Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer

ALLGEMEINE RELATIVITÄTSTHEORIE SS 2023

5. Übungsblatt Abgabe: keine Abgabe, Besprechung: 8. Juni 2023

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

12. Trägheitskräfte

Im Lokalen Inertialsystem IS' ist die Bewegung eines kräftefreien Massepunkts gegeben durch

$$\frac{d^2x^{i'}}{d\tau^2} = 0 \quad . \tag{1}$$

Es soll überprüft werden, dass die Formulierung der Gleichung in einem beliebigen Nicht-Inertialsystem KS die bekannten Trägheitskräfte enthält. Gehen Sie dazu folgendermaßen vor:

(a) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) in KS mit den Koordinaten ξ^i

$$\frac{d^2\xi^i}{d\tau^2} = -\Gamma^i_{jk}\frac{d\xi^j}{d\tau}\frac{d\xi^k}{d\tau} \tag{2}$$

lautet.

(b) Betrachten Sie als KS ein rotierendes Koordinatensystem mit $\xi^1 = x$, $\xi^2 = y$, $\xi^3 = z$, $\xi^4 = ct$, d.h.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t' & \sin\omega t' \\ -\sin\omega t' & \cos\omega t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{3}$$

sowie $z' = z$ und $t' = t$. Die gestrichenen Größen bezeichnen die Koordinaten des lokalen Inertialsystems IS'. Lösen Sie nach x' und y' auf und bestimmen Sie die vollständigen Differentiale dx' und dy'.

(c) Berechnen Sie nun das Wegelement ds^2 in KS und lesen Sie den metrischen Tensor g_{ij} ab.

(d) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole über die Geodätengleichung, wobei als Kurvenparameter die Eigenzeit τ zu benutzen ist. Geben Sie nun die resultierenden Trägheitskräfte an.

Bemerkung: Wenn die Christoffel-Symbole aus der Geodätengleichung abgelesen werden sollen, müssen die zweiten Ableitungen entkoppelt sein. Die Entkopplung entspricht dem Schritt von Gleichung (II.173) zu (II.174) innerhalb der Ableitung der allgemeinen Geodätengleichung im Skript (Skript SS23, V1).

(e) Zeigen Sie, dass für $v \ll c$ die in (d) bestimmten Trägheitskräfte zu den bekannten Ausdrücken für die Zentrifugal- und Corioliskraft führen.

Bitte wenden ⟶

13. **Berechnung von Krümmungstensoren, Ricci-Tensoren, Krümmungsskalaren**

(a) Bestimmen Sie die Christoffel-Symbole Γ^i_{jk}, den Riemannschen Krümmungstensor $R^i{}_{jkl}$, den Ricci-Tensor R_{ij} und den Krümmungsskalar R der Oberfläche einer Sphäre mit dem Radius $r = \text{const}$ (Benutzen Sie für die Indizes i, j, k, l direkt die Bezeichnungen ϑ und φ) und eines Zylinders mit dem Radius $\rho = \text{const}$ (Benutzen Sie für die Indizes i, j, k, l direkt die Bezeichnungen φ und z). Berechnen Sie die Christoffel-Symbole in beiden Fällen über die Geodätengleichung, wobei Sie als Lagrange-Funktion

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 \tag{4}$$

benutzen und ds^2 aus der metrischen Fundamentalgleichung entnehmen. Prüfen Sie Ihre so berechneten Christoffel-Symbole anhand der Ergebnisse von Aufgabe 9.

(b) Erläutern Sie den Unterschied der Krümmungen zwischen der Sphäre und dem Zylinder.

14. **Parallelverschiebung und Krümmungstensor**

Gegeben sind die Standardkoordinaten (ϑ, φ) auf der Kugeloberfläche. Berechnen Sie die Parallelverschiebung eines Tensors 1. Stufe $\underline{v}$ beim Umlauf um ein infinitesimales Parallelogramm aufgespannt durch (ϑ_0, φ_0), $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0)$, $(\vartheta_0 + d\vartheta, \varphi_0 + d\varphi)$ und $(\vartheta_0, \varphi_0 + d\varphi)$. Der Umlaufsinn soll der angegebenen Reihenfolge der Parallelogramm-Eckpunkte entsprechen. Als Ergebnis sollten Sie erhalten

$$\sum \delta v^i = R^i_{k\vartheta\varphi} v^k d\vartheta d\varphi \quad , \tag{5}$$

mit dem *Krümmungstensor*

$$R^i_{klm} = \Gamma^i_{kl|m} - \Gamma^i_{km|l} + \Gamma^n_{kl}\Gamma^i_{nm} - \Gamma^n_{km}\Gamma^i_{nl} \quad . \tag{6}$$