Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

keine Abgabe, Besprechung in der Vorlesung am Do., 09.02.2023, 11:30 Uhr

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

46. **Taylor-Entwicklung (0 Punkte)**

Ein Teilchen befindet sich in einem Potential $V(x)$. Es gibt einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$V(x_0) = -a\,, \quad V''(x_0) = 2b\,, \tag{1}$$

wobei a, b positive Zahlen sind.

(a) Wann liegt ein lokales Minimum an der Stelle x_0 vor?

(b) Nehmen Sie nun ein lokales Minimum an der Stelle x_0 an und approximieren Sie $V(x)$ in der Nähe von x_0 in eine Taylor-Reihe niedrigsnötiger Ordnung. Ihre Approximation soll über eine Konstante hinausgehen und die beiden Zahlen a, b enthalten.

(c) Bestimmen Sie die Zahlen a, b für den Fall $V(x) = \cos(x)$, $x_0 = \pi$.

47. **Integrale (0 Punkte)**

Berechnen Sie unter Angabe der Integrationsregeln:

(a)
$$\int \frac{\sin(x)}{-\cos(x)+4}\,\mathrm{d}x\,. \tag{2}$$

(b)
$$\int_0^\infty \frac{5z^2 \cdot e^{-z}}{3}\,\mathrm{d}z\,. \tag{3}$$

(c)
$$\int \frac{1}{x^3 - x^2 - x + 1}\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

48. **Satz von Stokes (0 Punkte)**

Gegeben sei eine Kreisscheibe $\mathcal{K} = \{\,[x, y, 0] \mid x^2 + y^2 \leq R^2\,\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} xy^2 \\ x^2 y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

(a) Verifizieren Sie den Satz von Stokes für $\vec{F}$ und $\mathcal{K}$.

(b) Lässt sich ein skalares Potential ϕ finden, so dass $\mathrm{grad}\,(\phi) = \vec{F}$?
Falls ja, geben Sie es an. Falls nein, warum nicht?

49. **Vektoralgebra (0 Punkte)**

Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \in \mathbb{R}^3$ Vektoren. Berechnen Sie

$$\left\langle \vec{a} \times \vec{b} \middle| \vec{c} \times (\vec{d} \times \vec{a}) \right\rangle\,. \tag{6}$$

Bitte wenden! →

50. **Lineare Algebra (0 Punkte)**

Ein lineares Gleichungssystem sei gegeben durch

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x_1 & + & x_2 & & & = & 12 \\ x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 13 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & = & 16 \end{array} \tag{7}$$

(a) Bringen Sie das Gleichungssystem auf die Form $M\vec{x} = \vec{b}$ mit einer Matrix M.
Berechnen Sie $\det(M)$ und prüfen Sie, ob das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.

(b) Berechnen Sie alle M^{-1} mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens und lösen Sie das Gleichungssystem.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

(d) Geben Sie die Matrix U an, mit der $D = U^{-1}MU$ diagonal wird. Geben Sie D an.

51. **Fourier-Reihe (0 Punkte)**

Berechnen Sie die Fourier-Reihe der Funktion, die als periodische Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \qquad x \in [-2, 2] \tag{8}$$

gegeben ist.

52. **Fourier-Transformation (0 Punkte)**

Geben Sie die Definitionen der Fouriertransformation und der dazugehörigen Rücktransformation an.

Es sei nun eine Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } -\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \tag{9}$$

Skizzieren Sie die Funktion und bestimmen Sie die Fouriertransformierte.

53. **Orthonormale Funktionensysteme (0 Punkte)**

Seien $n, m \in \mathbb{N}_0$, die Legendre-Polynome

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2 - 1)^n. \tag{10}$$

und das Skalarprodukt

$$\langle P_n | P_m \rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, \mathrm{d}x \tag{11}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die ersten drei Legendre-Polynome gegeben sind durch: $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$, $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$.

(b) Zeigen Sie, dass diese drei Legendre-Polynome einen bezüglich des obigen Skalarprodukts orthonormalen Satz von Funktionen bilden.

(c) Entwickeln Sie die Funktion $f(x) = cos(x)$ nach den ersten drei Legendre-Polynomen.