Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 02.02.2023 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

42. **Legendre-Polynome (4 Punkte)**

Zeigen Sie, dass die Legendre-Polynome $P_n(x)$ ein orthogonales System auf dem Intervall $[-1,1]$ bilden, d. h. es gilt

$$\langle P_n|P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}. \tag{1}$$

Verwenden Sie zur Lösung partielle Integration und die Darstellung der Legendre-Polynome durch die Rodrigues-Formel

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n. \tag{2}$$

Außerdem darf die Lösung des Integrals

$$\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,\mathrm{d}x = (-1)^n\frac{2^{2n+1}n!^2}{(2n+1)!} \tag{3}$$

verwendet werden.

43. **Faltungstheorem (9 Punkte)**

Aus der Vorlesung kennen Sie das Faltungstheorem:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y)g_2(y)\mathrm{d}y \;\Rightarrow\; \tilde{f}(k) = \tilde{g}_1(k)\tilde{g}_2(k) \tag{4}$$

Es seien zwei Funktionen definiert durch:

$$g_1(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{für } -1\leq x<1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \qquad g_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{für } -1\leq x<0 \\ 1-x & \text{für } 0\leq x<1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases} \tag{5}$$

(a) Berechnen Sie die Faltung

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(x-y)g_2(y)\mathrm{d}y. \tag{6}$$

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformation von g_1 und g_2.

(c) Bestimmen Sie die Fouriertransformation der Faltung mithilfe der Ergebnisse aus Aufgabenteil b).

Bitte wenden! →

44. **Fourier-Entwicklung (7 Punkte)**

Sei die periodisch fortgesetzte Sägezahnfunktion

$$f(x) = \frac{x}{2L}\,, \quad x \in [0, 2L] \tag{7}$$

gegeben.

(a) Skizzieren Sie diese Funktion.

(b) Bestimmen Sie die Fourier-Entwicklung dazu.

(c) Plotten Sie die Fourier-Entwicklung der Funktionen aus Aufgabenteil b) mit n = 4, 8 und 64 Summanden.

45. **Distributionen (10 Punkte)**

Bezeichne $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ den Raum der rasch abfallenden Funktionen:

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \mid \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^\alpha \frac{\mathrm{d}^\beta}{\mathrm{d}x^\beta}\varphi(x) \right| < \infty, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0 \right\}. \tag{8}$$

Eine Distribution ist ein stetiges lineares Funktional auf diesem Raum, also eine Abbildung von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nach $\mathbb{C}$.

In der Physik besonders wichtig ist u.a. die Delta-Distribution, die für $b \in \mathbb{R}$ definiert ist als

$$\delta_b : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}; \quad \varphi \mapsto \delta_b[\varphi] \equiv \delta_b(\varphi) := \varphi(b). \tag{9}$$

δ_b ist *keine* Funktion, aber Physiker*innen ignorieren das oft und schreiben

$$\varphi(b) = \int \mathrm{d}x\, \varphi(x)\delta(x-b). \tag{10}$$

Die Delta-Distribution lässt sich auch als Grenzwert mit Hilfe von Funktionenfolgen darstellen. Zwei solcher Funktionenscharen sind gegeben durch

$$f_\epsilon(x) := \frac{\epsilon}{\pi}\frac{1}{x^2+\epsilon^2} \qquad g_\epsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & |x| \le \epsilon \\ 0 & |x| > \epsilon \end{cases}. \tag{11}$$

(a) Bestimmen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, f_\epsilon(x)$ und $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, g_\epsilon(x)$.

(b) Zeigen Sie, dass für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \mathrm{d}x\, f_\epsilon(x)\varphi(x) = \varphi(0) \tag{12}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int \mathrm{d}x\, g_\epsilon(x)\varphi(x) = \varphi(0) \tag{13}$$

oder mit anderen Worten: f_ϵ und g_ϵ sind Darstellungen der Delta-Distribution.

(c) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}^*$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x). \tag{14}$$

Eine weitere wichtige Funktion ist die Heaviside-Sprungfunktion θ. Sie ist definiert als

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}. \tag{15}$$

(d) Fassen Sie die Heaviside-Funktion als Distribution auf:

$$\vartheta : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}; \quad \varphi \mapsto \vartheta[\varphi] := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, \theta(x)\varphi(x). \tag{16}$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{D}\vartheta = \delta$, dabei ist die distributionelle Ableitung definiert als:

$$\mathrm{D}\vartheta[\varphi] = -\vartheta[\varphi']. \tag{17}$$