



6. Gestreckte sphärische Koordinaten

Der Zusammenhang zwischen gestreckten sphärischen Koordinaten (χ, θ, φ) und gewöhnlichen kartesischen Koordinaten (x^1, x^2, x^3) im dreidimensionalen euklidischen Raum ist gegeben durch

$$\begin{aligned} x^1 &= \sinh \chi \sin \theta \cos \varphi \\ x^2 &= \sinh \chi \sin \theta \sin \varphi \\ x^3 &= \cosh \chi \cos \theta \end{aligned}$$

- Berechnen Sie das Linienelement ds^2 für gestreckte sphärische Koordinaten.
- Im folgenden beschränken wir uns auf die $x^2 = 0$ Ebene, was $\varphi = 0$ entspricht. Berechnen Sie die Jacobi-Matrix $A^a_{b'} = \frac{\partial x^a}{\partial \xi^{b'}}$ für die Transformation von (x^1, x^3) nach (χ, θ) mit $\xi^{1'} = \chi$, $\xi^{2'} = \theta$. Berechnen Sie auch die inverse Matrix $A^{a'}_b$.

7. Tensoren

Als einen Tensor n -ter Stufe bezeichnen wir eine physikalische oder geometrische Größe, deren Komponenten sich beim Übergang von einem Koordinatensystem KS zu dem System KS' folgendermaßen verhalten:

$$T^{i'j'k'\dots} = A^{i'}_{i'} A^{j'}_{j'} A^{k'}_{k'} \dots T^{lmn\dots}, \quad (1)$$

wobei $A^{i'}_l$ die Jacobi-Matrix der Koordinatentransformation darstellt,

$$A^{i'}_l = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^l}. \quad (2)$$

Für die kovarianten oder gemischten Komponenten gelte natürlich das entsprechende Transformationsverhalten.

Zeigen Sie:

- Wenn T_{ij} symmetrisch ist, dann ist auch T^{ij} symmetrisch.
- Wenn T^{ij} ein Tensor und $T^{ij} N_{ij}$ eine Invariante (Tensor 0. Stufe) ist, dann ist N_{ij} ebenfalls ein Tensor. Dies bezeichnet man auch als den *Quotientensatz*.
- $\underline{C}$ und $\underline{B}$ seien beliebige Tensoren 1. Stufe. Es gelte die Relation

$$C^k = D^{ki} B_i$$

Dann sind D 's ebenfalls Tensorkomponenten.

- Die Spur des Produktes aus einem symmetrischen und einem antisymmetrischen Tensor ist null.

Bitte wenden →

8. Metrischer Tensor

Wir betrachten die Transformation von kartesischen Koordinaten zu Zylinderkoordinaten. Rechnen Sie explizit nach, dass sich der metrische Tensor g_{ab} wie ein Tensor 2. Stufe transformiert.