INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer

Klausurvorbereitung

1. **Wissens- und Verständnisfragen**

   Benennen Sie alle von Ihnen zusätzlich benutzten Größen und Symbole!

   (a) Erklären Sie den Begriff der Gibbs'schen Gesamtheit. Welche Konsequenzen ergeben sich für die Berechnung des Mittelwertes einer physikalischen Größe?

   (b) Wie ist das chemische Potential μ definiert?

   (c) Wie berechnet man den Mittelwert $\langle A \rangle$ und das zweite Moment $\langle A^2 \rangle$ einer physikalischen Größe A über die Systeme der Großkanonischen Gesamtheit?

   (d) Wir betrachten ein System, das mit den Wahrscheinlichkeiten P_n, $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ die Energien U_n annimmt. Es sei σ die Entropie mit $\sigma = -\sum_n P_n \ln P_n$. Welche Form ergibt sich für P_n unter der Forderung (i) $\sum_n P_n = 1$ bzw. (ii) $\sum_n P_n = 1$ *und* $\sum_n U_n P_n = U$? (*keine Rechnung!*)

   (e) Welche Zustandsgröße ist auf Adiabaten konstant?

   (f) Geben Sie die Gibbs'sche Fundamentalgleichung und die Gibbs-Duhem-Beziehung an.

   (g) Leiten Sie ausgehend von der Definition der Großen Zustandssumme Z_G die Bose-Einstein-Verteilungsfunktion $f_{BE}(\epsilon)$ her.

   (h) Geben Sie die kanonische Zustandssumme Z des idealen Gases an, wenn die Teilchen als unterscheidbar und als ununterscheidbar angenommen werden. Erklären Sie den Begriff der Quantenkonzentration. Welcher der obigen Fälle entspricht der Realität, und wann kann ein Gas als ideal betrachtet werden?

   (i) Geben Sie die Wärmekapazität C_V für ein Fermigas an. Vergleichen Sie qualitativ mit dem idealen Gas und begründen Sie den Unterschied.

   (j) Geben Sie das Planck'sche Strahlungsgesetz an und skizzieren Sie es. Was wird dadurch beschrieben?

Bitte wenden →

2. **Kreisprozess: Joule-Prozess**

Den *Joule*-Kreisprozess kann man sich idealisiert folgendermaßen vorstellen:

- isobare Expansion von V_1 nach V_2;
- adiabatische Expansion von von V_2 nach V_3;
- isobare Kompression von V_3 nach V_4;
- adiabatische Kompression von V_4 nach V_1.

Das Arbeitsmedium sei ein Ideales Gas.

(a) Skizzieren Sie den beschriebenen Kreisprozess im $p(V)$-Diagramm.

(b) Berechnen Sie für jeden der vier Schritte die übertragene Wärme, die geleistete Arbeit und die Änderung der Inneren Energie.

(c) Berechnen Sie den Wirkungsgrad η des Kreisprozesses als Funktion von p_1 und p_3.

3. **Thermische und kalorische Zustandsgleichungen**

Gegeben sei die Freie Energie eines Gases:

$$F(T,N,V) = -\frac{c_3 N^2}{T\,(V + c_1 N)} - N k_B T \,\ln\left(\frac{V - c_2 N}{N}\right) + c_4 NT - c_4 NT \ln T - c_5 NT \quad ,$$

wobei $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

(a) Berechnen Sie die thermische Zustandsgleichung $p = p(T,N,V)$, die kalorische Zustandsgleichung $U = U(T,N,V)$ und das chemische Potential μ.

(b) Verifizieren Sie für das Gas die *Gibbs-Duhem-Gleichung* $G = \mu N$.

weiter auf nächstem Blatt →

4. **Barometrische Höhenformel: Photonengas**

   Ein Photonengas sei dem Gravitationsfeld der Erde ausgesetzt.

   Es soll eine barometrische Höhenformel für Photonen in einem Gravitationsfeld nach Newtonscher Physik abgeleitet werden. Betrachten Sie ein Höhenelement dz und setzen Sie die auftretenden Kräfte gleich (von der z-Abhängigkeit von g sehe man ab). Daraus erhält man eine Gleichung für den Druck. Bestimmen Sie daraus die höhenabhängige Verteilung der Dichte der Inneren Energie $u(z)$.

   Hinweis: Die Photonen besitzen zwar keine Ruhemasse, aber eine dem Gravitationsfeld ausgesetzte mittlere Masse lässt sich aus der Inneren Energie beschaffen. Durch die Gravitationswirkung befinden sich im unteren Teil des Höhenelementes dz mehr Photonen als im oberen.

5. **Schwankungen im Fermigas**

   Wir betrachten einen einzelnen Energiezustand der Energie ϵ in einem Fermi-Gas.

   (a) Betrachten Sie diesen Zustand als das thermodynamische System und bestimmen Sie die Großkanonische Zustandssumme Z_G.

   (b) Mit N bezeichnen wir die Anzahl der Fermionen in dem Energiezustand. Zeigen Sie zunächst allgemein, dass die Mittelwerte $\langle N \rangle$ und $\langle N^2 \rangle$ durch

   $$\langle N \rangle = \frac{\tau}{Z_G}\frac{\partial Z_G}{\partial \mu} \qquad \text{bzw.} \qquad \langle N^2 \rangle = \frac{\tau^2}{Z_G}\frac{\partial^2 Z_G}{\partial \mu^2}$$

   mit $\tau = k_B T$ gegeben sind.

   (c) Nutzen Sie ihre Ergebnisse aus Teil (a) und (b) um zu zeigen, dass die Varianz $(\Delta N)^2 = \langle (N - \langle N \rangle)^2 \rangle$ für das Fermigas durch

   $$(\Delta N)^2 = \langle N \rangle \; (1 - \langle N \rangle)$$

   gegeben ist.

   (d) Betrachten Sie nun ein schwach angeregtes Fermi-Gas. Begründen Sie mit Hilfe von Teil (c), dass für Zustände, deren Energien weit unterhalb der Fermi-Energie liegen, $(\Delta N)^2 = 0$ gilt .

6. **Harmonischer Oszillator: Zwei-Niveau-System**

   Die Eigenenergiewerte eines Systems seien $U_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ mit $n = 0, 1$.

   (a) Berechnen Sie die Zustandssumme in der kanonischen Gesamtheit.

   (b) Berechnen Sie daraus die Innere Energie U und spezifische Wärme C_V des Systems.

   (c) Wie verhalten sich U und C_V für $T \to \infty$ und für $T \to 0$? Interpretieren Sie ihr Ergebnis.

   (d) Geben Sie ohne Rechnung den Wert der Entropie für diese beiden Grenzfälle an. Begründen Sie ihr Ergebnis kurz in Worten.