2. Übungsblatt Abgabe: keine Abgabe, Besprechung: 4. Mai 2023

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

4. **Nichteuklidische Geometrie**

Stellen Sie sich zwei Koordinatensysteme vor: ein Inertialsystem IS und ein um die x^3-Achse des Systems IS rotierendes Bezugssystem KS'. Ein Kreis mit dem Durchmesser d in der x^1-x^2-Ebene im System IS wird nach der Koordinatentransformation ins System KS' auch als ein Kreis mit dem gleichen Durchmesser gesehen, aber der Umfang U des Kreises erscheint wegen der Lorentzkontraktion (tangential zur Rotationrichtung) unterschiedlich in den beiden Systemen.

(a) Warum ändert sich der Durchmesser nicht?

(b) Zeigen Sie, dass das Verhältnis zwischen dem Umfang und dem Durchmesser im rotierenden System KS' größer als π ist. Das ist ein Beispiel für den Zusammenhang zwischen beliebigen Bezugssystemen und der nichteuklidischen Geometrie.

Anleitung: Betrachten Sie kleine Abschnitte δU des Umfanges und wenden Sie näherungsweise darauf die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie an.

5. **Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten**

Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten ξ^1, ξ^2, ξ^3 betrachten wir

$$x^1 = a\,\xi^1 \cos\left(\xi^2\right) \quad ; \quad x^2 = b\,\xi^1 \sin\left(\xi^2\right) \quad ; \quad x^3 = c\,\xi^3 \tag{1}$$

mit $a, b, c \neq 0$ (x^1, x^2, x^3 sind kartesische Koordinaten).

(a) Stellen Sie die ko- und kontravariante Basis ($\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ bzw. $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2, \underline{b}^3\}$) sowie den metrischen Tensor auf. Wie lassen sich die einzelnen Einträge des metrischen Tensors interpretieren?

(b) Berechen Sie $ds^2 = d\underline{r} \cdot d\underline{r}$ in den kartesischen Koordinaten x^a und den krummlinigen Koordinaten ξ^a.

(c) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der x^1-x^2-Ebene für $a = 1, b = 2$ und zeichnen Sie die ko- und kontravarianten Basisvektoren in den Punkten $\left(\xi^1, \xi^2\right) = (1, \pi/4)$ bzw. $\left(\xi^1, \xi^2\right) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $\xi^1 = \text{const}$ bzw. $\xi^2 = \text{const}$ in kartesischen Koordinaten?

(d) Im Punkt $P = \left(\xi^1, \xi^2\right) = (1, \pi/4)$ haben zwei Vektorfelder $\underline{E}_I$, $\underline{E}_{II}$ bezüglich kartesischer Einheitsvektoren $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ die Darstellungen $\underline{E}_I = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2$ bzw. $\underline{E}_{II} = 2\underline{e}_2$. Stellen Sie diese Vektoren bezüglich der Basen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2\}$ und $\{\underline{b}^1, \underline{b}^2\}$ dar. Berechnen Sie das Skalarprodukt $\underline{E}_I \cdot \underline{E}_{II}$ in kartesischen Koordinaten und in den Koordinaten ξ^1, ξ^2.