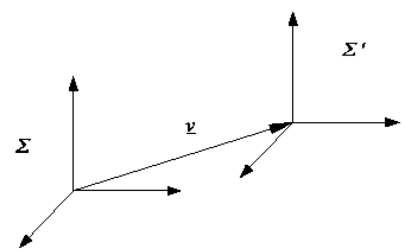
Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer

ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE SS 2023

6. Übungsblatt Abgabe: keine Abgabe, Besprechung: 15. Juni 2023

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

15. **Lorentz-Transformation**



Zwei Minkowski-Systeme Σ und Σ' sind achsenparallel ausgerichtet, der konstante Geschwindigkeitsvektor $\underline{v}$ der Relativbewegung habe jedoch beliebige Richtung (vgl. Abbildung).

(a) Beweisen Sie die Lorentz-Transformationsformel

$$L_j^{i'} = \begin{pmatrix} \delta_b^a + \beta \, \frac{u^a}{c} \, \frac{u_b}{c} & -\frac{u^a}{c} \\ \\ -\frac{u_b}{c} & \frac{u^4}{c} \end{pmatrix} \quad , \tag{1}$$

mit der Vierer-Geschwindigkeit

$$u^i := \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \begin{pmatrix} v^a \\ c \end{pmatrix} \tag{2}$$

und

$$\beta := \left[\sqrt{1 - v^2/c^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \right] \, \frac{c^2}{v^2} \quad , \tag{3}$$

sowie der Standard-Notation $a, b = 1, 2, 3$; $i, j = 1, \ldots, 4$.

(b) Verifizieren Sie, dass Gleichung (1) im Spezialfall $\underline{v} = v \, \underline{e}_1$ in die spezielle Lorentz-Transformationsformel (E-Dynamik-Skript III.90) übergeht.

Bitte wenden⟶

16. **Energie-Impuls-Tensor**

Der Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit hat im Riemann-Raum die Form

$$T^{ik} = \left(\rho_0 + \frac{P_0}{c^2}\right) u^i\, u^k + g^{ik} P_0 \tag{4}$$

und die Feldgleichungen unter dem Einfluss einer äußeren Kraftdichte k^i lauten

$$T^{ik}{}_{||k} = k^i \quad , \tag{5}$$

wobei ρ_0, P_0, u^i die Ruhmassendichte, den Eigendruck und die Vierer-Geschwindigkeit darstellen.

(a) Formulieren Sie die beiden Gleichungen im Lokalen Inertialsystem (LIS).

(b) Machen Sie die beiden Gleichungen im LIS plausibel, indem Sie als nichtrelativistischen Grenzfall die Kontinuitätsgleichung und die Euler-Gleichung extrahieren.

(c) Zeigen Sie, dass der Energie-Impuls-Tensor im LIS eindeutig ist, wenn von den vertrauten Bedingungen im Ruhsystem ausgegangen wird.

17. **Kovariante Ableitung**

(a) Bestimmen Sie allgemein die kovariante Ableitung eines *ko*varianten Tensors 1. Stufe, d.h. $V_{i\ ||j}$. Gehen Sie aus von

$$V^i_{\ ||j} = V^i_{\ |j} + \Gamma^i_{jk} V^k \quad . \tag{6}$$

(b) Beweisen Sie die Produktregel

$$(v_i w_j)_{||k} = v_{i||k} w_j + v_i w_{j||k} \tag{7}$$

(c) Schließen Sie nun erneut ausgehend von Gl. (6) auf die kovariante Ableitung eines *ko*varianten Tensors 1. Stufe, indem Sie explizit die Produktregel verwenden.

(d) Zeigen Sie, dass die kovariante Ableitung eines kovarianten Tensors 2. Stufe $T_{ij} = v_i w_j$ wie folgt gegeben ist:

$$T_{ij\ ||k} = T_{ij\ |k} - T_{lj}\Gamma^l_{ik} - T_{il}\Gamma^l_{jk}. \tag{8}$$

Gehen Sie von den in (a) und (b) bewiesenen Beziehungen aus.