Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer



4. Übungsblatt — Abgabe: keine Abgabe, Besprechung: 25. Mai 2023

**Fragen zu den Aufgaben:** Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

## 9. Christoffel-Symbole und metrischer Tensor

(a) Zeigen Sie, dass der metrische Tensor $g_{ij}$ die Bedingung $g_{ij\ ||k} = 0$ erfüllt. Formulieren Sie die drei Gleichungen

$$g_{ij\ ||k} = 0 \tag{1}$$
$$g_{ik\ ||j} = 0 \tag{2}$$
$$g_{jk\ ||i} = 0 \tag{3}$$

mit den Christoffel-Symbolen.

(b) Kombinieren Sie die Gl. (1)-(3) und zeigen Sie damit:

$$\Gamma^l_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left( g_{ij\ |k} + g_{ik\ |j} - g_{jk\ |i} \right) \quad . \tag{4}$$

Berechnen Sie mit dieser Formel die Christoffelsymbole für

(c) Kartesische Koordinaten im $\mathbb{R}^3$ : $\xi^1 = x^1, \xi^2 = x^2, \xi^3 = x^3$

(d) Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ : $\xi^1 = \rho, \xi^2 = \varphi, \xi^3 = z$

(e) den 2d Einheitszylinder $\rho = 1$ : $\xi^1 = \varphi, \xi^2 = z$

(f) Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$ : $\xi^1 = r, \xi^2 = \vartheta, \xi^3 = \varphi$

(g) die S2-Sphäre (Oberfläche der Einheitskugel $r = 1$): $\xi^1 = \vartheta, \xi^2 = \varphi$

Anleitung: Beschaffen Sie sich die jeweiligen metrischen Tensoren, z.B. aus Aufgabe 2a.

*Bitte wenden*⟶

10. **Fernparallelismus im flachen Raum**

Das kovariante Differential

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = dv^i + \Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \tag{5}$$

beschreibt die infinitesimale Änderung der kontravarianten Komponenten des Tensors 1. Stufe $\underline{v}$ im selben Ereignis $P$, d.h. die Komponenten im Nachbarpunkt $\overline{P}$ werden in der Basis von $P$ betrachtet. Hierbei ist

$$\delta v^i = -\Gamma^i_{jk} v^j d\xi^k \tag{6}$$

die Änderung der $v^i$ bei *Parallelverschiebung* um $d\xi^k$. Der Vektor $\underline{v}$ wird von $\underline{v}(\overline{P})$ um „$d\xi$“ nach $\underline{v}(P)$ „zurückverschoben“.

Gegeben sind ebene Polarkoordinaten $(\rho, \varphi)$ und die Punkte $P = (\rho_0, 0)$, $Q = (\rho_0, \pi/2)$, $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$, $R_2 = (\epsilon, 0)$. Der Tensor 1. Stufe $\underline{v} = \underline{e}_1$ wird als Startvektor einer vorzunehmenden Parallelverschiebung betrachtet.

(a) Gehen Sie von der wohlbekannten Tatsache aus, dass im flachen Raum Fernparallelismus vorliegt. Überprüfen Sie dies durch Verschiebung von $\underline{v}$ entlang der geschlossenen Kontur $PQR_1R_2P$.

   i. Skizzieren Sie zunächst die Parallelverschiebung von $\underline{v}$ entlang der angegebenen Kontur.

   ii. Berechnen Sie $v^\rho(\rho, \varphi)$ und $v^\varphi(\rho, \varphi)$. Drücken Sie dazu $\underline{v} = \underline{e}_1$ in der kovarianten Basis der Polarkoordinaten aus.

   iii. Berechen Sie damit explizit

$$\int_P^Q dv^\rho, \int_P^Q dv^\varphi,$$

   sowie unabhängig davon

$$\int_P^Q \delta v^\rho, \int_P^Q \delta v^\varphi.$$

   Die Christoffelsymbole entnehmen Sie einer vorangegangenen Übungsaufgabe.

   iv. Berechnen Sie nun

$$\oint \delta v^\rho \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

   für die geschlossene Kontur $PQR_1R_2P$.

   v. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(b) Gehen Sie nun davon aus, dass Sie keine Kenntnis vom Fernparallelismus im flachen Raum haben, sondern diesen erst nachweisen müssen.

   i. Beschaffen Sie sich ein System von Differentialgleichungen für $v^\rho(\rho, \varphi)$ und $v^\varphi(\rho, \varphi)$. Für den Paralleltransport des konstanten Vektors $\underline{v}$ gilt auf jedem Wegstück

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = 0 \quad \text{bzw.} \quad dv^i = \delta v^i \,,\ i \in \{\rho, \varphi\}\,.$$

   ii. Berechnen Sie

$$\oint \delta v^\rho \text{ und } \oint \delta v^\varphi$$

   wobei nun $v^\rho(\rho, \varphi)$ und $v^\varphi(\rho, \varphi)$ als angepasste Lösungen des unter (i.) aufgestellten Differentialgleichungssystems erst zu berechnen sind. Als Anfangswert gilt $\underline{v} = \underline{e}_1$, d.h. $v^\rho(\rho_0, 0) = 1$, $v^\varphi(\rho_0, 0) = 0$.

   iii. Schließen Sie auf den Fernparallelismus.

*Bitte wenden*⟶

11. **Fernparallelismus im gekrümmten Raum**

Gegeben sind die Standardkoordinaten $(\vartheta, \varphi)$ auf der Kugeloberfläche und die Punkte $P = (\pi/2, 0)$, $Q = (\pi/2, \pi/2)$, $R_1 = (\epsilon, \pi/2)$, $R_2 = (\epsilon, 0)$. Der Tensor 1. Stufe $\underline{v} = -\underline{e}_\vartheta = -\frac{1}{R_0}\,\underline{b}_\vartheta$ wird als Startvektor einer vorzunehmenden Parallelverschiebung betrachtet (vgl. A10). $R_0$ ist der Kugelradius.

(a) Berechnen Sie entlang des geschlossenen Weges $PQR_1R_2P$ die Integrale

$$\oint \delta v^\vartheta, \oint \delta v^\varphi$$

für $\epsilon \to 0$. Als Anfangswert gilt $v^\vartheta(\pi/2, 0) = -\frac{1}{R_0}$, $v^\varphi(\pi/2, 0) = 0$. Beschaffen Sie sich dazu ein System von Differentialgleichungen für $v^\vartheta(\vartheta, \varphi)$ und $v^\varphi(\vartheta, \varphi)$ aus der Bedingung für den Paralleltransport von $\underline{v}$:

$$Dv^i = dv^i - \delta v^i = 0 \quad \text{bzw.} \quad dv^i = \delta v^i\,,\; i \in \{\vartheta, \varphi\}\,.$$

(b) Diskutieren Sie den Übergang des Startvektors in den Endvektor und skizzieren Sie den Paralleltransport.