beachte, dass sowohl aus $\limsup_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ als auch aus "$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| > 1$ unendlich oft" nicht unbedingt die Divergenz der Reihe folgt:

Beispiel.

Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{3^k}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Wir werden das Wurzelkriterium an: Es gilt

$$\sqrt[k]{a_k} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{3}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daher gilt

$$\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \tfrac{1}{2}$$

und also konvergiert die Reihe absolut. Für das Quotienenkriterium hingegen bekommen wir

$$|\tfrac{a_{k+1}}{a_k}| = \begin{cases} \frac{3^{-(k+1)}}{2^{-k}}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{2^{-(k+1)}}{3^{-k}}, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

In diesem Fall gilt sogar $\limsup_{k\to\infty}|\frac{a_{k+1}}{a_k}| = +\infty$, aber die Reihe konvergiert trotzdem absolut. △

Beispiel.

Betrachten wir die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k}$ für $k = 1,2,\ldots$. Mit dem Quotientenkriterium bekommen wir für jeden Exponenten k

$$|\tfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^k \xrightarrow{n\to\infty} 1,$$

und wir sehen, dass das Quotientenkriterium weder die Konvergenz für $k \geq 2$, noch die Divergenz für $k = 1$ erkennen kann. Das gleiche gilt für das Wurzelkriterium, denn hier ist

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^k}} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^k} \xrightarrow{n\to\infty} 1.$$

△

13 Die komplexen Zahlen

Neben dem Körper der reellen Zahlen gibt es noch einen weiteren wichtigen Körper in der Analysis, nämlich den Körper der komplexen Zahlen.

Es sei $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Menge alle Paare (x, y) von reellen Zahlen. Auf diesen Paaren definieren wir eine Addition und eine Multiplikation wie folgt:

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) + (x_2, y_2) &:= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\\ (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) &:= (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2),\end{aligned}$$

wobei auf der rechten Seite die übliche Addition und Multiplikation von reellen Zahlen gemeint ist.

Man kann zeigen, dass damit alle Körperaxiome erfüllt sind: Das Nullelement ist $(0,0)$, und das Einselement ist $(1,0)$. Die additiv Inversen sind $-(x, y) = (-x, -y)$ und wegen

$$(x, y) \cdot \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1,0)$$

für $(x, y) \neq 0$ folgt, dass die multiplikativ Inversen gegeben sind durch

$$(x, y)^{-1} = \left(\tfrac{x}{x^2+y^2}, \tfrac{-y}{x^2+y^2}\right).$$

Kommutativität von Addition und Multiplikation sieht man direkt, und auch die Assoziativität für die Addition sieht man schnell. Für die Assoziativität der Multiplikation rechnet man:

$$\begin{aligned}&\Big((x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2)\Big) \cdot (x_3, y_3) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 - x_2y_1) \cdot (x_3, y_3)\\ &= \Big((x_1x_2 - y_1y_2)x_3 - (x_1y_2 + y_1x_2)y_3, (x_1x_2 - y_1y_2)y_3 + (x_1y_2 + x_2y_1)x_3\Big).\end{aligned}$$

Andersherum geklammert ergibt sich

$$\begin{aligned}&(x_1, y_1) \cdot \Big((x_2, y_2) \cdot (x_3, y_3)\Big) = (x_1, y_1) \cdot (x_2x_3 - y_2y_3, x_2y_3 + y_2x_3)\\ &= \Big(x_1(x_2x_3 - y_2y_3) - y_1(x_2y_3 + y_2x_3), x_1(x_2y_3 + y_2x_3) + y_1(x_2x_3 - y_2y_3)\Big)\end{aligned}$$

und man erkennt, dass beide rechten Seiten gleich sind. Die Prüfung des Distributivgesetzes ist ebenfalls nicht schwer.

Diesen Körper nennt man den *Körper der komplexen Zahlen* und er wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. In gewissem Sinne sind die reellen Zahlen ein "Unterkörper" der komplexen Zahlen. Es gilt nämlich für komplexe Zahlen $(x,0)$ (also die, deren zweite Komponente gleich Null ist):

$$\begin{aligned}(x_1,0) + (x_2,0) &= (x_1 + x_2,0)\\ (x_1,0) \cdot (x_2,0) &= (x_1x_2,0),\end{aligned}$$

d.h. diese Zahlen verhalten sich unter der Addition und Multiplikation in den komplexen Zahlen genau so, wie die reellen Zahlen.

Daher kann man eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ mit der komplexen Zahl $(x,0) \in \mathbb{C}$ identifizieren.

Für die spezielle komplexe Zahl $(0,1) \in \mathbb{C}$ gilt

$$(0,1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0).$$

Anders ausgedrückt: Die komplexe Zahl $(0,1)$ ist eine Lösung der Gleichung $z^2 = -1$. Das ist aus zwei Gründen bemerkenswert: Einerseits hat diese Gleichung keine reelle Lösung. Andererseits gilt für jeden angeordneten Körper immer $x^2 \geq 0$ und insbesondere $1 \geq 0$. Wir sehen also schon: Die komplexen Zahlen können nicht mit einer Ordnung ausgestattet werden, so dass die Ordnungsaxiom aus Abschnitt 4 gelten.

Die komplexe Zahl $(0,1)$ hat den (etwas irreführenden) Namen *imaginäre Einheit* und wir bezeichnet mit

$$i := (0,1).$$

Mit der Identifikation $1 = (1,0)$ können wir also schreiben

$$i^2 = -1.$$

Mit Hilfe der imaginären Einheit können wir komplexe Zahlen auch wie folgt schreiben: ein $z = (x,y) \in \mathbb{C}$ ist

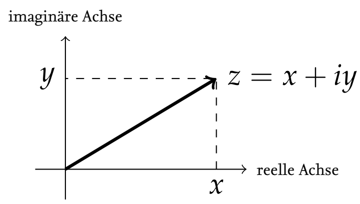
$$z = (x,y) = (x,0) + (0,1)(y,0) = x + iy.$$

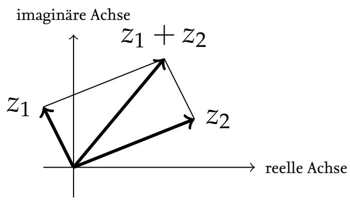
Mit dieser Schreibweise und der Rechenregel $i^2 = -1$ kann man sich die Definitionen von Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen leicht wieder selbst herleiten, indem man $(x + iy)(u + iw)$ ausmultipliziert und $(x + iy) + (u + iw)$ zusammenfasst.

Die reellen Zahlen x und y nennt man dann *Realteil* bzw. *Imaginärteil* von z und schreibt

$$\operatorname{Re}(z) := x, \quad \operatorname{Im}(z) := y.$$

Man visualiert die komplexen Zahlen in der *Gauß'schen Zahlenebene* und die Addition entspricht der Addition von Vektoren im $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:



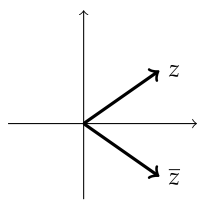


Man bemerke, dass zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 genau dann gleich sind, wenn $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$ und $\operatorname{Im}(z_1) = \operatorname{Im}(z_2)$ gelten.

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ definiert man die *komplex konjugierte* Zahl durch

$$\bar{z} := x - iy.$$

In der Gauß'schen Zahlenebene ist die Konjugation eine Spiegelung an der reellen Achse:



Mit Hilfe der komplexen Konjugation schreibt man auch

$$\operatorname{Re}(z) = x = \tfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im}(z) = y = \tfrac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Lemma 13.1. *Für zwei komplexe Zahlen $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

i) $\overline{\overline{z}} = z$,

ii) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,

iii) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

Beweis.
Man rechnet einfach nach: Sei $z = x + iy$, $w = u + iv$, $(x, y, u, v \in \mathbb{R})$, so ist

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{z}} &= \overline{\overline{x + iy}} = \overline{x - iy} = x + iy = z\\
\overline{z + w} &= \overline{x + iy + u + iv} = \overline{(x + u) + i(y + v)} = (x + u) - i(y + v)\\
&= x - iy + u - iv = \overline{z} + \overline{w}\\
\overline{z \cdot w} &= \overline{(x + iy)(u + iv)} = \overline{xu - yv + i(xv + yu)}\\
&= xu + yv - i(xv + yu) = (x - iy) \cdot (u - iv) = \overline{z} \cdot \overline{w}.
\end{aligned}$$

□

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ gilt übrigens immer

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$\mathbb{R}_{\geq} := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ ist eine Möglichkeit, die nicht-negativen reellen Zahlen zu bezeichnen.

Obwohl die komplexen Zahlen nicht angeordnet werden können, definieren wir einen Betrag. Dazu nehmen wir die geometrische Länge des Vektors in der Gaußschen Zahlenebene:

Definition 13.2. Der *Betrag* einer komplexen Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Mit Hilfe von Konjugation und Betrag kann man sich leicht die Formel für die multiplikativ Inversen herleiten: Es gilt $z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1$, also ist

$$z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Dieser Betrag erfüllt die gleichen Rechenregeln wie der Absolutbetrag im reellen:

Satz 13.3. *Es gilt:*

1. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z| \geq 0$ und außerdem gilt $|z| = 0$ genau dann, wenn $z = 0$.*
2. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z \cdot w| = |z||w|$.*
3. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $|z + w| \leq |z| + |w|$.*

Beweis.
Aussage i) folgt direkt aus $|z|^2 = x^2 + y^2$ und Aussage ii) folgt aus

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Für Aussage iii) bemerken wir zuerst, dass immer $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ gilt und damit folgt

$$\begin{aligned}|z+w|^2 = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) &= z\overline{z} + \underbrace{z\overline{w} + w\overline{z}}_{z\overline{w}+\overline{z\overline{w}}} + w\overline{w}\\ &= |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{w}) + |w|^2\\ &\leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z|+|w|)^2\end{aligned}$$

woraus durch Ziehen der Wurzel die Behauptung folgt. □

Mit Hilfe des Betrages können wir alle Definitionen und Ergebnisse für konvergente Folgen wortwörtlich für komplexe Folgen übertragen:

Definition 13.4. Eine komplexe Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *konvergent* mit Grenzwert $a \in \mathbb{C}$, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N : \ |a_n - a| \leq \epsilon$$

und *Cauchy-Folge*, falls

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}\, \forall m,n \geq N : \ |a_n - a_m| \leq \epsilon.$$

Konvergenz von komplexen Folgen $a_n = x_n + iy_n$ ist nichts anderes als Konvergenz von Real- und Imaginärteil:

Satz 13.5. *Eine Folge (a_n) komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn die beiden Folgen $(\mathrm{Re}(a_n))$ und $(\mathrm{Im}(a_n))$ konvergieren und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Re}(a_n) + i \lim_{n\to\infty} \mathrm{Im}(a_n).$$

Beweis. Wir schreiben im Beweis $a_n = x_n + iy_n$ und $a = x + iy$.

“⇒”: Gelte $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. Dann gilt

$$0 \leq |x_n - x| \leq |a_n - a| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad 0 \leq |y_n - y| \leq |a_n - a| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und daher folgt $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$.

“⇐”: Andersherum bemerken wir

$$0 \leq |a_n - a| = |x_n - x + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + \underbrace{|i(y_n - y)|}_{=|y_n - y|} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und es folgt $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

□

Ähnlich einfach erhält man folgende Fakten:

- Es komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.

- Die Grenzwertsätze für Folgen, das Majoranten- und Minoranten-Kriterium (mit reellen Majo- bzw. Minoranten), das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium gelten entsprechend für komplexe Folgen bzw. Reihen.

- Beschränkte Folgen $\mathbb{C}$ haben Häufungspunkte, bzw. konvergente Teilfolgen (dies ist eine Konsequenz aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß, angewandt auf Real- und Imaginärteil).

Eine komplexe Folge (a_n) heißt beschränkt, wenn es ein C gibt, so dass für alle n gilt $|a_n| \leq C$.

14 Die Exponentialreihe

Satz 14.1. *Für jedes $z \in \mathbb{C}$ ist die Reihe*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent.

Beweis.
Wir benutzen das Quotientenkriterium für die Summanden $a_n = z^n/n!$: Für jedes $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$0 \leq \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}n!}{(n+1)!z^n}\right| = \left|\frac{z}{n+1}\right| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Also gilt $\limsup_{n\to\infty}|a_{n+1}/a_n| = 0 < 1$ und daher konvergiert die Reihe absolut. □

Die *Euler'sche Zahl* ist definiert als

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx 2{,}718128.$$

Eine alternative Definition ist $e = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

Die Exponentialreihe hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z+w) = \exp(z)\cdot\exp(w)$. Um dies zu zeigen, beweisen wir einen Satz über Konvergenz und Wert des Produktes von zwei Reihen:

Satz 14.2 (Cauchy-Produkt von Reihen). *Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ zwei absolut konvergente Reihen mit komplexen oder reellen Summanden. Weiterhin definieren wir die Folge*

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0.$$

Das ist die Summe der Summanden $a_k b_l$, so dass sich die Indizes zu n aufsummieren.

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\Big). \qquad (*)$$

Beweis.
Wir definieren die Partialsummen der Reihe über die c_n als

$$C_N := \sum_{n=0}^{N} c_n = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{k-n}.$$

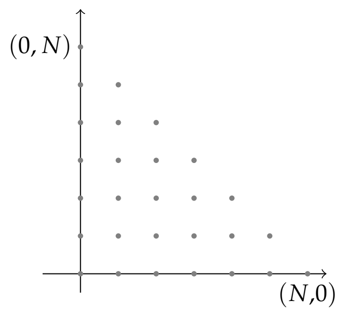
Das schreiben wir etwas anders: Wir definieren eine Menge von Index-Paaren

$$\Delta_N := \{(k,l) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid k+l \leq N\}$$

und bemerken

$$C_N = \sum_{(k,l)\in\Delta_N} a_k b_l.$$

Die Menge Δ_N sind die grauen Punkte in diesem Bild:



Nun multiplizieren wir die Partialsummen A_N und B_N der Reihen über a_n und b_n:

$$A_N B_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \sum_{n=0}^{N} b_n = \sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} a_k b_l.$$

Um das ähnlich zur Darstellung von C_N zu schreiben, definieren wir eine andere Menge von Indexpaaren:

$$Q_N := \{(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 0 \le k \le N, 0 \le l \le N\}.$$

Damit ist

$$A_N B_N = \sum_{(k,l) \in Q_N} a_k b_l.$$

Damit ist die Differenz von C_N und $A_N - B_N$

$$A_N B_N - C_N = \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_l.$$

Wir betrachten die Partialsummen der Absolutbeträge

$$A_N^* = \sum_{n=0}^{N} |a_n|, \quad B_N^* = \sum_{n=0}^{N} |b_n|$$

und bekommen analog

$$A_N^* B_N^* = \sum_{(k,l) \in Q_N} |a_k||b_l|.$$

Jetzt wollen wir abschätzen und bemerken dazu, dass $Q_{\lfloor N/2 \rfloor} \subset \Delta_N$ gilt.

In Worten: die Indexpaare (k,l), bei denen k und l jeweils kleiner als $N/2$ ist, haben eine Summe $k+l$ kleiner gleich N.

Also gilt $Q_N \setminus \Delta_N \subset Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}$. Wir bekommen

$$|A_N B_N - C_N| \le \sum_{(k,l) \in Q_N \setminus Q_{\lfloor N/2 \rfloor}} |a_k||b_l| = A_N^* B_N^* - A_{\lfloor N/2 \rfloor}^* B_{\lfloor N/2 \rfloor}^*.$$

Da die Folge $(A_N^* B_N^*)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, ist die Differenz auf der rechten Seite eine Nullfolge.

Dies sieht man z.B so: Sei $\epsilon > 0$. Da $A_N^* B_N^*$ eine Cauchy-Folge ist, gibt es ein N_0, so dass für $N, M \ge N_0$ gilt, dass $|A_N^* B_N^* - A_M^* B_M^*| < \epsilon$. Also gilt für alle N mit $\lfloor N/2 \rfloor \ge N_0$ auch $|A_N^* B_N^* - A_{\lfloor N/2 \rfloor}^* B_{\lfloor N/2 \rfloor \rfloor^*}| < \epsilon$.

Also folgt, ss die Folge (C_N) konvergiert und den gleichen Grenzwert wie die Folge $(A_N B_N)$ hat:

$$\lim_{N \to \infty} C_N = \lim_{N \to \infty} A_N B_B = \lim_{N \to \infty} A_N \lim_{N \to \infty} B_N.$$

Die zeigt die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ und auch die Formel (*).

Zeigen wir noch, dass die Reihe $\sum c_n$ absolut konvergiert: Dazu bemerken wir nur, dass gilt

$$|c_n| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k||b_{n-k}|$$

und wir können die Konvergenz von $\sum|c_n|$ genau wie oben zeigen, indem wir die gleiche Argumentation auf $\sum|a_n|$ und $\sum|b_n|$ anwenden. $\square$

Satz 14.3. *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

Beweis.
Wir bilden das Cauchy-Produkt aus $\sum z^n/n!$ und $\sum w^n/n!$:

$$\begin{aligned}\exp(z)\exp(w) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{z^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{w^k}{k!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \tfrac{z^k}{k!} \tfrac{w^{n-k}}{(n-k)!}.\end{aligned}$$

Nach dem Binomische Lehrsatz bekommen wir

$$\sum_{k=0}^{n} \tfrac{z^k}{k!} \tfrac{w^{n-k}}{(n-k)!} = \tfrac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \tfrac{1}{n!}(z+w)^n.$$

Zusammen mit der Gleichung davor bekommen wir

$$\exp(z)\exp(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w).$$

$\square$

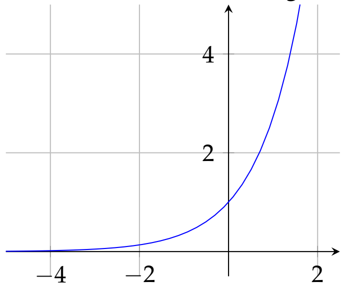
Satz 14.4. *i) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(z) \neq 0$ und $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$.*

ii) Für $x \in \mathbb{R}$ ist $\exp(x) \in \mathbb{R}$ und es gilt $\exp(x) > 0$.

iii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$.

iv) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$

Graph der Exponentialfunktion für reelle Argumente:



Beweis.
Zu i): Zuerst sehen wir $\exp(0) = 1$ und dann bemerken wir

$$1 = \exp(0) = \exp(z-z) = \exp(z)\exp(-z).$$

Das zeigt $\exp(z) \neq 0$ und auch $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

Zu ii): Für reelles $x > 0$ hat die Reihe für $\exp(x)$ nur reelle und positive Summanden und also gilt $\exp(x) > 0$. Für $x < 0$ gilt $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.

Zu iii): Für $n \in \mathbb{N}$ folgt die Behauptung rekursiv: Es gilt $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e$ und $\exp(n+1) = \exp(n)\exp(1) =$

$\exp(n)e$.

Außerdem gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\exp(-n) = \tfrac{1}{\exp(n)} = \tfrac{1}{e^n} = e^{-n}$$

was die Behauptung für alle $n \in \mathbb{Z}$ zeigt.

Zu iv): Nach den Rechenregeln für Konjugation gilt $\overline{\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\bar{z}^k}{k!}$ woraus die Behauptung folgt. $\square$

15 Punktmengen und Funktionen

Wir wollen uns eingehender mit Teilmengen der reellen Achse beschäftigen. Zusätzlich zu den schon bekannten offenen, abgeschlossenen und halboffenen Intervallen führen wir noch die *uneigentlichen Intervall* ein:

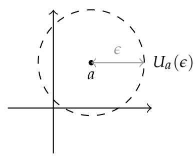
$$\begin{aligned}
[a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\} \\
]a, +\infty[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\} \\
]-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} \\
]-\infty, a[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}.
\end{aligned}$$

Zu $a \in \mathbb{R}$ und $\epsilon > 0$ erinnern wir noch an den Begriff der ϵ-Umgebung:

$$U_\epsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \epsilon\} =]a - \epsilon, a + \epsilon[.$$

Auch in $\mathbb{C}$ können wir ϵ-Umgebungen definieren: Zu $a \in \mathbb{C}$ ist

$$U_\epsilon(a) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < \epsilon\}$$



Dann machen wir noch einmal auf den Unterschied von Folgen und Mengen aufmerksam: Zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können wir die Menge der Folgenglieder $M = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ definieren. Ein wichtiger Unterschied zwischen der Folge und der Menge der Folgenglieder ist, dass die Glieder einer Folge geordnet sind, d.h. es gibt es erstes, ein zweites Folgenglied, usw. In der Menge der Folgenglieder gibt es keine Ordnung. Außerdem kann es vorkommen, dass die Menge der Folgenglieder nur endlich viele Elemente enthält. Und zu guter Letzt können verschiedene Folgen die gleiche Menge von Folgenglieder haben: Zum Beispiel haben die Folgen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, 1, -1, \dots) \quad \text{und} \quad (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, -1, -1, -1, -1, \dots)$$

die gleiche endliche Menge von Folgengliedern, nämlich $\{-1, 1\}$.

Definition 15.1. Sei $A \subset \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

i) Der Punkt a heißt *Berührpunkt* von A, falls jede ϵ-Umgebung von a mindestens einen Punkt von A enthält.

ii) Der Punkt a heißt *Häufungspunkt* von A, falls in jeder ϵ-Umgebung von a unendlich viele Punkte von A liegen.

Zuerst eine Reihe von Bemerkungen zu diesen Begriffen:

1. Ist $a \in A$, so ist a Berührpunkt von A, aber auch Punkte außerhalb von A können Berührpunkte von A sein.

2. Ein Punkt a ist genau dann ein Berührpunkt von A, wenn es eine Folge (a_n) mit $a_n \in A$ gibt, sodass $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a$.

3. Ein Punkt a ist eine Häufungspunkt von A, wenn a Berührpunkt von $A \setminus \{a\}$ ist.

4. Ein Punkt a ist Häufungspunkt eine *Folge* (a_n), wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert, oder, äquivalent, wenn jede ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a)$ unendliche viele Folgenglieder enthält. Es folgt aber nicht unbedingt, dass a dann auch Häufungspunkt der *Menge der Folgenglieder* sein muss:

   Zum Beispiel haben konstante Folgen $a_n = a$ den Häufungspunkt a, welcher zwar Berührpunkt aber nicht Häufungspunkt der Menge $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$ ist.

Beispiel.

1. Das offene Intervall $I =]a, b[$ hat als Häufungspunkte alle Punkte von I und zusätzlich die beiden Endpunkte a und b.
2. Die Menge $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ hat 0 als einzigen Häufungspunkt und $A \cup \{0\}$ als Berührpunkte.
3. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen hat ganz $\mathbb{R}$ als Häufungspunkte (und gleiches gilt auch für die irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

$\triangle$

Definition 15.2. Ist $D \subset \mathbb{R}$, so nennen wir eine Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ eine *reelle Funktion*. Die Menge D heißt *Definitionsbereich* von f und der Graph von f ist die Menge

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

Zu einer vollständigen Definition einer Funktion gehören ihr Definitionsbereich und ihre Abbildungsvorschrift. Wir schreiben daher

$$\begin{array}{rccl} f: & D & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

Die Menge $M = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in D : f(x) = y\}$ heißt *Bildmenge* von f. Für eine Teilmenge $A \subset D$ definieren wir das *Bild von A unter f* als

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\},$$

also die Menge aller der Elemente, die von Elementen in A von f erreicht werden. Für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{R}$ definieren wir das *Urbild von B unter f* als

$$f^{-1}(B) = \{x \in D \mid f(x) \in B\},$$

also die Menge aller Elemente, welche von f in die Menge B hinein abgebildet werden.

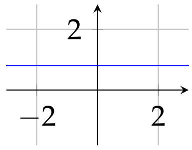
Hier haben wir das Symbol f^{-1} überladen: Mit $f^{-1}(y)$ wird auch die Umkehrabbildung von f angewendet auf ein y bezeichnet (wenn sie existiert).

Mit Hilfe des Urbildes können wir die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv noch einmal anders Beschreiben: Eine Funktion f ist injektiv, wenn das Urbild $f^{-1}(a)$ für jedes a höchstens ein Element enthält, sie ist surjektiv, wenn $f^{-1}(a)$ für jedes a wenigstens ein Element enthält und bijektiv, wenn $f^{-1}(a)$ für jedes a genau ein Element enthält.

Beispiel.

1. Für jedes $c \in \mathbb{R}$ gibt es die konstante Funktion

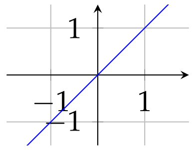
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & c. \end{array}$$



Diese Funktion ist weder injektiv noch surjektiv. Es gilt $f^{-1}(c) = \mathbb{R}$ und $f^{-1}(a) = \emptyset$ für $a \neq c$.

2. Die identische Funktion (auch Identität genannt)

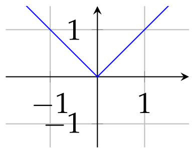
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array}$$



Die Identität ist bijektiv und es gilt $f^{-1}(x) = x$ für alle x.

3. Der Absolutbetrag:

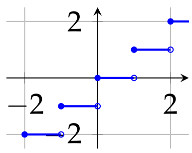
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x|. \end{array}$$



Es gilt $f^{-1}(a) = \{a, -a\}$ für $a > 0$, $f^{-1}(0) = \{0\}$ und $f^{-1}(a) = \emptyset$ für $a < 0$.

4. Die Gauß-Klammer (bzw. die floor-Funktion oder auch das Abrunden):

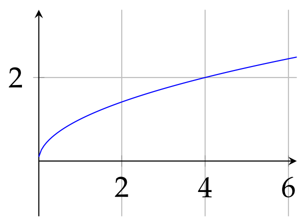
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor. \end{array}$$



Es gilt $f^{-1}(n) = [n, n+1[$ für $n \in \mathbb{Z}$ (und $= \emptyset$ sonst).

5. Die Quadratwurzel

$$f: \begin{array}{ccc} [0, \infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x}. \end{array}$$



6. Polynomfunktionen sind Funktionen von der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

für $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ und können auf $D = \mathbb{R}$ definiert werden.

7. Den Quotienten von zwei Polynomfunktionen P und Q nennt man *rationale Funktion*: $f(x) = P(x)/Q(x)$ und der größtmögliche Definitionsbereich ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$.

△

Definition 15.3. Für Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit gleichem Definitionsbereich und $\lambda \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen

$$\begin{aligned} f+g : \ & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x)+g(x), \\ \lambda f : \ & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \lambda f(x), \\ fg : \ & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto f(x)g(x). \end{aligned}$$

Setzen wir $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, so definieren wir auch

$$\begin{aligned} \tfrac{f}{g} : \ & D' \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \tfrac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

Noch einmal der Vollständigkeit halber:

Definition 15.4. Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ reelle Funktionen und gilt $f(D) \subset E$, dann ist die *Komposition (oder auch Verknüpfung)* von f und g definiert durch

$$\begin{aligned} g \circ f : \ & D \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto g(f(x)). \end{aligned}$$

Beispiel.

Für $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$ können wir sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ betrachten. Es ist

$$f \circ g(x) = f(x+1) = (x+1)^2, \quad g \circ f(x) = g(x^2) = x^2 + 1.$$

△

16 Grenzwerte und Stetigkeit von reellen Funktionen

Definition 16.1. Es sei $D \subset \mathbb{R}$, a ein Berührpunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. Wir sagen der *Grenzwert von f bei a existiert und ist gleich c* oder auch *f konvergiert für $x \to a$ gegen c*, falls für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$ und $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ gilt, dass $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$. Wir schreiben dann

$$\lim_{x\to a} f(x) = c \quad \text{oder} \quad f(x) \overset{x\to a}{\longrightarrow} c$$

und nennen c den *Grenzwert von f bei a*. Außerdem definieren wir

1. den *rechtsseitigen Grenzwert* $\lim\limits_{x\searrow a} f(x) = c$,
   falls a Berührpunkt von $D \cap \,]a, \infty[$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n > a$ und $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ gilt immer $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.
2. den *linksseitigen Grenzwert* $\lim\limits_{x\nearrow a} f(x) = c$,
   falls a Berührpunkt von $D \cap \,]-\infty, a[$ und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$, $x_n < a$
   und $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ gilt immer $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$,
   falls D nach oben unbeschränkt ist und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$ und $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ gilt immer $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = c$,
   falls D nach unten unbeschränkt ist und für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$ und $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$ gilt immer $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$.

Da a ein Berührpunkt von D ist, gibt es mindestens eine Folge (x_n), mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$.

Beachte: Die Konvergenz $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ wird für *alle* Folgen gefordert, welche gegen a gehen. Insbesondere muss der Grenzwert für alle diese Folgen existieren und immer den gleichen Wert geben.

Man kann einfach folgendes zeigen: Gilt $\lim_{x\searrow a} f(x) = \lim_{x\nearrow a} f(x) = c$, so existiert $\lim_{x\to a} f(x)$ und ist ebenfalls gleich c.

Beispiel.

1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ und $a \in D$. Dann kann man in jedem Fall die konstante Folge $x_n = a$ betrachten und sieht, dass $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ die einzige Möglichkeit ist, *falls der Grenzwert existiert*, d.h. falls für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ immer $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a)$ gilt. Das Grenzwerte nicht immer existieren müssen, zeigt das nächste Beispiel.
2. Wir betrachten die Signums- oder Vorzeichenfunktion

$$f(x) = \operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

   In diesem Fall existiert der Grenzwert $\lim_{x\to 0} f(x)$ nicht:

   - Für $x_n = 1/n$ gilt $f(x_n) = 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$, aber
   - für $x_n = -1/n$ gilt $f(x_n) = -1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -1$. (Und für $x_n = (-1)^n/n$ existiert $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ gar nicht). Die

links- und rechtsseitigen Grenzwerte bei 0 existieren allerdings:

$$\lim_{x\nearrow 0} f(x) = -1, \quad \lim_{x\searrow 0} f(x) = -1.$$

△

Im nächsten Beispiel wollen wir $\lim_{x\to 0}\exp(x), \lim_{x\to\infty}\exp(x)$ und $\lim_{x\to-\infty}\exp(x)$ berechnen. Für das erste beweisen wir eine Restgliedabschätzung für die Exponentialfunktion:

Satz 16.2. *Für $K \in \mathbb{N}$ sei $R_K(x) := \sum_{k=K}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Dann ist $\exp(x) = \sum_{k=0}^{K}\frac{x^k}{k!} + R_{K+1}(x)$ und es gilt für $|x| \leq 1 + K/2$*

$$|\exp(x) - \sum_{k=0}^{K}\tfrac{x^k}{k!}| = |R_{K+1}(x)| \leq 2\tfrac{|x|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

Beweis.
Wir schätzen ab:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\tfrac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{K}\tfrac{x^k}{k!} + R_{K+1}(x)$$

mit der Funktion $R_{K+1}(x) = \sum_{k=K+1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Für diesen Rest gilt

$$\begin{aligned}|R_{K+1}(x)| &\leq \sum_{k=K+1}^{\infty}\tfrac{|x|^k}{k!}\\ &= \tfrac{|x|^{K+1}}{(K+1)!}\Big(1 + \tfrac{|x|}{K+2} + \tfrac{|x|^2}{(K+2)(K+3)} + \tfrac{|x|^3}{(K+2)(K+3)(K+4)} + \cdots\Big)\\ &\leq \tfrac{|x|^{K+1}}{(K+1)!}\Big(1 + \tfrac{|x|}{K+2} + \big(\tfrac{|x|}{(K+2)}\big)^2 + \big(\tfrac{|x|}{(K+2)}\big)^3 + \cdots\Big).\end{aligned}$$

Wir erkennen die geometrische Reihe und wenn $|x|/(K+2) \leq 1/2$ gilt, hat diese einen Wert ≤ 2. Daher gilt für $|x| \leq 1 + \frac{K}{2}$:

$$|R_{K+1}(x)| \leq 2\tfrac{|x|^{K+1}}{(K+1)!}.$$

□

Beispiel.
Mit $K = 0$ in Satz **??** folgt insbesondere $|R_1(x)| \leq 2|x|$, also gilt für $|x| < 1$:

$$|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$$

und wir sehen, dass für $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt $|\exp(x_n) - 1| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Wir schließen

$$\lim_{x\to 0}\exp(x) = 1.$$

Für den Grenzwert $\lim_{x\to\infty} \exp(x)$ schätzen wir ab

$$\exp(x) = 1 + x + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} \tfrac{x^k}{k!}}_{\geq 0}$$

und da $1 + x \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ gilt, folgt

$$\exp(x) \xrightarrow{x\to\infty} \infty.$$

Wegen $\exp(-x) = 1/\exp(x)$ folgt daraus

$$\exp(x) \xrightarrow{x\to-\infty} 0.$$

△

Definition 16.3. Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *stetig in* $a \in D$, falls

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

gilt. Die Funktion f heißt *stetig* in D, wenn sie in jedem $a \in D$ stetig ist.

Man kann sich die Definition auch wie folgt merken: "Eine Funktion ist stetig, wenn sie mit Grenzwerten vertauscht, d.h. $\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x)$".

Mit der Randbemerkung zu links- und rechtsseitigem Grenzwert hat man folgendes: Ein Funktion f ist stetig in a, falls links- und rechtsseitiger Grenzwert in a existieren und beide gleich $f(a)$ sind.

Beispiel.

1. Die konstanten Funktionen $f(x) = c$ (für alle c) sind überall stetig.
2. Die Identität $\mathrm{id}(x) = x$ ist ebenfalls überall stetig.

△

Lemma 16.4. *Die Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist überall stetig.*

Beweis.
Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist $\lim_{x\to a} \exp(x) = \exp(a)$ und das heißt, für müssen wir eine beliebige Folge (x_n) mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ zeigen, dass $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) = \exp(a)$ gilt.

Es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} |x_n - a| = 0$ gilt. Nach Satz **??** gilt (mit $K = 0$) $|\exp(x) - 1| \leq 2|x|$ und daher gilt

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} |\exp(x_n - a) - 1| \leq \lim_{n\to\infty} 2|x_n - a| = 0,$$

und also gilt $\lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = 1$. Mit Satz 14.3 (der Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion) folgt dann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \exp(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \exp(a)\exp(x_n - a)\\ &= \exp(a) \lim_{n\to\infty} \exp(x_n - a) = \exp(a).\end{aligned}$$

□

Beispiel.

1. Die Signumsfunktion $f(x) = \operatorname{sign}(x)$ ist in jedem Punkt außer in $a = 0$ stetig.

2. Die floor-Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist nur in $a \notin \mathbb{Z}$ stetig: Ist $a \in \mathbb{Z}$, so ist betrachten wir die beiden Folgen $x_n = a + \frac{1}{n}$ und $y_n = a - \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \lfloor x_n \rfloor = \lim_{n\to\infty} a = a, \quad \lim_{n\to\infty} \lfloor y_n \rfloor = \lim_{n\to\infty} a - 1 = a - 1,$$

   und sogar

$$\lim_{x \nearrow a} \lfloor x \rfloor = a - 1 \neq a = \lim_{x \searrow a} \lfloor x \rfloor.$$

   Ist $x \notin \mathbb{Z}$, und gilt $x_n \to x$, so gilt für n groß genug, dass $\lfloor x_n \rfloor = \lfloor x \rfloor$, was die Stetigkeit von in diesen Punkten zeigt.

△

Direkt aus den Grenzwertsätzen für stetige Funktionen folgt:

Satz 16.5. *Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch die Funktionen*

$$f + g,\ \lambda f, f \cdot g$$

in a stetig. Ist $g(a) \neq 0$ und $D' = \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$, so ist auch $f/g : D' \to \mathbb{R}$ in a stetig.

Beweis.
Wir zeigen nur die Behauptung für f/g: Ist $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$ und gilt $g(a) \neq 0$, so gilt insbesondere $g(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(a)$ und $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$ und es folgt $f(x_n)/g(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)/g(a)$. □

Satz 16.6. *Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : E \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(D) \subset E$ und ist f stetig in $a \in D$ und g stetig in $b := f(a) \in E$, so ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ stetig in a.*

Beweis.
Es sei $x_n \in D$ mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} a$. Wegen der Stetigkeit von f in a folgt $f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(a)$. Wir setzen $y_n := f(x_n)$ und bemerken $y_n \in E$ mit $y_n \xrightarrow{n\to\infty} b = f(a)$. Wegen der Stetigkeit von g in b folgt $g(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} g(b)$. Zusammen ergibt das

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(y_n) = g(b) = g(f(a)).$$

□

Mit Hilfe dieser Sätze lässt sich die Stetigkeit einer Funktion oft sehr einfach prüfen:

- Polynomfunktionen sind stetig, da sich jedes Polynom als Summe von Produkten von konstanten mit identischen

Funktionen schreiben lässt, z.B. ist $p(x) = -3x^2 + x$ auch $p(x) = -3 \cdot \mathrm{id}(x)\,\mathrm{id}(x) + \mathrm{id}(x)$.

- Die Funktion $f(x) = \exp(-x^2)$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, da $f = \exp(-\mathrm{id} \cdot \mathrm{id})$.
- Für jede stetige Funktion f sind $g(x) = f(x)^2$ und $h(x) = f(x^2)$ stetig.

In anderen Fällen muss mal allerdings Stetigkeit auf anderem Weg prüfen, wie z.B. bei der Funktion $f(x) = |x|$.

17 Sätze über stetige Funktionen

Satz 17.1 (Zwischenwertsatz). *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Dann gilt es ein $p \in [a, b]$ mit $f(p) = 0$.*

Die Aussage gilt natürlich auch im Fall, dass $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ gilt (betrachte $-f$ statt f).

Beweis.
Wir gehen ähnlich vor wie im Satz von Bolzano-Weierstraß: Wir definieren rekursiv eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$ mit den Eigenschaften, dass

i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$

ii) $b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$

iii) $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$.

Wir beginnen mit $[a_0, b_0] := [a, b]$ und fahren rekursiv fort: Ist $[a_n, b_n]$ schon konstruiert, so betrachte wir den Mittelpunkt $m = (a_n + b_n)/2$ und definieren, abhängig vom Vorzeichen von $f(m)$:

1. Ist $f(m) \geq 0$ setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [a_n, m]$,
2. ist $f(m) < 0$ setzen wir $[a_{n+1}, b_{n+1}] := [m, b_n]$.

Die geforderten Bedingungen i)–iii) sind per Konstruktion erfüllt und es gilt $p := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. Wegen der Stetigkeit von f folgt

$$f(p) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Aber da $f(a_n) \leq 0$ und $f(b_n) \geq 0$ gilt, gilt auch $f(p) \leq 0$ und $f(p) \geq 0$, also $f(p) = 0$. □

Der Beweis des Zwischenwertsatzes ist *konstruktiv*, d.h. er kann auch in einen Algorithmus umgesetzt werden, der Nullstellen mit vorgegebener Genauigkeit berechnet.

Um zu zeigen, dass Polynome mit ungeradem Grad eine reelle Nullstelle haben, untersuchen wir zuerst die Asymptotik bei $\pm\infty$

Lemma 17.2. *Für ein normiertes Polynom (d.h. der Koeffizient der höchsten Potenz ist 1)*

$$P(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $a_l \in \mathbb{R}$, $l = 0, \ldots, k-1$ und $k \geq 1$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} P(x) = \infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\infty, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Beweis.
Ist $x \neq 0$, so können wir x^k ausklammern, d.h. wir schreiben

$$P(x) = x^k g(x) \quad \text{mit} \quad g(x) = 1 + \tfrac{a_{k-1}}{x} + \cdots + \tfrac{a_1}{x^{k-1}} + \tfrac{a_0}{x^k}.$$

Mit $c := \max(1, 2k|a_1|, \cdots, 2k|a_{k-1}|)$ gilt dann für $x \geq c$ und $l = 0, \ldots, k-1$ immer $x \geq 2k|a_l|$, also $|\frac{a_l}{x}| \leq \frac{1}{2k}$. Wegen $x \geq 1$ gilt auch $|\frac{a_l}{x^{k-l}}| \leq \frac{1}{2k}$ für alle l und es folgt $g(x) \geq \frac{1}{2}$. Wir bekommen

$$P(x) \geq x^k/2 \geq \tfrac{x}{2}.$$

Also gilt für jede Folge (x_n) mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ auch $P(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Um den Grenzwert bei $-\infty$ zu bestimmen, bemerken wir

$$P(-x) = (-1)^k Q(x)$$

mit

$$Q(x) = x^k - a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + (-1)^{k-1}a_1 x + (-1)^k a_0$$

woraus die Behauptung folgt. □

Korollar 17.3. *Jedes Polynom $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$ mit n ungerade hat mindestens eine reelle Nullstelle.*

Im vorigen Lemma haben wir gesehen, dass $\lim_{x\to-\infty} p(x) = -\infty$ und $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$ gilt. Daher gibt es $a < b$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ und die Behauptung folgt aus dem Zwischenwertsatz.

Korollar 17.4. *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und c eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Dann gibt es ein $p \in [a,b]$, so dass $f(p) = c$.*

"c liegt zwischen $f(a)$ und $f(b)$" heißt $\min(f(a), f(b)) < c < \max(f(a), f(b))$.

Nehmen wir zuerst $f(a) < c < f(b)$ an. Dann betrachten wir $g(x) := f(x) - c$ und nach Satz 17.1 gibt es ein p mit $g(p) = 0$, also $f(p) = g(p) + c = c$. Ist $f(a) > c > f(b)$, so argumentiert man genau so.

Korollar 17.5. *Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist auch $f(I) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.*

Wir setzen $A := \inf f(I)$ und $B := \sup f(I)$ (wobei die Werte $-\infty$ und ∞ erlaubt sind). Ist $A < y < B$, so gibt es $a, b \in I$ mit $f(a) < y < f(b)$. Nach dem vorigen Korollar gibt es ein $x \in I$ mit $f(x) = y$, also $y \in f(I)$. Das zeigt $]A, B[\subset f(I)$. Also muss $f(I)$ gleich einem der folgenden vier Intervalle sein: $]A, B[$, $]A, B]$, $[A, B[$, $[A, B]$.

Beispiel.

Für $f(x) = \exp(x)$ gilt

$$f(]-\infty,\infty[) = \exp(]-\infty,\infty[) =]0,\infty[,$$

für $f(x) = |x|$ (oder auch $f(x) = x^2$) hingegen gilt

$$f(]-\infty,\infty[) = [0,\infty[$$

oder auch

$$f(]-1,1[) = [0,1[.$$

△

Definition 17.6. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, wenn die Menge $f(D)$ beschränkt ist.

Mit anderen Worten: Wenn es ein M gibt, so dass für alle $x \in D$ gilt $|f(x)| \le M$.

Definition 17.7. Ein Intervall I heißt *kompakt*, wenn es abgeschlossen und beschränkt ist.

Satz 17.8 (Maximum-/Minimumprinzip). *Es sei $I = [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann existieren $\sup f(I)$ und $\inf f(I)$ als reelle Zahlen und es gibt $x_{\min}, x_{\max} \in I$ mit*

$$f(x_{\min}) = \inf f(I), \quad f(x_{\max}) = \sup f(I).$$

Beweis.
Wir beweisen die Aussage für $x_{\max}$ (die Aussage für $x_{\min}$ folgt dann durch Betrachtung von $-f$).

Es sei $A = \sup f(I)$ (und vorerst ist hier $A = \infty$ noch möglich). Nach Lemma 7.5 existiert eine Folge $x_n \in I$ mit $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} A$ (andernfalls wäre A nicht das Supremum). Da (x_n) in I liegt, ist es eine beschränkte Folge und nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (Satz 10.2), gibt es eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}). Wir definieren $p := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Da f stetig ist, gilt $f(p) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A$. An dieser Stelle folgt jetzt auch, dass $A \in \mathbb{R}$ gilt, da $f(p) \in \mathbb{R}$. □

Folgender Satz zeigt die Äquivalenz der sogenannten ϵ-δ-Definition der Stetigkeit zu unserer Definition (die auch *Folgenstetigkeit* genannt wird).

Satz 17.9 (ϵ-δ-Definition der Stetigkeit). *Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ und $p \in D$. Dann gilt: f ist stetig in p genau dann, wenn gilt*

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D : |x - p| < \delta \implies |f(x) - f(p)| \leq \epsilon.$$

Beweis.

⇐: Gebe es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass für $|x - p| < \delta$ immer $|f(x) - f(p)| < \epsilon$ gilt und sei (x_n) eine Folge, welche gegen p konvergiert. Es ist zu zeigen, dass $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$ gilt. Sei dazu $\epsilon > 0$. Dann existiert ein δ wie oben gefordert. Zu diesem δ finden wir ein N, so dass $|x_n - p| < \delta$ für $n > N$. Für diese n gilt aber $|f(x_n) - f(p)| \leq \epsilon$. Da dies für alle $\epsilon > 0$ geht, folgt $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$.

⇒: Gelte nun, $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$ für alle Folgen mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$. Wir nehmen das Gegenteil der zu zeigenden Aussage an und führen das zum Widerspruch. Das heißt, wie nehmen an, dass es ein $\epsilon > 0$ gibt, so dass es für alle $\delta > 0$ immer ein x gibt mit $|x - p| < \delta$, aber $|f(x) - f(p)| \geq \epsilon$. Insbesondere gibt es dann für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine x_n, so dass $|x_n - p| < 1/n$ aber $|f(x_n) - f(p)| \geq \epsilon$. Für diese x_n gilt $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} p$ aber $|f(x_n) - f(p)| \geq \epsilon$ steht im Widerspruch zu $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(p)$.

□

Korollar 17.10. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ stetig in $p \in D$ und ist $f(p) \neq 0$, so gibt es ein $\delta > 0$, so dass f auf ganz $U_\delta(p)$ nicht Null ist, d.h.*

$$x \in U_\delta(p) \implies f(x) \neq 0.$$

Zu $\epsilon = |f(p)| > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so dass für $|x - p| < \delta$ immer gilt $|f(x) - f(p)| < \epsilon$. Es folgt mit der umgekehrten Dreiecksungleichung $|f(x)| \geq |f(p)| - |f(x) - f(p)| > 0$ für diese x.

18 Logarithmen und Potenzen

Ein direkte Folgerung aus der Definition des Begriffes der Bijektitvtät ist die folgenden Aussage

Korollar 18.1. *Eine Funktion $f : D \to E$ ist bijektiv, genau dann, wenn es eine Umkehrfunktion $f^{-1} : E \to D$ gibt.*

D.h. f ist bijektiv genau dann, wenn es eine Funktion f^{-1} gibt, so dass für alle $x \in D$ und alle $y \in E$ gilt $f^{-1}(f(x)) = x$, bzw. $f(f^{-1}(y)) = y$.

Die Werte $f^{-1}(y)$ sind bestimmt als (eindeutige!) Lösungen der Gleichung $f(x) = y$.

Aus den Ergebnissen der letzten großen Übung folgt

Satz 18.2. *Ist $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und streng wachsend (bzw. fallend), so bildet f das Intervall D bijektiv auf $D' := f(D)$ ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : D' \to D \subset \mathbb{R}$ ist ebenfalls stetig und streng wachsend (bzw. fallend).*

Satz 18.3 (und Definition der Wurzelfunktionen)**.** *Es sei $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Die Funktion*

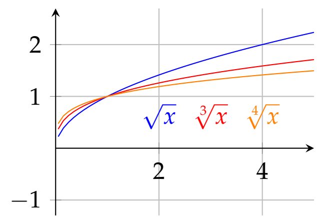
$$f : \begin{array}{ccc} [0,\infty[& \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & x^k \end{array}$$

ist streng wachsend und bijektiv. Ihre Umkehrfunktion

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} [0,\infty[& \to & [0,\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt[k]{x} \end{array}$$

ist ebenfalls stetig und streng wachsend und heißt k-te Wurzel.

Graphen der k-ten Wurzeln:



Nach Satz 16.5 ist f stetig, nach Lemma 4.3 streng wachsend ist mit Lemma 17.2 folgt Bijektivtät von f. Die Behauptung folgt dann aus Satz 18.2.

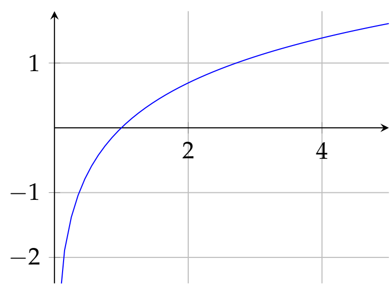
Satz 18.4 (und Definition des natürlichen Logarithmus)**.** *Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ ist streng wachsend und bijektiv. Die Umkehrfunktion $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ ist stetig und streng wachsend und heißt* natürlicher Logarithmus.

Für alle $x, y > 0$ gilt die Funktionalgleichung

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y).$$

Der natürliche Logarithmus wird auch mit $\ln(x)$ statt $\log(x)$ bezeichnet.

Graph des natürlichen Logarithmus:



Beweis.
Für $\xi > 0$ gilt

$$\exp(\xi) = 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!}}_{>0} > 1.$$

Für $x < x'$ folgt

$$\exp(x') = \exp(x + x' - x) = \exp(x)\underbrace{\exp(\overbrace{x' - x}^{>0})}_{>1} > \exp(x).$$

Die Grenzwerte $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$ haben wir schon im vorigen Abschnitt gesehen, was die Bijektivität zeigt. Stetigkeit der Exponentialfunktion haben wir in Lemma 16.4 gezeigt. Wiedrum zeigt Satz 18.2 die Existenz und Stetigkeit der geforderten Umkehrfunktion, ebenso wie das strenge Wachstum der Umkehrfunktion.

Zeigen wir noch die Funktionalgleichung: Seien dazu $x, y > 0$. Wir setzen $\xi := \log(x)$ und $\zeta := \log(y)$. Nach Definition der Umkehrfunktion gilt dann $\exp(\xi) = x$ und $\exp(\zeta) = y$ und die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion liefert

$$\exp(\xi + \zeta) = \exp(\xi) \exp(\zeta) = xy.$$

Nach Definition des Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion folgt daraus

$$\log(xy) = \xi + \zeta = \log(x) + \log(y).$$

□

Definition 18.5. Für $a > 0$ ist die *Exponentialfunktion zur Basis a*, $\exp_a \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\exp_a(x) := \exp(x \log(a)).$$

Satz 18.6 (und Definition von a^x)**.** *Die Funktion* $\exp_a$ *ist stetig und es gilt:*

i) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(x + y) = \exp_a(x) \exp_a(y)$.

ii) Für $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $\exp_a(nx) = \exp_a(x)^n$.

iii) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp_a(n) = a^n$, daher erklären wit für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$: $a^x := \exp_a(x) = \exp(x \log(a))$.

Für $a < 0$ ist a^x *nicht* erklärt!

iv) Für $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ mit $q \geq 1$ gilt $\exp_a(\frac{p}{q}) = \sqrt[q]{a^p}$.

Beweis.
Da $\exp_a$ die Verknüpfung der Funktionen $x \mapsto x \log(a)$ und $y \mapsto \exp(y)$ ist, folgt Stetigkeit aus Satz 16.6. Zu den weiteren Aussagen:

i) Folgt direkt aus der Funktionalgleichung:

$$\begin{aligned} \exp_a(x + y) &= \exp((x + y) \log(a)) = \exp(x \log(a) + y \log(a)) \\ &= \exp(x \log(a)) \exp(y \log(a)) = \exp_a(x) \exp_a(y). \end{aligned}$$

ii) Folgt aus der Funktionalgleichung durch Induktion.

iii) Es ist $\exp_a(1) = \exp(\log(a)) = a$ (da log die Umkehrfunktion von exp ist). Die Behauptung folgt per Induktion, da $\exp_a(n + 1) = \exp_a(n)a$ für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. Für $n \leq 0$ folgt die Behauptung aus $\exp_a(n) = 1/\exp_a(-n)$.

iv) Es gilt

$$a^p = \exp_a(p) = \exp_a(q\tfrac{p}{q}) \overset{i)}{=} \Big(\exp_a(\tfrac{p}{q})\Big)^q.$$

Die Behauptung folgt durch Ziehen der q-ten Wurzel.

□

Mit diesem Satz sehen wir noch einmal schnell ein, dass $\sqrt[n]{a} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ 1 gilt.

Mit Stetigkeit von exp folgt $\sqrt[n]{a} = \exp(\frac{1}{n}\log(a)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(0\log(a)) = \exp(0) = 1$.

Die Rechenregeln für ganzzahlige Potenzen gelten ebenso auch für reelle Exponenten (wenn die Basen positiv sind; sonst sind die Potenzen gar nicht erklärt!):

Korollar 18.7. *Es seien $a, b \in\,]0,\infty[$ und $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

i) $a^x a^y = a^{x+y}$,

ii) $(a^x)^y = a^{xy}$,

iii) $a^x b^x = (ab)^x$,

iv) $(1/a)^x = a^{-x}$.

Folgt alles direkt aus $a^x = \exp(x\log(a))$ und der Regeln für Exponentialfunktion und Logarithmus. Z.B. ist i) nur eine andere Schreibweise für i) aus Satz 18.6. Für ii) bemerken wir $\log(a^x) = x\log(a)$ und sehen damit $(a^x)^y = \exp(y\log(a^x)) = \exp(yx\log(a)) = a^{xy}$. Für iii): $a^x b^x = \exp(x\log(a))\exp(x\log(b)) = \exp(x(\log(a)+\log(b))) = \exp(x\log(ab)) = (ab)^x$. Für iv): $(1/a)^x = \exp(x\log(1/a)) = \exp(x(-\log(a))) = \exp(-x\log(a)) = a^{-x}$.

Die allgemeinen Potenzen sind die einzigen stetigen Funktionen, die die entsprechenden Funktionalgleichung $F(x+y) = F(x) + F(y)$ erfüllen:

Satz 18.8. *Es sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion für die für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$F(x+y) = F(x)F(y).$$

Dann ist entweder $F(x) = 0$ für alle x oder es gilt $a := F(1) > 0$ und $F(x) = a^x$ für alle x.

Beweis.
Es gilt $F(1) = F(1/2+1/2) = F(1/2)^2$ und daher $F(1) \geq 0$. Nehmen wir zuerst an, dass $a := F(1) > 0$ gilt. Aus der Funktionalgleichung folgt dann $F(n) = a^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ und für $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ $q \geq 1$ auch $F(p/q) = \sqrt[q]{a^p}$. Das bedeutet es gilt $F(r) = a^r$ für alle $r \in \mathbb{Q}$. Sei nun $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge (r_n) mit $r_n \in \mathbb{Q}$ und $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Wegen der Stetigkeit von F und exp folgt

dann

$$F(x) = F(\lim_{n\to\infty} r_n) = \lim_{n\to\infty} F(r_n) = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \exp(r_n \log(a)) = \exp(x\log(a)) = a^x.$$

Ist schließlich $F(1) = 0$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

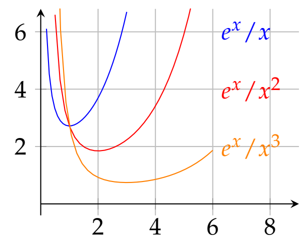
$$F(x) = F(1 + (x-1)) = F(1)F(x-1) = 0\,F(x-1) = 0.$$

$\square$

Wir untersuchen das Wachstumsverhalten von exp und log:

Lemma 18.9. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\exp(x)}{x^k} = \infty.$$



Beweis.
Für $x > 0$ gilt

$$\exp(x) = 1 + x + \cdots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}.$$

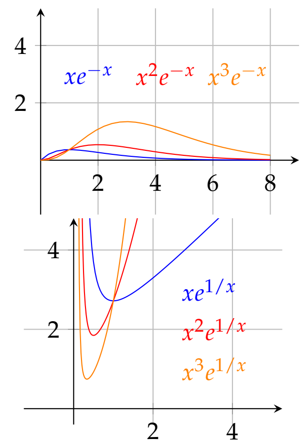
Daher gilt

$$\frac{\exp(x)}{x^k} > \frac{x}{(k+1)!},$$

was die Behauptung zeigt. $\square$

Lemma 18.10. *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\lim_{x\to\infty} x^k \exp(-x) = 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\searrow 0} x^k \exp(1/x) = \infty.$$



Beweis.
Es gilt $x^k \exp(-x) = x^k/\exp(x) = \left(\frac{\exp(x)}{x^k}\right)^{-1}$ und daher folgt die Behauptung aus Lemma 18.9. Für die zweite Aussage setzen wir $y = 1/x$ und nutzen, dass $x \searrow 0$ äquialent zu $y \to \infty$ ist. Es folgt mit Lemma 18.9

$$\lim_{x\searrow 0} x^k \exp(1/x) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y^k} \exp(y) = \infty.$$

$\square$

Lemma 18.11. *Es gilt*

$$\lim_{x\to\infty} \log(x) = \infty \quad \textit{und} \quad \lim_{x\searrow 0} \log(x) = -\infty.$$

Beweis.
Gilt also $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, so ist $x_n > \exp(K)$ ab einem Index N. Da log wachsend ist, gilt ab diesem N auch $\log(x_n) > K$. Es folgt $\log(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ und damit die erste Behauptung.

Es gilt $0 = \log(1) = \log(x\frac{1}{x}) = \log(x) + \log(1/x)$ und daher

$\log(1/x) = -\log(x)$. Damit folgt die zweite Behauptung:

$$\lim_{x \searrow 0} \log(x) = \lim_{y \to \infty} \log(1/y) = -\lim_{y \to \infty} \log(y) = -\infty.$$

□

19 Trigonometrische Funktionen

Definition 19.1. Für $x \in \mathbb{R}$ sind Sinus und Kosinus definiert durch

$$\sin(x) := \operatorname{Im}(\exp(ix)) \quad \text{und} \quad \cos(x) := \operatorname{Re}(\exp(ix)).$$

Die berühmte *Eulersche Formel*

$$\exp(ix) = \cos(x) + i\sin(x)$$

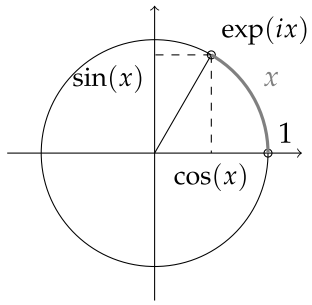
ist hier also eine direkte Folgerung aus der Definition.

Sinus und Kosinus haben die aus der elementaren Geometrie bekannte Interpretation: Wir bemerken, dass

$$\begin{aligned}\sin(x)^2 + \cos(x)^2 &= |\cos(x) + i\sin(x)|^2 = |\exp(ix)|^2\\ &= \exp(ix)\exp(\overline{ix}) = \exp(ix)\exp(-ix) = \exp(ix - ix)\\ &= \exp(0) = 1.\end{aligned}$$

Daher ist $\exp(ix)$ immer auf dem Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene:

Der Einheitskreis ist der Kreis um den Ursprung mit Radius eins.



In der Übung wird gezeigt, dass dabei x die (orientierte) Länge des Kreisbogens ist.

Direkt aus der Definition bekommen wir:

Satz 19.2. *Für alle x in $\mathbb{R}$ gilt*

i) $\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$,
$\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$,

ii) $\cos(-x) = \cos(x), \quad \sin(-x) = -\sin(x)$,

Beweis.
Wir benutzen die Euler-Formel:

$$\begin{aligned}\exp(ix) + \exp(-ix) &= \cos(x) + i\sin(x) + \cos(x) - i\sin(x) = 2\cos(x)\\ \exp(ix) - \exp(-ix) &= \cos(x) + i\sin(x) - (\cos(x) - i\sin(x)) = 2i\sin(x).\end{aligned}$$

woraus die ersten beiden Gleichungen folgen. Daraus folgen die nächsten beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}\cos(-x) &= \tfrac{1}{2}(\exp(-ix) + \exp(ix)) = \cos(x)\\ \sin(-x) &= \tfrac{1}{2i}(\exp(-ix) - \exp(ix)) = -\tfrac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix)) = -\sin(x).\end{aligned}$$

□

Da aus der Konvergenz einer komplexen Folge die Konvergenz von Real- und Imaginärteil folgt, ergibt sich aus der Stetigkeit von exp auch die Stetigkeit von cos und sin.

Ausführlicher: $\lim_{x\to a}\cos(x) = \lim_{x\to a}\mathrm{Re}(\exp(ix)) = \mathrm{Re}(\exp(ia)) = \cos(a)$ und $\lim_{x\to a}\sin(x) = \lim_{x\to a}\mathrm{Im}(\exp(ix)) = \mathrm{Im}(\exp(ia)) = \sin(a)$.

Satz 19.3 (Additionstheoreme für sin und cos)**.** *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)\\ \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Beweis.
Wir nutzen die Funktionalgleichung für die Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) &= \exp(i(x+y)) = \exp(ix)\exp(iy)\\ &= (\cos(x) + i\sin(x))(\cos(y) + i\sin(y))\\ &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) + i(\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt durch Vergleich von Real- und Imaginärteil.
□

Setzen wir $x = y$ bekommen wir die Verdopplungsformeln:
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(2x) = \cos(x)^2 - \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 - 1, \quad \sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x).$$

Außerdem bekommen wir:

Korollar 19.4. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(y) &= -2\sin(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2})\\ \sin(x) - \sin(y) &= 2\cos(\tfrac{x+y}{2})\sin(\tfrac{x-y}{2}).\end{aligned}$$

Setzen wir $u = \frac{x+y}{2}, v = \frac{x-y}{2}$, so gilt $x = u+v$ und $y = u-v$ und es folgt

$$\begin{aligned}\cos(x) - \cos(y) &= \cos(u+v) - \cos(u-v)\\ &= (\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)) - (\cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v))\\ &= -2\sin(u)\sin(v).\end{aligned}$$

Die zweite Gleichung sieht man analog.

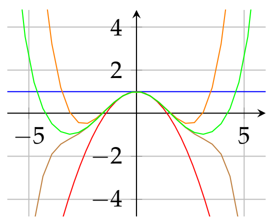
Nehmen wir Real- und Imaginärteil der Reihe für $\exp(ix)$ bekommen wir Reihen für Kosinus und Sinus:

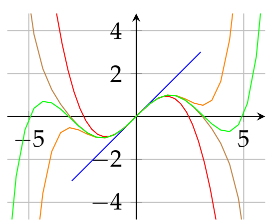
Satz 19.5. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned}\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \mp \cdots\\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \mp \cdots\end{aligned}$$

und beide Reihen konvergieren für jedes $x \in \mathbb{R}$ absolut.

Graphen der abgebrochenen Reihen für Kosinus (oben) und Sinus (unten)





Beweis.
Für die Potenzen von i gilt

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4m \\ i, & \text{falls } n = 4m+1 \\ -1, & \text{falls } n = 4m+2 \\ -i, & \text{falls } n = 4m+3. \end{cases}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \exp(ix) &= \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{i^n x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

woraus die Reihendarstellungen folgen. Die absolute Konvergenz der Reihen folgt aus der absoluten Konvergenz der Exponentialreihe (oder wieder mit dem Quotientenkriterium). □

Satz 19.6 (Restgliedabschätzungen für sin und cos)**.** *Es gilt*

$$\underbrace{|\cos(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{x^{2k}}{(2k)!}|}_{=r_{2n+2}(x)} \leq \tfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad \textit{für } |x| \leq 2n+3$$

$$\underbrace{|\sin(x) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}|}_{r_{2n+3}(x)} \leq \tfrac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}, \quad \textit{für } |x| \leq 2n+4.$$

Beweis.
Der Fehlerterm beim Kosinus ist

$$r_{2n+2}(x) = \pm \tfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \Big(1 - \tfrac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} \pm \cdots \Big).$$

Genauer: Mit $a_k := \frac{x^{2k}}{(2n+3)(2n+4)\cdots(2n+2(k+1))}$ gilt

$$r_{2n+2}(x) = \pm \tfrac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} \Big(1 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots \Big).$$

Die a_k erfüllen die Rekursion

$$a_k = a_{k-1} \tfrac{x^2}{(2n+2k+1)(2n+2k+2)}$$

und da $|x| \leq 2n+3$ gilt, folgt $1 > a_1 > a_2 > \cdots$. Wie im Beweis des Leibniz-Kriteriums schließen wir daraus

$$0 \leq 1 - a_1 + a_2 - a_3 \pm \cdots \leq 1$$

und es folgt

$$|r_{2n+2}(x)| \leq \tfrac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Die Restgliedabschätzung für den Sinus wird analog bewiesen. □

Kommen wir nun zur Definition der Kreiszahl π. Auf der Illustration von cos und sin in der Gaußschen Zahlenebene sehen wir, dass das kleinste x, für das $\cos(x)$ zum ersten Mal Null ergibt, genau einem viertel Kreisumfang entspricht. Da der Umfang des Einheitskreises 2π ist, definieren wir π als das Doppelte der kleinsten Nullstelle von cos.

Satz 19.7. *Die Funktion* cos *hat genau eine Nullstelle im Intervall* $[0,2]$.

Beweis.

1. Wir zeigen zu erst die Behauptung $\cos(2) \leq -1/3$: Nach der Restgliedabschätzung aus Satz 19.6 gilt

$$\cos(x) = 1 - \tfrac{x^2}{2} + r_4(x) \quad \text{mit} \quad |r_4(x)| \leq \tfrac{|x|^4}{25} \quad \text{für} \quad |x| \leq 5.$$

Setzen wir $x = 2$ ein, bekommen wir

$$\cos(2) = 1 - 2 + r_4(2), \quad |r_4(2)| \leq \tfrac{16}{24} = \tfrac{2}{3},$$

woraus die Behauptung folgt.

2. Wegen $\cos(0) = 1 > 0$ und $\cos(2) < 0$ folgt aus dem Zwischenwertsatz (Satz 17.1), dass cos mindestens eine Nullstelle im Intervall $[0,2]$ hat.

3. Nun zeigen wir die Behauptung $\sin(x) > 0$ für $0 < x \leq 2$: Wir benutzen wieder die Restgliedabschätzung aus Satz 19.6: Für $0 < x \leq 2$ gilt

$$\sin(x) = x + r_3(x) = x\big(1 + \tfrac{r_3(x)}{x}\big), \quad \text{mit} \quad |\tfrac{r_3(x)}{x}| \leq \tfrac{|x|^2}{6} \leq \tfrac{4}{6} = \tfrac{2}{3}.$$

4. Mit dem vorigen Punkt zeigen wie die Behauptung, dass cos auf dem Intervall $[0,2]$ streng fallend ist: Seien dazu $0 \leq x \leq x' \leq 2$. Dann folgt mit Korollar 19.4

$$\cos(x') - \cos(x) = -2\sin(\tfrac{x+x'}{2})\sin(\tfrac{x'-x}{2}) < 0,$$

also gilt $\cos(x') < \cos(x)$.

5. Aus der strikten Monotonie folgt nun, dass es höchstens eine Nullstelle von cos zwischen 0 und 2 gibt.

□

Definition 19.8. Die Zahl π ist definiert als das Doppelte der eindeutig bestimmten Nullstelle der Funktion cos im Intervall $[0,2]$.

Für den Wert von π gilt

$$\pi = 3{,}14159 \pm 10^{-5}.$$

20 Mehr zu trigonometrischen Funktionen

Satz 20.1. *Es gilt*

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \quad e^{i\pi} = -1, \quad e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i, \quad e^{2\pi i} = 1.$$

Beweis.
Es gilt $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ und daher gilt

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2) = i\sin(\pi/2).$$

Da aber auch $|e^{ix}| = 1$ gilt, folgt $\sin(\pi/2) = 1$ und $e^{i\pi/2} = i$. Die weiteren Behauptungen folgen, da $e^{in\pi/2} = i^n$ gilt. □

Aus diesem Satz schließen wir schon folgenden Werte für sin und cos:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

Aus den Additionstheoremen (Satz 19.3), den Werten aus der Tabelle und der Eindeutigkeit der Nullstelle von cos in $[0,2]$:

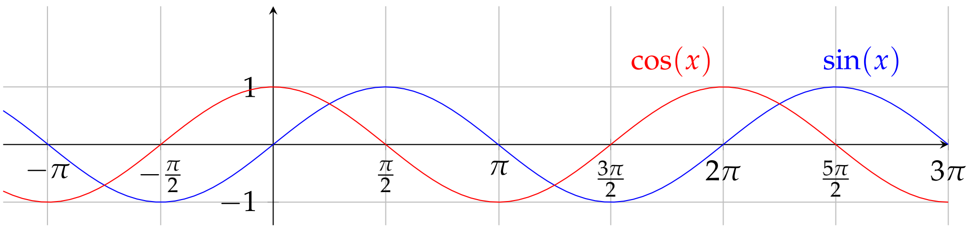
Korollar 20.2. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\begin{aligned} \cos(x+2\pi) &= \cos(x), & \sin(x+2\pi) &= \sin(x)\\ \cos(x+\pi) &= -\cos(x), & \sin(x+\pi) &= -\sin(x)\\ \cos(x) &= \sin(\tfrac{\pi}{2}-x) & \sin(x) &= \cos(\tfrac{\pi}{2}-x). \end{aligned}$$

Die Nullstellenmengen von sin *und* cos *sind*

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} &= \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}\\ \{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} &= \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung folgt aus $\cos(x+2\pi) = \cos(x)\cos(2\pi) + \sin(x)\sin(2\pi) = \cos(x)$ und die anderen Gleichungen folgen analog.

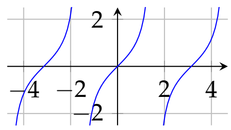


Korollar 20.3. *Die Gleichung* $\exp(ix) = 1$ *hat genau die reellen Lösungen $x = 2\pi k$ für $k \in \mathbb{Z}$.*

Es gilt $\sin(x/2) = \frac{1}{2i}\Big(\exp(ix/2) - \exp(-ix/2)\Big) = \frac{\exp(-ix/2)}{2i}\Big(\exp(ix) - 1\Big)$. Da $\exp(-ix/2) \neq 0$, gilt $\exp(ix) = 1$ genau dann, wenn $\sin(x/2) = 0$ und das gilt genau dann, wenn $x/2 = k\pi$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

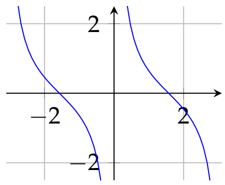
Definition 20.4. Die *Tangensfunktion* ist definiert durch

$$\begin{aligned} \tan: \quad \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned}$$



und die *Kotangensfunktion* ist

$$\begin{aligned} \cot: \quad \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{aligned}$$



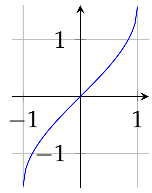
Es folgen $\cot(x) = \tan(\pi/2 - x)$, $\tan(-x) = -\tan(x)$ und $\cot(-x) = -\cot(x)$.

Schränkt man die Definitionsbereiche von Sinus, Kosiunus und Tangens entsprechend ein, so erhält man bijektive Funktionen und kann deren Umkehrfunktionen erklären:

Satz 20.5 (und Defintion). *i) Die Funktion* $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$ *ist streng wachsend und bijektiv. Daher ist* $\sin$ *dort umkehrbar und die Umkehrfunktion*

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$$

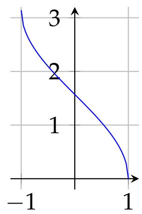
heißt Arcus-Sinus.



ii) Die Funktion $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$ *ist streng fallend und bijektiv. Daher ist* $\cos$ *dort umkehrbar und die Umkehrfunktion*

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

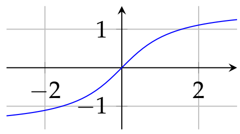
heißt Arcus-Kosinus.



iii) Die Funktion $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ *ist streng wachsend und bijektiv. Daher ist* $\tan$ *dort umkehrbar und die Umkehrfunktion*

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$$

heißt Arcus-Tangens.



Beweis.

Wir haben schon gesehen, dass $\cos$ auf $[0, 2]$ streng fallend ist, also insbesondere auch auf dem Intervall $[0, \pi/2]$. Wegen $\cos(x) = -\cos(\pi - x)$ ist $\cos$ auch in $[\pi/2, \pi]$ streng fallend. Da $\cos$ auch stetig ist, haben wir die geforderte Bijektivität und damit Punkt ii) des Satzes. Punkt i) folgt aus ii), da $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ gilt.

Zu Punkt iii): Sei $0 \leq x < x' < \pi/2$. Dann ist $\sin(x) < \sin(x')$ und $\cos(x) > \cos(x') > 0$. Es folgt

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} < \frac{\sin(x')}{\cos(x')} = \tan(x').$$

Also ist $\tan$ im Intervall $[0, \pi/2[$ streng wachsend und wegen $\tan(-x) = -\tan(x)$ auch in $]-\pi/2, 0]$. Zeigen wir jetzt, dass $\lim_{x \nearrow \pi/2} \tan(x) = \infty$. Sei also (x_n) eine Folge mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \pi/2$

wobei wir annehmen, dass $0 < x_n < \pi/2$ gilt. Dann ist auch

$$y_n = \frac{\cos(x_n)}{\sin(x_n)} > 0$$

und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\lim_{n\to\infty}\cos(x_n)}{\lim_{n\to\infty}\sin(x_n)} = \frac{\cos(\pi/2)}{\sin(\pi/2)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Es folgt also

$$\lim_{n\to\infty}\tan(x_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin(x_n)}{\cos(x_n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} = \infty.$$

Wegen $\tan(-x) = -\tan(x)$ folgt damit auch $\lim_{x\searrow -\pi/2}\tan(x) = -\infty$. $\square$

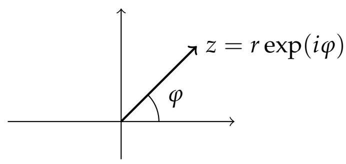
Mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen lassen sich komplexe Zahlen auch anders als mit Real- und Imaginärteil darstellen:

Satz 20.6 (Polarkoordinaten im Komplexen). *Jedes $z \in \mathbb{C}$ lässt sich schreiben als*

$$z = r\cdot\exp(i\varphi)$$

mit $\varphi \in \mathbb{R}$ und $r = |z| \in [0,\infty[$. Für $z \neq 0$ ist φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π eindeutig bestimmt.

Die Zahl φ ist der Winkel zwischen der positiven reellen Achse und dem Ortsvektor zur komplexen Zahl z und wird *Argument* oder *Winkel* von z genannt. Wegen $|z| = |r\exp(i\varphi)| = r$ ist r der *Betrag* von z.



Beweis.
Ist $z = 0$, so ist $z = 0\exp(i\varphi)$ mit beliebigem φ. Ist $z \neq 0$, so setzen $\zeta = z/|z| = z/r$. Dann gilt $|\zeta| = |z/r| = 1$. Wir schreiben $\zeta = \xi + i\eta$ mit $\eta, \xi \in \mathbb{R}$ und also gilt $\xi^2 + \eta^2 = 1$. Insbesondere folgt $|\xi| \leq 1$. Wir definieren daher

$$\alpha = \arccos(\xi).$$

Das bedeutet $\cos(\alpha) = \xi$ und also $\sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-\cos(\alpha)^2} = \pm\sqrt{1-\xi^2} = \pm\eta$. Wir setzen also $\varphi = \alpha$ falls $\sin(\alpha) = \eta$ und $\varphi = -\alpha$, falls $\sin(\alpha) = -\eta$. In jedem Fall gilt dann

$$\exp(i\varphi) = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = \xi + i\eta = \zeta.$$

Damit gilt dann $z = r\zeta = r\exp(i\varphi)$.

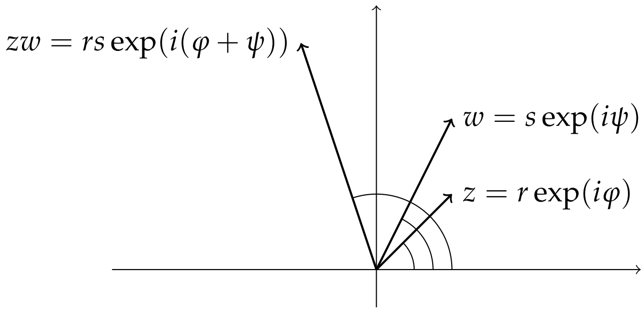
Zur Eindeutigkeit von φ (bis auf Vielfache von 2π): Da $\zeta = \exp(i\varphi) = \exp(i\psi)$ gilt, falls $\exp(i(\varphi-\psi)) = 1$ gilt, folgt aus Korollar **??**, dass $\varphi - \psi = 2\pi k$ mit $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Mit diesem Satz können wir die Multiplikation von komplexen Zahlen graphisch darstellen: Sind $z = r\exp(i\varphi)$ und $w = s\exp(i\psi)$, dann ist

$$zw = r\exp(i\varphi)s\exp(i\psi) = rs\exp(i(\varphi+\psi)).$$

Wir sehen also:

Bei der Multiplikation von komplexen Zahlen werden die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.



Satz 20.7. *Für $n \in \{1,2,3,\dots\}$ hat die Gleichung $z^n = 1$ genau n komplexe Lösungen, nämlich die Zahlen*

$$z_k = \exp(i\tfrac{2k\pi}{n}), \quad k = 0,1,\dots,n-1,$$

diese Lösungen nennt man die n-ten Einheitswurzeln.

Beweis.
Es sei z eine Lösung von $z^n = 1$. Wir nutzen Polarkoordinaten und schreiben $z = r\exp(i\varphi)$ mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und $r \geq 0$. Dann gilt

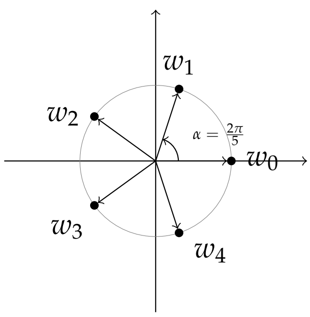
$$1 = |z^n| = |z|^n = r^n.$$

Da $r \geq 0$ gilt, folgt (vgl. Satz 9.4), diese Gleichung nur $r = 1$ als Lösung hat Es folgt

$$z^n = (\exp(i\varphi))^n = \exp(in\varphi) = 1.$$

Nach Korollar **??** gibt es also ein $k \in \mathbb{Z}$, so dass $n\varphi = 2k\pi$. Es gilt also $\varphi = 2k\pi/n$ und da $0 \leq \varphi < 2\pi$ gelten soll, muss $0 \leq k < n$ gelten. ☐

Die fünften Einheitswurzeln liegen zum Beispiel auf den Ecken eines gleichmäßigen 5-Ecks, welches eine Spitze in 1 und die Mitte im Ursprung hat:



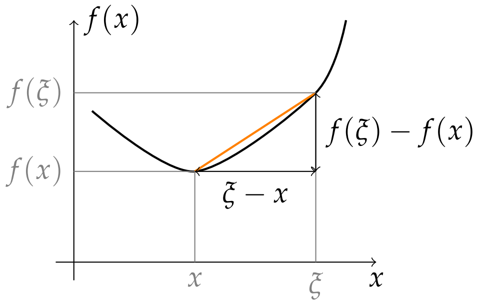
21 Differenzierbarkeit und Ableitungen

Die Ableitung einer Funktion soll angeben, wie sehr sich die Funktion lokal ändert. Anders gesagt: Mit der Ableitung suchen wir die Steigung einer Funktion in einem Punkt. Diese "Steigung in einem Punkt" wird erklärt als Grenzwert von Steigungen von Sekanten:

Der Quotient

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

wird *Differenzenquotient* genannt und gibt die Steigung der Sekante an, welche durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(\xi, f(\xi))$ läuft:



Definition 21.1. Es sei $V \subset \mathbb{R}$ und $f : V \to \mathbb{R}$. Die Funktion f heißt in *differenzierbar in* $x \in V$, falls der Grenzwert

$$f'(x) := \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in V \setminus \{x\}}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

existiert. Die Funktion f heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt $x \in V$ differenzierbar ist.

Der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in V \setminus \{x\}}}$$

bedeutet, dass alle Folgen $\xi_n \in V$ mit $\xi_n \neq x$ und $\xi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ betrachtet werden müssen. Insbesondere kann der Grenzwert nur existieren, wenn mindestens eine solche Folge existiert und das ist der Fall, wenn x ein Häufungspunkt von V ist.

Alternativ nutzt man auch den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

und lässt $h \to 0$ gehen.

Hat man es mit Funktionen auf komplizierten Definitionsbereichen zu tun, ist es in dieser Schreibweise etwas komplizierter, auszudrücken, welche Folgen $h_n \to 0$ betrachtet werden müssen.

Im Allgemeinen müssen Differenzenquotienten nicht konvergieren, d.h. eine Funktion kann durchaus in einem (oder mehreren oder sogar allen) Punkte nicht differenzierbar sein. Zuerst ein paar Beispiele für differenzierbare Funktionen:

Beispiel.

1. Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ ist differenzierbar mit $f'(x) = 0$, denn es gilt

$$f'(x) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in V \setminus \{x\}}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in V \setminus \{x\}}} \frac{c - c}{\xi - x} = 0.$$

2. Die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = cx$ ist differenzier-

bar mit $f'(x) = c$, denn es gilt

$$f'(x) = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in V \setminus \{x\}}} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in V \setminus \{x\}}} \frac{c(\xi - x)}{\xi - x} = c.$$

3. Auch die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar: Mit Aufgabe 3 i) von Aufgabenblatt 10 sieht man:

$$\begin{aligned} \exp'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\exp(x)(\exp(h) - 1)}{h} \\ &= \exp(x) \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h}}_{=1} = \exp(x). \end{aligned}$$

4. Auch Sinus und Kosinus sind differenzierbar:

   Aus den Restgliedabschätzungen für Sinus und Kosinus (jeweils für $n = 0$) erhalten wir die Grenzwerte

$$\left|\tfrac{\sin(h)}{h} - 1\right| \leq \tfrac{|h|^2}{6} \xrightarrow{h \to 0} 0, \quad \left|\tfrac{\cos(h)-1}{h}\right| \leq \tfrac{|h|}{4} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

   Daraus folgen schon (da $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$) die speziellen Werte $\sin'(0) = 1$ und $\cos'(0) = 0$.

   Mit den Additionstheoremen (Satz 19.3) folgen dann

$$\tfrac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \tfrac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} = \sin(x)\tfrac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\tfrac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \to 0} \cos(x)$$

   und

$$\tfrac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \tfrac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} = \cos(x)\tfrac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\tfrac{\sin(h)}{h} \xrightarrow{h \to} -\sin(x),$$

   also gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$.

$\triangle$

Der Absolutbetrag $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ ist in $x = 0$ nicht differenzierbar: Für Folge $h_n = (-1)^n/n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $x = 0$, gilt

$$\frac{f(x + h_n) - f(x)}{h_n} = \frac{|h_n| - |0|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{(-1)^n}{n}} = (-1)^n,$$

das heißt, der Grenzwert existiert nicht.

In solchen Fällen existieren manchmal Ableitungen "von links" und/oder "von rechts": $f : V \to \mathbb{R}$ heißt *von rechts (von links)* differenzierbar, falls der Grenzwert

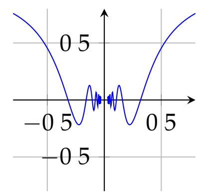
$$f'_+(x) := \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \quad \left(\text{bzw. } f'_-(x) := \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\right)$$

existiert. Ist z.B. $f(x) = |x|$ wieder der Absolutbetrag, so ist

$$f'_+(0) = 1, \quad \text{und} \quad f'_-(0) = -1.$$

Für die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & \text{falls } x\neq 0\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ gilt: f ist stetig in $x=0$ (da $0\leq |f(x)|\leq |x|$), aber weder die Ableitung von links oder rechts existieren.

Die Funktion $x\mapsto x\sin(1/x)$ (in der Nähe des Ursprungs ist der Graph nicht akkurat, da er zu schnell oszilliert):



Satz 21.2. *Es sei $V\subset\mathbb{R}$ und $a\in V$ ein Häufungspunkt. Dann gilt: $f:V\to\mathbb{R}$ ist genau dann in a differenzierbar, falls es ein $c\in\mathbb{R}$ gibt, so dass*

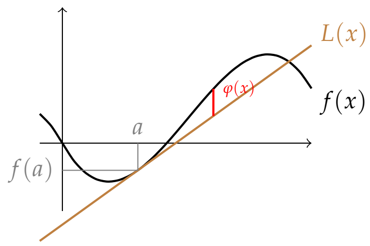
$$f(x)=f(a)+c(x-a)+\varphi(x)$$

und für die Funktion φ (den "Fehler bei linearer Approximation") gilt

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{x-a}=0.$$

In diesem Fall ist $c=f'(a)$.

Die Funktion f gemeinsam mit der Tangente $L(x)=f(a)+f'(a)(x-a)$ im Punkt $(a,f(a))$:



Beweis.
Sei zuerst f differenzierbar in a und wir setzen $c=f'(x)$. Dann ist der Fehler

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)$$

und daher gilt

$$\frac{\varphi(x)}{x-a}=\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-f'(a)\xrightarrow{x\to a}0.$$

Für die Umkehrung existiere das φ wie gefordert. Dann gilt

$$\lim_{x\to a}\Big(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}-c\Big)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{x-a}=0$$

und dies zeigt die Existenz von $f'(x)$ und $f'(x)=c$. □

Korollar 21.3. *Ist f in a differenzierbar, so ist f auch stetig in a.*

Da aus $\varphi(x)/(x-a)\to 0$ für $x\to 0$ auch $\varphi(x)\to 0$ folgt, gilt $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}(f(a)+c(x-a)+\varphi(x))=f(a)$.

Satz 21.4 (Ableitungsregeln)**.** *Es seien $f,g:V\to\mathbb{R}$ in $x\in V$ differenzierbar und $\lambda\in\mathbb{R}$. Dann gilt:*

i) *$f+\lambda g$ ist in x differenzierbar mit*

$$(f+\lambda g)'(x)=f'(x)+\lambda g'(x).\qquad\text{(Linearität)}$$

ii) *fg ist in x differenzierbar mit*

$$(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x).\qquad\text{(Produktregel)}$$

iii) *Ist $g(\xi)\neq 0$ für alle $\xi\in V$, so ist auch f/g in x differenzierbar mit*

$$\Big(\frac{f}{g}\Big)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}.\qquad\text{(Quotientenregel)}$$

Beweis.
i) folgt direkt aus der Linearität des Grenzwertes. Für ii) rechnen wir

$$\frac{f(x+h)\overbrace{g(x+h)}^{-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)}-f(x)g(x)}{h} = \underbrace{f(x+h)}_{\to f(x)}\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)} + \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)}g(x)$$

(wobei wir die Stetigkeit von f in x benutzt haben (Korollar 21.3)). Schließlich zu iii): Die Stetigkeit von g in x zeigt

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)}-\frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x)-g(x+h)}{g(x+h)g(x)h} \to \frac{-g'(x)}{g(x)^2}.$$

Es folgt $(1/g)' = -g'/g^2$ und zusammen mit ii) folgt die Behauptung. □

Satz 21.5 (Ableitung der Umkehrfunktion). *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall was mehr als einen Punkt enthält, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, $J := f(I)$, $g = f^{-1} : J \to I$ die Umkehrfunktion und sei f in x differenzierbar. Ist dann $f'(x) \neq 0$, so ist g in $y := f(x)$ differenzierbar und es gilt*

$$g'(y) = \tfrac{1}{f'(g(y))}.$$

Beweis.
Es sei y_n eine Folge in $J \setminus \{y\}$ mit $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ und $x_n = g(y_n)$. Da g stetig und bijektiv ist (Satz 18.2), folgt $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ und $x_n \neq x$. Damit folgt

$$\tfrac{g(y_n)-g(y)}{y_n-y} = \tfrac{x_n-x}{f(x_n)-f(x)} = \left(\tfrac{f(x_n)-f(x)}{x_n-x}\right)^{-1} = (f'(x))^{-1} = \tfrac{1}{f'(g(y))}.$$

□

Satz 21.6 (Kettenregel). *Ist $f : V \to \mathbb{R}$, $g : W \to \mathbb{R}$ mit $f(V) \subset W$, f in x differenzierbar und g in $y := f(x)$ differenzierbar, so ist $g \circ f$ in x differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

Beweis.
Wir erweitern den Differenzenquotienten zu

$$\tfrac{g(f(\xi))-g(f(x))}{\xi-x} = \tfrac{g(f(\xi))-g(f(x))}{f(\xi)-f(x)}\tfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}.$$

Da $f(\xi) \to f(x)$ für $\xi \to x$ gilt, folgt

$$\tfrac{g(f(\xi))-g(f(x))}{\xi-x} \to g'(f(x))f'(x).$$

□

Beispiel.

1. Die Funktion $f(x) = \tan(x)$ ist (dort wo sie definiert ist) differenzierbar und nach der Quotientenregel gilt

   $$\tan'(x) = \left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)}^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}.$$

   (Alternativ könnten wir auch wie folgt umformen: $\tan'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2$.)

2. Da $\log = \exp^{-1}$ gilt, ist

   $$\log'(x) = \frac{1}{\exp'(\log(x))} = \frac{1}{\exp(\log(x))} = \frac{1}{x}.$$

3. Für $f(x) = x^a$ für $x \geq 0$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $f(x) = \exp(a\log(x))$ und mit der Kettenregel folgt

   $$f'(x) = \exp(a\log(x))\frac{a}{x} = x^a\frac{a}{x} = ax^{a-1}$$

$\triangle$

22 Kurvendiskussion

Ableitungen helfen, das lokale Verhalten einer Funktion zu verstehen, z.B. lassen sich lokale Minimia und Maxima mit Hilfe von Ableitungen bestimmen.

Definition 22.1. Es sei $f : D \to \mathbb{R}$. Wir sagen, f hat in x ein *lokales Maximum (Minimum)*, falls es ein $\epsilon > 0$ gilt, so dass für alle $\xi \in U_\epsilon(x)$ gilt $f(\xi) \le f(x)$ (bzw. $\ge$). Ist die Ungleichung für $x \neq \xi$ strikt, so sprechen wir von einem *strikten* lokalem Maximum (bzw. Minimum).

Gilt $f(x) \ge f(\xi)$ für *alle* $\xi \in I$, so sprechen wir von einem *globalen* Maximum (Minimum und strikt entsprechend).

Der Begriff *Extremum* ist ein Oberbegriff für Maximum und Minimum (so wie monoton ein Oberbegriff für fallend und wachsend ist).

Satz 22.2 (Notwendiges Kriterium für lokale Extrema). *Es sei $I =]a,b[$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Hat f ein lokales Extremum in $x \in I$ und ist f in x differenzierbar, so gilt $f'(x) = 0$.*

Aus "$f'(x) = 0$" folgt *nicht*, dass x ein lokales Extremum von f ist, wie die Funktion $f(x) = x^3$ mit $f'(x) = 3x^2$ und $f'(0) = 0$ zeigt.
Nach dem Maximum-/Minimumprinzip (Satz 17.8) nimmt jede stetige Funktion auf einem *kompakten* Intervall $[a,b]$ Maximum und Minimum an. Falls ein Extremum x am Rand liegt, muss aber nicht automatisch $f'(x) = 0$ sein, wie das Beispiel $I = [0,1]$, und $f(x) = x$ zeigt.

Beweis.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x ein lokales Maximum (ist x ein lokales Minimum, betrachte $-f$ statt f). Dann existiert $\epsilon > 0$, so dass einerseits $U_\epsilon(x) \subset I$ und für $\xi \in U_\epsilon(x)$ gilt stets $f(x) \ge f(\xi)$. Da f differenzierbar ist, stimmen die Ableitung von links und von rechts überein. Für die Ableitung von links gilt

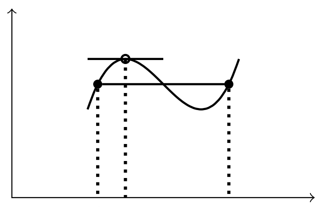
$$f'(x) = f'_-(x) = \lim_{\xi \nearrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \ge 0$$

da $\xi \le x$ und $f(\xi) \le f(x)$. Für die Ableitung von rechts gilt

$$f'(x) = f'_+(x) = \lim_{\xi \searrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \le 0$$

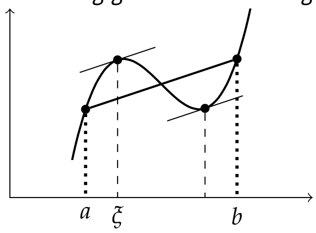
da hier $\xi \ge x$ aber trotzdem $f(\xi) \le f(x)$. Es gilt also $0 \le f'(x) \le 0$. ☐

Satz 22.3 (Satz von Rolle). *Sei $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) = f(b)$. Ist f in $]a,b[$ differenzierbar, so gibt es $\xi \in]a,b[$ mit $f'(\xi) = 0$.*



Beweis.
Ist f konstant, so ist $f'(x) = 0$ für alle x und die Folgerung gilt. Sei f also nicht konstant. Dann gibt es $x_0 \in]a,b[$ mit $f(x_0) > f(a)$ oder $f(x_0) < f(a)$ (ggf. gibt es zu beiden Fällen ein entsprechendes x_0, aber das spielt keine Rolle). Im ersten Fall wird nach Satz 17.8 das globale (also auch lokale) Maximum (im zweiten Fall Minimum) in einem $\xi \in]a,b[$ angenommen (da $\xi = a$ und $\xi = b$) nicht möglich sind. Aus Satz 22.2 folgt $f'(\xi) = 0$. ☐

Der Mittelwertsatz sagt, dass es bei differenzierbaren Funktionen immer mindestens einen Punkt gibt, in dem die Ableitung gleich Sekantensteigung ist.



Wie das Bild zeigt, kann es auch mehrere solche Punkte geben.
Der Vergleich mit der vorigen Skizze zeigt: Der Mittelwertsatz ist eine gekippte Version des Satzes von Rolle.

Satz 22.4 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Ist f in $]a, b[$ differenzierbar, so existiert ein $\xi \in]a, b[$, so dass*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

Beweis.
Wir führen den Satz auf den Satz von Rolle zurück, indem wir eine geeignete (affin) lineare Funktion abziehen: Wir definieren

$$F(x) = f(x) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a).$$

Dann ist F wieder stetig in $[a, b]$ und differenzierbar in $]a, b[$ und außerdem gilt $F(a) = f(a) = F(b)$. Nach dem Satz von Rolle gibt es dann $\xi \in]a, b[$ mit $F'(\xi) = 0$. Die Behauptung folgt, da

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \tfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Wir können zahlreiche Folgerungen aus dem Mittelwertsatz ziehen.

Korollar 22.5. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, in $]a, b[$ differenzierbar und für alle $\xi \in]a, b[$ gelte $m \leq f'(\xi) \leq M$. Dann gilt für $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$ immer*

$$m(x_2 - x_1) \leq f(x_2) - f(x_1) \leq M(x_2 - x_1).$$

Wir setzen $a = x_1$ und $b = x_2$ im Mittelwertsatz und schätzen ab.

Korollar 22.6. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in]a, b[$, so ist f konstant.*

Folgt aus dem vorigen Korollar mit $m = M = 0$.

Korollar 22.7. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und in $]a, b[$ differenzierbar, so gilt:*

i) Ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0$, ≤ 0 oder < 0) für alle $x \in]a, b[$, so ist f wachsend (strikt wachsend, fallend, strikt fallend) in $[a, b]$.

ii) Ist f wachsend (bzw. fallend), so folgt $f'(x) \geq 0$ (bzw. ≤ 0) für alle $x \in]a, b[$.

Ist f streng wachsend, so muss *nicht* $f' > 0$ folgen, wie die Funktion $f(x) = x^3$ zeigt.

Für i) und ≥ 0 (andere Fälle analog): Wäre f nicht wachsend, so gäbe es x_1 und x_2 mit $x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$. Nach dem Mittelwertsatz gäbe es dann $\xi \in]x_1, x_2[$ mit $f'(\xi) = (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) < 0$ was im Widerspruch zu $f'(\xi) \geq 0$ steht.
Zu ii): Ist f wachsend, so gilt für $\xi \neq x$ immer $(f(\xi) - f(x))/(\xi - x) \geq 0$, woraus per Grenzübergang $\xi \to x$ folgt, dass $f'(x) \geq 0$.

Ist eine Funktion f differenzierbar, so können wir untersuchen, ob auch f' wieder differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so können wir *höhere Ableitungen* von f untersuchen:

Definition 22.8. Zu $n \in \{0,1,2,\dots\}$ definieren die n-te Ableitung von $f : V \to \mathbb{R}$ in x als $f^{(n)}(x)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} f^{(0)}(x) &= f(x), \\ f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x), \quad n \in \{0,1,2\dots\}. \end{aligned}$$

falls alle entsprechenden Ableitungen existieren.

Die zweite Ableitung wird auch mit f'' bezeichnet, die dritte manchmal mit f'''

Existiert die n-te Ableitung in x, so nennen wir f *n-mal differenzierbar in x*. Gilt dies für jedes x, so nennen wir f *n-mal differenzierbar* und ist $f^{(n)}$ sogar eine stetige Funktion, so nennen wir f *n-mal stetig differenzierbar.*

Damit die zweite Ableitung existieren kann, muss f nicht nur in x existieren, sondern sogar in einer Umgebung von x!

Satz 22.9 (Hinreichendes Kriterium für strikte Extrema)**.** *Ist $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und in $x \in]a,b[$ zweimal differenzierbar mit $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$ (bzw. $f''(x) < 0$), so hat f in x ein striktes lokales Minimum (Maximum).*

Dass das Kriterium nicht notwendig für strikte Extrema ist, zeigt die Funktion $f(x) = x^4$, welche in $x = 0$ ein striktes Minimum hat, aber $f''(0) = 0$ erfüllt.

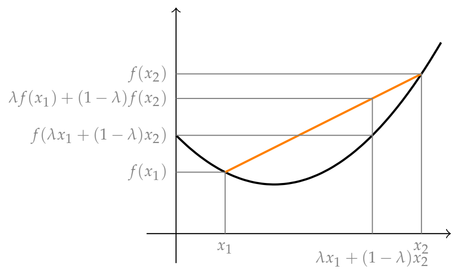
Beweis.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $f''(x) > 0$ (ansonsten betrachte $-f$ statt f). Wegen

$$f''(x) = \lim_{\xi \to x} \tfrac{f'(\xi) - f'(x)}{\xi - x} > 0$$

gibt es ein $\epsilon > 0$, so dass $\frac{f'(\xi) - f(x)}{\xi - x} > 0$ für $0 \leq |\xi - x| < \epsilon$. Da aber $f'(x) = 0$ gilt, folgt daraus $f'(\xi) < 0$ für $x - \epsilon < \xi < x$ und $f'(\xi) > 0$ für $x < \xi < x + \epsilon$. Also ist f auf $[x - \epsilon, x]$ fallend und auf $[x, x + \epsilon]$ wachsend, was die Behauptung zeigt. □

Neben Monotonie sind Konvexität und Konkavität zentral, bei der Untersuchung von Funktionen:

Konvexität bedeutet, dass der Graph von f immer unterhalb der Sekante liegt:



Definition 22.10. Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *konvex*, falls für alle $x_1, x_2 \in D$ und alle $0 < \lambda < 1$ immer gilt

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

Eine Funktion f heißt *konkav*, wenn $-f$ konvex ist.

Satz 22.11. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : D \to \mathbb{R}$.*

1. *Ist f einmal differenzierbar, so gilt: f ist konvex genau dann, wenn f' wachsend ist.*

2. *Ist f zweimal differenzierbar, so gilt: f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in D$.*

Beweis.
Zu i): Sei f konvex, $\lambda \in]0,1[$ und $x_1, x_2, x_3 \in D$ mit $x_1 < x_2 < x_3$ und $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3 = x_3 + \lambda(x_1 - x_3)$. Dann gilt $\lambda = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}$ und $1 - \lambda = \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}$. Da f konvex ist, folgt

$$f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) = \tfrac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \tfrac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3).$$

Da $x_3 > x_1$, folgt daraus

$$(x_3 - x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_3).$$

Wir subtrahieren $(x_3 - x_1)f(x_1)$ auf beiden Seiten, dividieren durch $x_3 - x_1$ und $x_2 - x_1$ und bekommen

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \tfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

Es folgt

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \lim_{x_1 \to x_3} \tfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} = f'(x_3).$$

Ist umgekehrt f' wachsend, so sei wieder $x_1 < x_2 < x_3$ mit $x_2 = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_3$. Nach dem Mittelwertsatz gibt es dass $\xi_1 \in]x_1, x_2[$ und $\xi_2 \in]x_2, x_3[$, so dass

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2) = \tfrac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

Da $x_2 - x_1 = (1-\lambda)(x_3 - x_1)$ und $x_3 - x_2 = \lambda(x_3 - x_1)$ gilt, folgt

$$\tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{1-\lambda} \leq \tfrac{f(x_3)-f(x_2)}{\lambda}$$

und daraus folgt $f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3)$.

Zu ii): Dies folgt aus Korollar 22.7, da f' wachsend ist genau dann, wenn $f'' \geq 0$ ist. □

Beispiel.
Für $f(x) = \log(x)$ gilt $f'(x) = 1/x$. Da f' für $x \geq 0$ fallend ist, ist die Logarithmus-Funktion konkav. △

Lemma 22.12 (Youngsche Ungleichung). *Es seien $p, q \in]1, \infty[$ so, dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $a, b \geq 0$*

$$ab \leq \tfrac{a^p}{p} + \tfrac{b^q}{q}$$

Beweis.
Da log konkav ist, gilt für $x, y > 0$ die entsprechende Konkavitätsungleichung (mit $\lambda = 1/p$ und $1 - \lambda = 1 - 1/p = 1/q$)

$$\log(\tfrac{1}{p}x + \tfrac{1}{q}y) \geq \tfrac{1}{p}\log(x) + \tfrac{1}{q}\log(y).$$

Wendet man auf beide Seiten exp an, so folgt

$$\tfrac{x}{p} + \tfrac{y}{q} \geq x^{1/p} y^{1/q}.$$

Mit $a = x^{1/p}$ und $b = y^{1/q}$ (also $x = a^p$ und $y = b^q$ folgt die Behauptung für $a, b > 0$. Für $a = 0$ oder $b = 0$ gilt die Behauptung sowieso, da links 0 steht. $\square$

23 Das Riemann-Integral

Ziel dieses Abschnittes ist es, den Begriff "Fläche unter einer Kurve" zu definieren. Dazu legen wir zuerst die Konvention fest, das Flächen unterhalb der x-Achse negativ zählen. Die Fläche unter einer Kurve wird "Integral" genannt. Wir erklären den Begriff zuerst für besonders einfache, nämlich stückweise konstante Funktionen, sogenannte Treppenfunktionen. Für allgemeinere Funktionen benutzen wir einen Grenzübergang (genauer: durch Supremum und Infimum).

Definition 23.1. Es sei $a < b$ und $I = [a, b]$. Eine Funktion $\varphi : I \to \mathbb{R}$ eine *Treppenfunktion*, wenn es eine *Unterteilung* von I, d.h. $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, gibt und φ auf jedem Teilintervall $]x_i, x_{i+1}[$, $i = 0, \ldots, n-1$, konstant ist. (Die Werte von φ an den Stellen x_i sind dabei beliebig.)

Die Menge aller Treppenfunktionen auf dem Intervall I bezeichnen wir mit $\mathcal{T}(I)$

Für eine Funktion $f : A \to B$ und $C \subset A$ bezeichnen wir mit $f|_C$ die *Einschränkung* von f auf die Menge C, d.h. die Funktion $f|_C : C \to B$ mit $f|_C(x) = f(x)$ für alle $x \in C$. Damit können wir die Tatsache, dass φ auf den Interallen $]x_i, x_{i+1}[$ konstant ist, auch schreiben als: Es gibt Zahlen $c_1, \ldots, c_n$, so dass $\varphi|_{]x_{i-1},x_i[} = c_i$ für $i = 1, \ldots, n$.

Lemma 23.2. *Die Menge $\mathcal{T}(I)$ ist ein Vektorraum.*

Beweis.
Die Menge $\mathcal{T}(I)$ aller Treppenfunktionen ist eine Teilmenge des Vektorraumes aller Funktionen von $I \to \mathbb{R}$. Wir benutzen daher das Unterraumkriteriuem und müssen nur zeigen, dass für $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt, dass $\varphi + \lambda\psi$ wieder eine Treppenfunktion ist.

Da φ, ψ Treppenfunktionen sind, gibt es zugehörige Unterteilungen

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b \quad \text{bzw.} \quad a = x'_0 < x'_1 < \cdots < x'_m = b.$$

Wir können diese zu einer neuen, feineren, Unterteilung vereinigen und neu aufsteigend durchnummerieren, d.h.

$$\{t_0, \ldots, t_k\} = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{x'_0, \ldots, x'_m\}$$

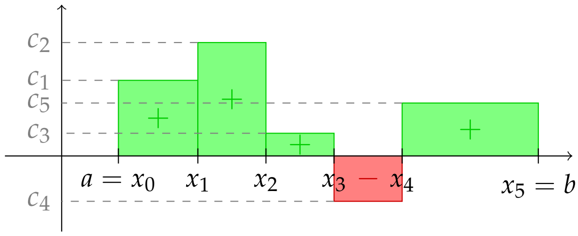
mit $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$. Da φ und ψ auch auf jedem Teilintervall $]t_i, t_{i+1}[$ konstant sind, gilt das auch für $\varphi + \lambda\psi$ und daher ist $\varphi + \lambda\psi \in \mathcal{T}(I)$. □

Definition 23.3 (Integral einer Treppenfunktion)**.** Für eine Treppenfunktion $\varphi \in \mathcal{T}(I)$ bzgl. der Unterteilung $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ und $\varphi_{]x_{i-1},x_i[} = c_i$ für, $i = 1, \ldots, n$, definieren wir

Die Schreibweise für Integrale ist etwas redundant, insbesondere hat das dx keinerlei eigene Bedeutung. Um die Fläche unter der Treppenfunktion zu bezeichnen, würde auch $\int_a^b \varphi$ ausreichen. Die Schreibweise $\int_a^b \varphi(x)dx$ wird aber dann praktisch, wenn der Integrand von mehreren Variablen abhängt. dann sagt das dx, dass bezüglich der Variablen x integriert werden soll. Wir benutzen daher auch die Schreibweise $\int_a^b \varphi$ oder nur $\int \varphi$ wenn der Rest klar ist.

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Diese Definition entspricht der (entsprechend der Konvention mit Vorzeichen versehen) Fläche zwischen x-Achse und dem Graphen:



Da es zu einer Treppenfunktion mehrere Unterteilungen geben kann, muss man noch zeigen, dass der Wert des Integrals unabhängig von der gewählter Unterteilung ist. Das erreicht man, indem man zu zwei Unterteilungen eine gemeinsame, feinere Unterteilung wählt und nachrechnet, das eine feinere Unterteilung das gleiche Integral ergibt.

Satz 23.4 (Linearität und Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen)**.** *Es $I = [a, b]$, $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

i) $\int_a^b (\varphi + \lambda\psi)(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx + \lambda \int_a^b \psi(x)dx$

ii) Aus $\varphi \leq \psi$ folgt $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$.

$\varphi \leq \psi$ meint die *punktweise* Ungleichung, d.h. für alle x soll $\varphi(x) \leq \psi(x)$ gelten.

Beweis.
Wie im Beweis von Lemma 23.2 können wir annehmen, dass φ und ψ die gleiche Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ haben. Wir bezeichnen $\varphi|_{]t_{i-1},t_i[} = c_i$, $\psi|_{]t_{i-1},t_i[} = d_i$. Damit gilt

$$\int_a^b (\varphi + \lambda\psi)(x)dx = \sum_{k=1}^{n} (c_k + \lambda d_k)(t_k - t_{k-1}) = \int_a^b \varphi(x)dx + \lambda \int_a^b \psi(x)dx$$

was i) zeigt. Für ii) muss dann $c_i \leq d_i$ gelten und damit ist auch die Behauptung klar. □

Für beliebige beschränkte Funktionen definieren wir jetzt Ober- und Unterintegral:

Definition 23.5. Es sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx := \inf\{\int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in \mathcal{T}(I),\ \varphi \geq f\}$$

das *Oberintegral* von f und

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \sup\{\int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in \mathcal{T}(I),\ \varphi \leq f\}$$

das *Unterintegral* von f.

Für unbeschränkte f können wir Ober- bzw. Unterintegral nicht erklären, da es keine Treppenfunktion oberhalb bzw. unterhalb von f geben muss.

Beispiel.

1. Ist φ eine Treppenfunktion, so gilt $\underline{\int_a^b}\varphi(x)dx = \int_a^b \varphi(x)dx = \overline{\int_a^b}\varphi(x)dx$, da jeweils φ selbst in der entsprechenden Menge zugelassen ist.

2. Dass Ober- und Unterintegral nicht immer gleich sein müssen, sieht man an der sogenannten *Dirichlet-Funktion* $D : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ist nämlich $I_i =]t_{i-1}, t_i[$ ein offenes Intervall, so gibt es sowohl rationale, also auch irrationale Werte in I_i. Daher gilt für jede Treppenfunktion $\varphi \geq D$ immer $\varphi \geq 1$ und für jede Treppenfunktion $\varphi \leq D$ immer $\varphi \leq 0$. Es gilt

$$\overline{\int_0^1} D(x)dx = 1, \quad \underline{\int_0^1} D(x)dx = 0$$

da das Infimum bzw. Supremum für $\varphi \equiv 1$ bzw. $\varphi \equiv 0$ angenommen werden.

△

Definition 23.6. Es sei $I = [a,b]$. Eine beschränkte Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrierbar*, falls ihr Ober- und Unterintegral übereinstimmen. In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x)dx := \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

das *Riemann-Integral* von f.

Direkt aus der Definition von Supremum und Infimum bekommen wir

Korollar 23.7. *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf $I = [a,b]$ ist Riemann-integrierbar, genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$ gibt, mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und*

$$\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \epsilon.$$

Satz 23.8 (Linearität und Monotonie des Riemann-Integrals)**.** *Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist $f + \lambda g$ ebenfalls Riemann-interierbar und es gilt*

$$\int_a^b (f + \lambda g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx.$$

Gilt $f \leq g$, so gilt auch $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Mit anderen Worten: Die Riemann-integrierbaren Funktionen bilden einen Vektorraum und die Abbildung $f \mapsto \int_a^b f(x)dx$ ist ein lineares Funktional auf diesem Vektorraum.

Beweis.
Zuerst zeigen wir, dass für Riemann-integrierbare f, g auch $f + g$ Riemann-integrierbar mit $\int(f+g) = \int f + \int g$ ist: Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ mit $\varphi_1 \leq f \leq \psi_1$,

$\varphi_2 \leq g \leq \psi_2$ und

$$\int_a^b \psi_1(x)dx - \int_a^b \varphi_1(x)dx \leq \tfrac{\epsilon}{2}, \qquad \int_a^b \psi_2(x)dx - \int_a^b \varphi_2(x)dx \leq \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Es gilt $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g \leq \psi_1 + \psi_2$ und

$$\int_a^b (\psi_1(x) + \psi_2(x))dx - \int_a^b (\varphi_1(x) - \varphi_2(x))dx \leq \epsilon.$$

Das zeigt die Riemann-Integrierbarkeit von $f + g$ und die Formel für das Integral der Summe (d.h. den Fall $\lambda = 1$).

Zeigen wir nun, dass λf Riemann-integrierbar ist: Für $\lambda = 0$ ist die Formel klar und wir betrachten zuerst $\lambda > 0$. Zu $\epsilon > 0$ gibt es Treppenfunktionen φ und ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx \leq \frac{\epsilon}{\lambda}$. Dann gilt $\lambda\varphi \leq \lambda f \leq \lambda\psi$ und $\int_a^b (\lambda\psi)(x)dx - \int_a^b (\lambda\varphi)(x)dx \leq \epsilon$, was die Behauptung für $\lambda > 0$ zeigt. Jetzt genügt es, sich noch den Fall $\lambda = -1$ zu überlegen. Hier gilt aber: Aus $\varphi \leq f \leq \psi$ folgt $-\psi \leq -f \leq -\varphi$ und wir können wie eben argumentieren.

Die Monotonie des Riemann-Integrals folgt direkt aus der Monotonie des Integrals für Treppenfunktionen. □

Definition 23.9. Es sei $V \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : V \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls gilt:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, x' \in V : |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \epsilon.$$

Der Unterschied zur ϵ-δ-Definition der Stetigkeit ist klein, aber fein: $f : V \to \mathbb{R}$ ist stetig in ganz V, wenn

$$\forall x \in V \, \forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x' \in V : \\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \epsilon$$

und *gleichmäßig* stetig in V, wenn

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in V \, \forall x' \in V : \\ |x - x'| < \delta \implies |f(x) - f(x')| \leq \epsilon.$$

Es kommt also nur auf die Stelle des Quantors $\forall x$ an. Anders ausgedrückt: Bei Stetigkeit, darf der Wert von δ von ϵ *und auch von* x abhängen, bei gleichmäßiger Stetigkeit muss δ unabhängig von x sein, d.h. ein δ was zu einem ϵ passt, muss *für alle* $x \in V$ funktionieren.

Satz 23.10. *Es sei $I = [a, b]$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und es sei $\epsilon > 0$. Dann existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in \mathcal{T}(I)$, so dass $\varphi \leq f \leq \psi$ und $|\varphi - \psi| < \epsilon$.*

Beweis.
Da f gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $x, x' \in I$ mit $|x - x'| \leq \delta$ immer gilt $|f(x) - f(x')| \leq \epsilon$.

Wir wählen ein Unterteilung von I, so dass $x_k - x_{k-1} < \delta$ gilt und bezeichnen $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ und $I_k^\circ = \,]x_{k-1}, x_k[$. Dann definieren wir

$$\psi|_{I_k^\circ} = \sup_{x \in I_k} f(x), \qquad \varphi|_{I_k^\circ} = \inf_{x \in I_k} f(x).$$

Da f stetig ist, werden nach Satz 17.8 Supremum und Infimum angenommen, d.h. es gibt $\overline{x}_k, \underline{x}_k \in I_k$ mit $\psi|_{I_k^\circ} = f(\overline{x}_k)$ und $\varphi|_{I_k^\circ}(x) = f(\underline{x}_k)$. Beachte: Es gilt immer $|\overline{x}_k - \underline{x}_k| \leq \delta$ und daher ist $|f(\overline{x}_k) - f(\underline{x}_k)| \leq \epsilon$ und das zeigt $\psi(x) - \varphi(x) < \epsilon$ auf I_k°. Da wir dies auf jedem I_k machen können, ist der Beweis fertig. □

Korollar 23.11. *Eine gleichmäßig stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf $I = [a, b]$ ist Riemann-integrierbar.*

Nach Satz 23.10 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi < \epsilon$ und mit Korollar 23.7 folgt daraus die Riemann-Integrierbarkeit.

Es stellt sich heraus, dass wir auf das "gleichmäßig" in Satz 23.10 (und damit auch in Korollar 23.11) verzichten können:

Satz 23.12. *Eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall ist gleichmäßig stetig.*

Erinnere: Ein Intervall ist kompakt, wenn es abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis. Es sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Angenommen, f wäre nicht gleichmäßig stetig. Dann gäbe es ein $\epsilon > 0$ und zu jedem n zwei $x_n, x'_n \in I$, so dass $|x_n - x'_n| < 1/n$ und $|f(x_n) - f(x'_n)| > \epsilon$. Da die Folge (x_n) beschränkt ist, hat sie nach Bolzano-Weierstraß (Satz 10.2) eine konvergente Teilfolge (x_{n_k}) mit Grenzwert $p \in I$. Wegen $|x'_{n_k} - p| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - p| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, gilt auch $x'_{n_k} \to p$ und da f stetig ist, würde folgen

$$f(x_{n_k}) - f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(p) - f(p) = 0$$

im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| > \epsilon$. □

Aus Korollar 23.11 und Satz 23.12 bekommen wir:

Korollar 23.13. *Eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf $I = [a, b]$ ist Riemann-integrierbar.*

24 Eigenschaften des Riemann-Integrals und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Satz 24.1. *Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so gilt:*

i) *Der* Positivteil $f_+(x) := \max(f(x), 0)$, *der* Negativteil $f_-(x) := \max(-f(x), 0)$ *und der Betrag* $|f|$ *sind Riemann-integrierbar und es gilt*
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Jede Funktion lässt sich durch $f = f_+ - f_-$ in Positiv- und Negativteil zerlegen. Es gilt $|f| = f_+ + f_-$.

ii) *Die Funktion* $|f|^p$ *ist für jedes* $p \geq 1$ *Riemann integrierbar.*

iii) fg *ist Riemann-integrierbar*

Beweis.

i) Für den Positivteil bemerken wir, dass für Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ gilt, dass auch φ_+, ψ_+ Treppenfunktionen mit $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ sind. Außerdem gilt $\int_a^b (\psi_+ - \varphi_+)(x)dx \leq \int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx$. Dies zeigt die Riemann-Integrierbarkeit von f_+. Analog sieht zeigt man, dass auch f_- Riemann-integrierbar ist. Das zusammen zeigt, dass $|f| = f_+ - f_-$ Riemann-integrierbar ist. Die Ungleichung folgt schließlich aus $f \leq |f|$ und $-f \leq |f|$ und der Monotonie des Riemann-Integrals.

ii) Nach i) reicht es, den Fall $f \geq 0$ zu betrachten und auf der Grund der Linearität des Riemann-Integrals ist es sogar genug, $0 \leq f \leq 1$ anzunehmen, um die Riemann-Integrierbarkeit von $|f|^p$ zu zeigen. In diesem Fall gibt es Treppenfunktion mit $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq 1$ mit $\int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leq \epsilon/p$. Dann sind auch φ^p und ψ^p Treppenfunktionen mit $\varphi^p \leq f^p \leq \psi^p$.

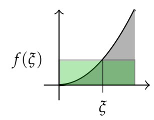
   Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz 22.4) angewendet auf die Funktion $x \mapsto x^p$ mit Ableitung px^{p-1} folgt: Für alle $0 \leq a < b \leq 1$ gibt es ein $\xi \in]a,b[$ mit $b^p - a^p = p\xi^{p-1}(b-a) \leq p(b-a)$. Es folgt $\psi^p - \varphi^p \leq p(\psi - \varphi)$ und daher $\int_a^b \psi^p - \int_a^b \varphi^p \leq \epsilon$, was die Riemann-Interierbarkeit von f^p zeigt.

iii) Dies folgt aus ii) und der Tatsache $fg = \frac{1}{4}\Big((f+g)^2 - (f-g)^2\Big)$.

□

Satz 24.2 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Es sei $I = [a,b]$ und $\varphi : I \to [0,\infty[$ Riemann-integrierbar. Dann gilt: Für jede stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ gibt es ein $\xi \in I$, so dass gilt*
$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Im Spezialfall $\varphi(x) = 1$ gibt es also ein $\xi \in I$, so dass
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$
Das bedeutet, dass die Fläche unter dem Graphen gleich der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $b-a$ und $f(\xi)$ ist:



Beweis.
Nach Satz 24.1 iii) ist $f\varphi$ Riemann-integrierbar. Wir setzen

$$M := \sup_{x\in I} f(x), \quad m := \inf_{x\in I} f(x).$$

Dann gilt $m\varphi \le \varphi f \le M\varphi$ und nach der Monotonie und Linearität des Riemann-Integrals gilt

$$m\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)f(x)dx \le M\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Daher gibt es ein $\mu \in [m, M]$ mit

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \mu\int_a^b \varphi(x)dx.$$

Schließlich garantiert der Zwischenwertsatz (Satz 17.1) die Existenz eines ξ mit $f(\xi) = \mu$. □

Ist die obere Intervallgrenze kleiner als die untere (also $b < a$) so führen wir die Konvention

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

ein. Einfach sieht man die *Intervalladditivität* des Riemann-Integrals:

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

(dank der Konvention gilt die Gleichung, egal wie a, b, c auf der reellen Achse liegen).

Fangen wir nun an, den Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation zu untersuchen:

Satz 24.3. *Es sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion F, definiert durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt,$$

in I differenzierbar und es gilt $F' = f$.

Beweis.
Für $h \neq 0$ betrachten wir den Differenzenquotienten und bekommen aus der Intervalladditivität

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \tfrac{1}{h}\Big(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\Big) = \tfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz 24.2) gibt es zu jedem h ein $\xi_h \in [x, x+h]$ (bzw. in $[x+h, x]$, falls $h < 0$), so dass $\int_x^{x+h} f(t)dt = hf(\xi_h)$. Es gilt $|\xi_h - x| \le h$ und daher folgt $\xi_h \to x$ für $h \to 0$. Mit der Stetigkeit von f folgt

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\tfrac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x).$$

□

Definition 24.4. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* von $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$ gilt.

Ist F eine Stammfunktion von f, so ist $F + c$ für jedes $c \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Stammfunktion von f. Stammfunktionen sind also niemals eindeutig. Mehr als additive Konstanten sind aber bei Funktionen auf Intervallen auch nicht möglich:

"Stammfunktion" und "Ableitung" sind fast Gegensätze. Allerdings können verschiedene Funktionen die gleiche Ableitung haben und eine Funktion hat immer mehrere Stammfunktionen. Das Abbildung $f \mapsto f'$ ist also nicht injektiv und das bilden "der Stammfunktion" nicht einmal eine Abbildung.

Lemma 24.5. *Ist $I = [a, b]$ und sind $F, G : I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von $f : I \to \mathbb{R}$, so gibt es ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $F = G + c$.*

Beweis.
Gilt $F' = G' = f$, so ist $(F - G)' = 0$ und Korollar 22.6 zeigt, dass $F - G$ konstant ist. □

Satz 24.6 (Hauptsatzsatz der Differential- und Integralrechnung). *Es sei $I = [a, b]$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Beachte: F darf ein *beliebige* Stammfunktion von f sein.

Beweis.
Nach Satz 24.3 ist $F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$ eine Stammfunktion von f und nach Lemma 24.5 gilt für jede Stammfunktion F von f, dass $F - F_0 = c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$: Daher ist

$$F(b) - F(a) = F_0(b) - F_0(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

□

Man schreibt auch

$$F(x)\Big|_{x=a}^{b} := F(b) - F(a)$$

und damit liest sich der Hauptsatz als

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_{x=a}^{b}$$

Man schreibt suggestiv auch

$$\text{“}\int f(x)dx = F(x)\text{”}$$

um auszudrücken, dass F *eine* (nicht "die"!) Stammfunktion von f ist. Diese Schreibweise ist natürlich nicht korrekt (z.B. da die linke Seite nicht von x abhängt und insbesondere Stammfunktionen nicht eindeutig bestimmt sind) aber praktisch.

Beispiel.
Mit Hilfe von bekannten Ableitungen können wir einfach viele Integrale berechnen:

1. Für $f(x) = x^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ gilt $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Es folgt also für $0 < a < b$

$$\int_a^b x^\alpha dx = \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\Big|_{x=a}^{b}.$$

   Ist $\alpha \in \mathbb{N}$, so gilt die obige Formel für alle a, b, z.B. insbesondere $\int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ (sogar $n \geq 0$).

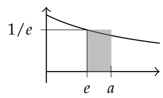
2. Da $\cos' = -\sin$, folgt
$$\int_0^\pi \sin(x)dx = -\cos(x)|_{x=0}^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2.$$

3. Da $\log'(x) = 1/x$ gilt, folgt für $a, b > 0$ gilt
$$\int_a^b \tfrac{1}{x}dx = \log(x)\Big|_{x=a}^b.$$
Außerdem gilt für $x < 0$ und $f(x) = \log(-x)$ dass $f'(x) = \frac{1}{x}$ und daher gilt für $a, b < 0$, dass $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \log(-x)|_{x=a}^b$. Anders ausgedrückt: $\log(|x|)$ eine Stammfunktion von $1/x$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Achtung: Integrale der Form $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx$ *sind nicht erklärt*, da der Integrand nicht beschränkt ist. (Formales rechnen mit der Stammfunktion führt auf das sinnlose Ergebnis $\int_{-1}^1 \frac{1}{x}dx = \log(1) - \log(1) = 0$.)

$\triangle$

Mit Hilfe des letzten Beispiels und elementaren Abschätzungen können wir die unbedeutende, aber überraschende Ungleichung
$$\pi^e < e^\pi$$
zeigen: Für $a > 0$ gilt $\log(a) - 1 = \int_e^a \frac{1}{x}dx$ und da $x \mapsto 1/x$ strikt fallend ist, gilt für $a > e$ immer
$$\log(a) - 1 = \int_e^a \tfrac{1}{x}dx < \tfrac{1}{e}(a-e) = \tfrac{a}{e} - 1,$$
siehe folgende Grafik:



Multiplikation mit e und anwenden von exp zeigt $a^e < e^a$. Insbesondere bekommen wir, da $\pi > 3{,}14 > 2{,}72 > e$, die behauptete Ungleichung.
Die Zeitschrift *The Mathematical Intelligencer* veröffentlicht solche "Beweise ohne Worte": Chakraborty, B. A Visual Proof that $\pi^e < e^\pi$. Math Intelligencer **41**, 56 (2019). https://doi.org/10.1007/s00283-018-9816-4.

Das Bestimmen von Stammfunktionen ist nicht immer einfach. Die bekannten Ableitungsregeln kann man natürlich in Regeln für Integrale umschreiben, welche dann helfen können, Stammfunktionen zu bestimmen. Die erste Regel basiert auf der Kettenregel für Ableitungen: Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt nach der Kettenregel $(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$. Das heißt aber, dass $F \circ \varphi$ ist eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ ist. Es folgt:

Satz 24.7 (Substitionsregel). *Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $\varphi([a, b]) \subset I$. Dann gilt*
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$

Beweis.
Ist F eine Stammfunktion von f, so ist (wie wir vor dem Satz gesehen haben) $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ und nach dem Hauptsatz folgt also
$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dx = (F \circ \varphi)(t)|_{t=a}^b = F(\varphi(a)) - F(\varphi(b)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx.$$
$\square$

Suggestiv kann man sich merken: ersetzt man $x = \varphi(t)$, so ist $dx = \varphi'(t)dt$. Ist $t = a$ bzw. $= b$, so ist $x = \varphi(a)$ bzw. $= \varphi(b)$.

Beispiel.

1. Mit $\varphi(t) = t + c$ folgt $\int_a^b f(t + c)dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)dx$. (Suggestiv: $x = t + c$, also $dx = dt$.)

2. Ist $c \neq 0$, dann ist mit $\varphi(t) = ct$: $\int_a^b f(ct)dt = \frac{1}{c}\int_{ac}^{ab} f(x)dx$. (Suggestiv: $x = ct$, also $dx = cdt$).

3. Logarithmische Integration: Ist φ stetig differenzierbar und $\varphi(t) \neq 0$ für alle t, dann ist

$$\int_a^b \tfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt = \log(|\varphi(t)|)|_{t=a}^b$$

(mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $x = \varphi(t)$). Beachte: φ darf keine Nullstelle haben, ansonsten ist die Aussage im Allgemeinen nicht richtig!

Damit bekommen wir für $[a, b] \subset]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ wegen $\cos' = -\sin$

$$\int_a^b \tan(t) dt = \int_a^b \tfrac{\sin(t)}{\cos(t)} dt = -\log(\cos(t))|_{t=a}^b.$$

4. Für $-1 \leq a < b \leq 1$ betrachten wir $\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx$ (für $a = -1$ und $b = 1$ ist das ist die Fläche unter einem Bogen der einen Halbkreis mit Radius eins beschreibt). Wir substituieren $x = \sin(t)$ und setzen $u = \arcsin(a)$, $v = \arcsin(b)$ und bekommen (formal: "$dx = \cos(t)dt$")

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx = \int_u^v \sqrt{1-\sin(t)^2}\cos(t)dt = \int_u^v \cos(t)^2 dt.$$

Aus der Verdopplungsformel für den Kosinus (Abschnitt 19) wissen wir $\cos(t)^2 = \frac{1}{2}(\cos(2t)+1)$ und das gibt

$$\int_a^b \sqrt{1+x^2}dx = \tfrac{1}{2}\int_u^v \cos(2t) + 1 dt = \tfrac{1}{4}\sin(2t)\Big|_{t=u}^v + \tfrac{1}{2}\Big|_{t=u}^v.$$

Um das Ergebnis in a und b auszudrücken, nutzen wir die Verdopplungsformel für den Sinus $\sin(2t) = 2\sin(t)\cos(t)$, denn damit folgt (da $t = \arcsin(x)$ und $\cos = \sqrt{1-\sin^2}$) $\sin(2t) = 2x\sqrt{1-x^2}$, also

$$\sin(2t)|_{t=u}^v = 2x\sqrt{1-x^2}\Big|_{x=a}^b.$$

Zusammen haben wir

$$\int_a^b \sqrt{1-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\big(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\big)\Big|_{x=a}^b.$$

(Man schreibt

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)) + C$$

und meint damit, dass alle Stammfunktionen von $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ von dieser Form sind.)

Speziell für $a = -1$, $b = 1$ bekommen wir als Fläche des Halbkreises

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\big[0 + \arcsin(1) - 0 - \arcsin(-1)\big] = \tfrac{1}{2}\big[\tfrac{\pi}{2} - (-\tfrac{\pi}{2})\big] = \tfrac{\pi}{2}.$$

△

25 Partielle Integration und uneigentliche Integrale

Aus der Produktregel erhalten wir die folgenden Regel für Integrale:

Satz 25.1 (Partielle Integration)**.** *Für stetig differenzierbare $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ gilt*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)|_{x=a}^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Beweis.
Es gilt $(fg)' = f'g + fg'$ und also folgt die Behauptung aus dem Hauptsatz. □

Man benutzt auch die suggestiv Schreibweise $\int fg' = fg - \int f'g$.

Beispiel.

1. Es seien $a, b > 0$. Wir benutzen $f(x) = \log(x)$, $g(x) = x$ (d.h. $f'(x) = 1/x$ und $g'(x) = 1$ und bekommen

$$\int_a^b \log(x)dx = \int_a^b 1 \cdot \log(x)dx = x\log(x)|_{x=a}^b - \int_a^b \tfrac{1}{x}xdx = \Big[x\log(x) - x\Big|_{x=a}^b.$$

2. Auch den Arcustangens können wir mit partieller Integration integrieren: Wegen $\tan' = 1 + \tan^2$ folgt aus der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion

$$\arctan'(x) = \tfrac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \tfrac{1}{1+\tan(\arctan(x))^2} = \tfrac{1}{1+x^2}.$$

Partielle Integration mit $f(x) = \arctan(x)$ und $g(x) = x$ liefert

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int \tfrac{x}{1+x^2}dx.$$

Im letzten Integral substituieren wir $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$, "$dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$" und bekommen

$$\int \tfrac{x}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\int \tfrac{1}{1+t}dt = \tfrac{1}{2}\log(1+t) = \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).$$

(Alternativ per "logarithmischer Integration": Der Integrand ist $\frac{1}{2}\frac{2x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$ mit $\varphi(x) = 1 + x^2$ und daher ist $\frac{1}{2}\log(1 + x^2)$ eine Stammfunktion.) Zusammen bekommen wir

$$\int \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)$$

(was bedeutet: die rechte Seite ist *eine* Stammfunktion von arctan, was man leicht per Differentiation prüfen kann).

△

Bisher können wir nur beschränkte Funktionen über kompakte Intervalle berechnen. Für unbeschränkte Funktionen und/oder unbeschränkte Gebiete benutzen wir entsprechende Grenzwerte:

Definition 25.2. Es sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, welche über jedes Intervall $[a, R]$ Riemann-integrierbar ist. Dann definieren wir das *uneigentliche Integral* als

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Analog behandelt man den Fall $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$.

Im Falle der Existenz sagt man auch "das uneigentliche Integral konvergiert".

Beispiel.

Wir betrachten $\int_1^\infty x^s dx$ für $s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Für jedes $R > 1$ gilt

$$\int_1^R x^s dx = \tfrac{1}{s+1} x^{s+1}|_{x=1}^R = \tfrac{1}{s+1}(R^{s+1} - 1).$$

Damit der Grenzwert $R \to \infty$ existiert, muss $s + 1 < 0$ gelten. Wir halten fest: Ist $s < -1$, so existiert das uneigentliche Integral und es gilt

$$\int_1^\infty x^s dx = -\tfrac{1}{s+1}.$$

Im Fall $s = -1$ gilt $\int_1^R x^{-1} dx = \log(R) \to \infty$ für $R \to \infty$. Also existiert das Integral $\int_1^\infty x^s dx$ für $s \geq -1$ nicht. $\triangle$

Definition 25.3. Es sei $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die über jedes Intervall der Form $[a + \epsilon, b]$ Riemann-integrierbar ist. Dann definieren wir das *uneigentliche Integral* als

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon \searrow 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx,$$

falls der Grenzwert existiert. Analog behandelt man den Fall $f : [a, b[\to \mathbb{R}$.

Beispiel.

Wir betrachten $\int_0^1 x^s dx$: Für $s < 0$ ist der Integrand bei $x = 0$ nicht definiert und dann handelt es sich in diesem Fall auch um ein uneigentliches Integral. Es gilt für $s \neq -1$ und $0 < \epsilon < 1$

$$\int_\epsilon^1 x^s dx = \tfrac{1}{s+1} x^{s+1}|_{x=\epsilon}^1 = \tfrac{1}{s+1}(1 - \epsilon^{s+1}).$$

Wegen $\lim_{\epsilon \searrow 0} \epsilon^{s+1} = 0$ für $s + 1 > 0$, konvergiert das Integral für $s > -1$ und es gilt in diesem Fall

$$\int_0^1 x^s dx = \tfrac{1}{s+1}.$$

Im Fall $s = -1$ gilt $\int_\epsilon^1 x^{-1}dx = -\log(\epsilon) \to \infty$ für $\epsilon \to 0$ und daher existiert das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^s dx$ nicht für $s \leq -1$.
$\triangle$

Schließlich gibt es noch den Fall, in dem beide Integrationsgrenzen kritisch sind. Hier ist die Definition ein klein wenig aufwendiger.

Definition 25.4. Es sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ (wobei wir $a = -\infty$ und $b = \infty$ erlauben) eine Funktion, die über jedes kompakte Intervall $[\alpha,\beta] \subset]a,b[$ Riemann-integrierbar ist. Wenn dann für jedes $c \in]a,b[$ die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\alpha \searrow a} \int_\alpha^c f(x)dx, \quad \text{und} \quad \int_c^b f(x)dx = \lim_{\beta \nearrow b} \int_c^\beta f(x)dx$$

konvergieren, dann nennen wir das Integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergent und definieren

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Beispiel.
Wegen $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ konvergiert das Integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$:
Für beliebiges c gilt

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \tfrac{1}{1+x^2}dx &= \lim_{\alpha\to-\infty} \int_\alpha^c \tfrac{1}{1+x^2}dx + \lim_{\beta\to\infty} \int_c^\beta \tfrac{1}{1+x^2}dx\\ &= \lim_{\alpha\to-\infty} (\arctan(c) - \arctan(\alpha)) + \lim_{\beta\to\infty} (\arctan(\beta) - \arctan(c))\\ &= -(-\tfrac{\pi}{2}) + \tfrac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

$\triangle$

Mit uneigentlichen Integralen kann man auch gewissen Reihen auf Konvergenz untersuchen:

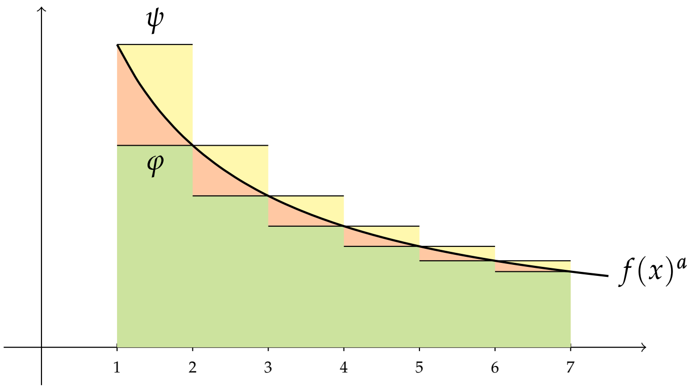
Satz 25.5 (Integralvergleichskriterium für Reihen)**.** *Es sei $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ eine fallende Funktion. Dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^\infty f(n) \text{ konvergiert} \iff \int_1^\infty f(x)dx \text{ konvergiert.}$$

Beweis.
Wir definieren die Funktionen

$$\left.\begin{aligned}\psi(x) &:= f(n)\\ \varphi(x) &:= f(n+1)\end{aligned}\right\} \text{für } n \leq x < n+1.$$

Da f fallend ist, sehen die Funktionen so aus:



Wir folgern für $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} f(n) = \int_1^N \varphi(x)dx \leq \int_1^N f(x)dx \leq \int_1^N \psi(x)dx = \sum_{n=1}^{N-1} f(n).$$

Daraus folgt:

1. Konvergiert das Integral $\int_1^\infty f(x)dx$, so sind die Partialsummen $\sum_{n=1}^N f(n)$ beschränkt und daher konvergiert die Reihe.

2. Konvergiert die Reihe, so ist $\int_1^N f(x)dx$ unabhängig von N beschränkt, und da $\int_1^R f(x)dx$ in R wachsend ist, folgt damit die Konvergenz der Integrals.

□

[a] Randbemerkung: Für $f(x) = 1/x$ konvergiert der Inhalt der gelben Fläche gegen die Euler-Mascheroni-Konstante γ aus der Großen Übung 10.

Beispiel.

1. Wir erhalten einen neuen kurzen Beweis dafür, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$ genau für $s > 1$ konvergiert: Im vorigen Beispiel haben wir nachgerechnet, dass das Integral $\int_1^\infty x^s dx$ genau für $s < -1$ konvergiert.

2. Wir können die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log(n)}$ untersuchen, indem wir das Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x\log(x)}dx$ auf Konvergenz untersuchen. Wegen $\log'(x) = 1/x$ ist der Integrand von der Form $\frac{\varphi'}{\varphi}$ mit $\varphi(x) = \log(x)$ und logarithmische Integration zeigt, dass $\log(\log(x))$ eine Stammfunktion ist, d.h.

   $$\int_2^N \frac{1}{x\log(x)}dx = \log(\log(x))|_{x=2}^N = \log(\log(N)) - \log(\log(2))$$

   und wegen $\log(n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$ folgt auch $\log(\log(n)) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$. Das heißt: das Integral $\int_2^\infty \frac{1}{x\log(x)}dx$ konvergiert nicht, und daher konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\log(n)}$ nicht.

   Die Rechnung zeigt auch, dass die Reihe extrem langsam divergiert: Nach $N = 10^{12}$ Summanden hat die Reihe erst einen Wert von ca. $\log(\log(10^{12})) \approx 3{,}3$ Damit $\log(\log(N)) \geq K$ ist, muss $N \geq \exp(\exp(K))$ gelten. Für $K = 5$ muss zum Beispiel schon $N \geq 3 \cdot 10^{64}$ gelten.

$\triangle$

26 Taylorentwicklung

In diesem Abschnitt ist I immer ein Intervall (mit mehr als zwei Punkten).

Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion lässt sich nach Satz 21.2 auch charaktierisieren durch

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varphi(x), \quad \text{mit } \tfrac{\varphi(x)}{x-a} \xrightarrow{x\to a} 0.$$

Schreiben wir $\psi(x) = \varphi(x)/(x-a)$, so bekommen wir

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \psi(x)(x-a), \quad \text{mit } \psi(x) \xrightarrow{x\to a} 0.$$

Die Taylorsche Formel ist eine Verallgemeinerung davon:

Satz 26.1 (und Definition: Taylorsche Formel)**.** *Es sei* $f : I \to \mathbb{R}$ *eine* $(n+1)$*-mal stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt für alle* $a, x \in I$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + \tfrac{f'(a)}{1!}(x-a) + \tfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n}_{=:T_n[f,a](x)} + R_{n+1}(x)$$

mit dem Restglied in Integraldarstellung

$$R_{n+1}(x) = \tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

und dem Taylor-Polynom n-ter Ordnung *von* f.

Beweis.
Wir beweisen die Aussage per Induktion nach n: Der Fall $n = 0$ ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$.

Für den Induktionsschritt nutzen wir in der Darstellung des Restgliedes R_n partielle Integration: Seien dazu $u(t) = f^{(n)}(t)$ und $v(t) = -\frac{(x-t)^n}{n!}$. Dann ist $v'(t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}$ und es gilt

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= \tfrac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt \\
&= \int_a^t u(t)v'(t)dt = u(t)v(t)|_{t=a}^x - \int_a^x u'(t)v(t)dx \\
&= u(x)\underbrace{v(x)}_{=0} - \underbrace{u(a)v(a)}_{=-f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\tfrac{(x-t)^n}{n!}dt \\
&= f^{(n)}(a)\tfrac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x f^{(n+1)}(t)\tfrac{(x-t)^n}{n!}dt,
\end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

Korollar 26.2. *Ist* $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$*-mal differenzierbar und gilt* $f^{(n+1)}(x) = 0$ *für alle* $x \in I$*, so ist* f *ein Polynom vom Grad* $\leq n$*.*

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung können wir das Restglied auch anders formulieren:

Satz 26.3 (Lagrange-Form des Restgliedes). *Unter den Voraussetzungen von Satz 26.1 gibt es ein ξ zwischen x und a, so dass*

$$f(x) = T_n[f,a](x) + \tfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Beweis.
Nach Satz 24.2 gibt es ein ξ zwischen x und a, so dass

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \tfrac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt = f^{(n+1)}(\xi)\int_a^x \tfrac{(x-t)^n}{n!}dt \\ &= -f^{(n+1)}(\xi)\tfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\Big|_{t=a}^{x} = \tfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

□

Korollar 26.4. *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal stetig differenzierbar. Dann gilt*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \psi(x)(x-a)^n \quad \textit{mit} \quad \psi(x) \xrightarrow{x\to a} 0.$$

Wir betrachten Satz 26.1 mit Restglied R_{n-1}:

$$f(x) = T_{n-1}[f,a](x) + \tfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n = T_{n-1}[f,a](x) + \tfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \tfrac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

und da für $x \to a$ auch $\xi \to a$ gilt, folgt die Behauptung mit
$\psi(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(a)}{n!}$.

Um asymptotisches Verhalten von Funktionen vergleichen zu können, gibt es die "Landau-Symbole" (ein weiteres Beispiel für ungenaue, aber praktische mathematische Notation): Man schreibt

$$f(x) = \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{für} \quad x \to a$$

falls $\limsup_{x\to a}|\frac{f(x)}{g(x)}| < \infty$ Man schreibt

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{für} \quad x \to a$$

falls $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Gelesen als: "f ist groß-Oh von g für $x \to a$." Etwas genauer werden die Landau-Symbole, wenn man "$\mathcal{O}(g)$ $x \to a$" als Menge aller solcher Funktionen auffasst und schreibt $f \in \mathcal{O}(g)$, $x \to a$.
Mit anderen Worten: Falls es in einerm Umgebung von a gilt $|f(x)| \leq K|g(x)|$ mit einem K.

Gelesen als: "f ist klein-Oh von g für $x \to a$."

Beispiel.

1. Der aus Abschnitt 18 bekannte Grenzwert $\lim_{x\to\infty} x^k \exp(-x) = 0$ lässt sich damit als

$$x^k = o(\exp(x)) \quad x \to \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

und entsprechend

$$\exp(-x) = o(x^{-k}) \quad x \to \infty \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

2. Es gilt sowohl $x^3 = o(|x|)$, $x \to 0$ als auch $x^2 = o(|x|)$, $x \to 0$.

△

Das letzte Beispiel zeigt auch, in wie fern die Landau-Notation zu Verwirrung führen kann: Aus $f_1(x) = O(g(x))$, $x \to a$ und $f_2(x) = O(g(x))$, $x \to a$ folgt *nicht*, dass f_1 und f_2 gleich sind!

Die Aussage von Korollar 26.4 können wir mit den Taylor-Polynomen aus Satz 26.1 und der Landau-Notation schreiben als:

> Ist f n-mal stetig differenzierbar, so gilt für das Taylor-Polynom n-ter Ordnung
>
> $$f(x) - T_n[f,a](x) = o(|x-a|^n) \quad , x \to a.$$

Beispiel.

Wir betrachten $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$ im Punkt $a = 0$. Es gilt $f(0) = 1$ und

$$f'(0) = \tfrac{1}{2\sqrt{1+x}}\Big|_{x=0} = \tfrac{1}{2}.$$

Das heißt, es gilt

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{x}{2} + o(|x|) \quad x \to 0,$$

oder ohne Landau-Symbol

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{x}{2} + \psi(x)x, \quad \psi(x) \to 0,\ x \to 0.$$

Damit können wir zum Beispiel die Folge $\sqrt{n+\sqrt{n}}$ untersuchen:
Es ist nämlich

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} = \sqrt{n}\sqrt{1+\tfrac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt{n}\Big(1 + \tfrac{1}{2\sqrt{n}} + \psi(\tfrac{1}{\sqrt{n}})\tfrac{1}{\sqrt{n}}\Big) = \sqrt{n} + \tfrac{1}{2} + \psi(\tfrac{1}{\sqrt{n}}).$$

Es folgt daher

$$\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \tfrac{1}{2} + \psi(\tfrac{1}{\sqrt{n}})$$

und wir schließen

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \tfrac{1}{2}.$$

△

Definition 26.5. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar und $a \in I$. Dann heißt

$$T[f,a](x) := \sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* von f in a.

Im Allgemeinen kann man nicht sehr viel über Grenzwerte und Konvergenz von Taylor-Reihen aussagen:

1. Es gibt unendlich oft differenzierbare Funktionen, deren Taylor-Reihe für alle $x \neq a$ *nicht* konvergiert.

2. Es gibt unendlich oft differenzierbare Funktionen f, für die die Taylor-Reihe für alle x konvergiert, ihr Grenzwert aber nur für bestimmte x mit $f(x)$ übereinstimmt, im Extremfall nur in $x = a$!

Was man sicher sagen kann:

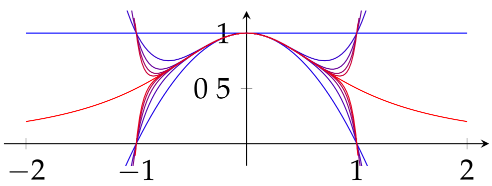
> Eine Taylorreihe konvergiert in x gegen $f(x)$ genau dann, wenn das Restglied $R_{n+1}(x)$ aus Satz 26.1 für $n \to \infty$ gegen Null geht.

Beispiel.

1. Man kann zeigen, dass die Taylor-Reihe der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ in $a = 0$ gegeben ist durch

$$T[f,0](x) = 1 - x^2 + x^4 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

Mit dem Quotienten-Kriterium sieht man, dass die Reihe für $|x| < 1$ konvergiert und für $x \geq 1$ divergiert. Außerdem kann man zeigen, dass das n-te Restglied für $|x| < 1$ für $n \to \infty$ gegen Null geht, das heißt für $|x| < 1$ gilt $f(x) = T[f,0](x)$. Hier gilt: Die Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, die Taylorreihe konvergiert auf $]-1, 1[$ gegen f und auf $]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$ divergiert sie:

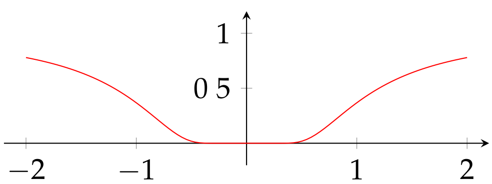


Die Taylor-Polynome von $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ bis $T_{18}[f,0]$.

2. Man kann (mit Hilfe von Aufgabe 4 auf Übungsblatt 11) zeigen, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{falls } x \neq 0 \\ 0, & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^{(n)}(0) = 0$. Die Funktion ist tatsächlich "unendlich flach in $x = 0$":



Die Taylor-Reihe vn f in $a = 0$ ist also

$$T[f,0](x) = 0 + 0x + \cdots = 0.$$

In diesem Beispiel gilt: Die Taylorreihe konvergiert in jedem Punkt, in dem f definiert ist, doch nur im Entwicklungspunkt $x = 0$ konvergiert sie gegen f.

△

Man überzeugt sich schnell davon, dass die Taylor-Reihen von exp, sin und cos in $a = 0$ genau den uns schon bekannten Reihen entsprechen. Es stellt sich heraus, das auch die Restglieder der Taylor-Reihen von Sinus und Kosinus die gleiche Form wie in Satz 19.6 haben, und darüber hinaus, dass die Abschätzung für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten.

Es gilt ja $\exp^{(n)}(0) = 1$ und $\cos^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $\cos^{(2k+1)}(0) = 0$ und entsprechendes für sin.