

38. Divergenz (10 Punkte)

Die Differentialoperatoren div , rot , grad lassen sich nicht nur im kartesischen Koordinatensystem verwenden. Betrachten Sie nun anstelle der kartesischen Koordinaten zylindrische Polarkoordinaten:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow \vec{r} = \begin{bmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \\ z \end{bmatrix}. \quad (1)$$

- Geben Sie die normierten (lokalen) Basisvektoren $(\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$ des neuen Koordinatensystems an und zeigen Sie, dass diese ebenso ein Orthonormalsystem bilden ($\vec{e}_\alpha \propto \partial \vec{r} / \partial \alpha$, d.h. $\vec{e}_\alpha$ sind Tangentialvektoren der Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^3$ in den Parametern α).
- Leiten Sie die Divergenz in Polarkoordinaten her. Wenden Sie hierzu die Divergenz auf ein Vektorfeld $\vec{A}$ an. Gehen Sie wie folgt vor:
 - Verschaffen Sie sich die Komponenten von $\vec{A}$ in den Richtungen der neuen Basisvektoren, also A_r, A_ϕ, A_z . Stellen Sie $\vec{A}$ in diesen Komponenten dar.
 - Wenden Sie die Divergenz (in kartesischen Koordinaten) an und benützen Sie die Kettenregel, um die Ableitungen von $\vec{A}$ nach r, ϕ, z zu erhalten.
 - Terme wie $\partial r / \partial x$ können Sie berechnen, indem Sie die Jacobi-Matrix J invertieren:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} & \frac{\partial r}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2)$$

39. Satz von Stokes und Potentiale (5 Punkte)

- Verifizieren Sie den Satz von Stokes anhand der Oberfläche O und des Vektorfelds $\vec{F} = m\omega^2 \vec{r}$, wobei m und ω^2 zwei Konstanten sind. Die Parameterisierung der Oberfläche O sei gegeben durch:

$$x = \sin(t) r \quad (3)$$

$$y = \sin(2t) r^2 \quad (4)$$

$$z = 0 \quad (5)$$

mit $0 \leq t \leq \pi$ und $0 \leq r \leq 1$.

Der Rand der Oberfläche ∂O ist gegeben durch die gleiche Parametrisierung, jedoch mit $r = 1$.

- Begründen Sie, dass ein skalares Potential ϕ mit der Eigenschaft $\vec{F} = \text{grad}(\phi)$ existiert. Berechnen Sie ϕ .
- Sei $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion und sei $\vec{A}$ ein Vektorpotential zum Vektorfeld $\vec{B}$, d.h. es gelte $\vec{B} = \text{rot}(\vec{A})$.
Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}(\psi)$ ebenfalls Vektorpotential zum Vektorfeld $\vec{B}$ ist.

40. Satz von Gauß (8 Punkte)

(a) Verifizieren Sie den Integralsatz von Gauß für das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} xz \\ yz^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

und einen Würfel mit $|x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1$.

(b) Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F}(r, \theta, \phi) = r^2 \sin(\theta) \vec{e}_\theta$.

i. Begründen Sie, warum der Fluss des Vektorfeldes durch eine Kugelschale um den Ursprung mit Radius R verschwindet.

ii. Bestätigen Sie diese Aussage mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß.

41. Numerische Integration: Monte-Carlo-Verfahren (7 Punkte)

Eine Möglichkeit zur numerischen Berechnung bestimmter Integrale bietet die Familie der Monte-Carlo-Verfahren. Dabei wird das Integral

$$I = \int_M f(\vec{x}) \, d\vec{x} \quad (7)$$

durch

$$I_N = \frac{V(M)}{N} \sum_{i=1}^N f(\vec{x}_i) \quad (8)$$

genähert, wobei $\vec{x}_i \in M$ gleichverteilte Zufallspunkte sind und

$$V(M) = \int_M 1 \, d\vec{x} \quad (9)$$

das Volumen der Mannigfaltigkeit M .

Die relative Abweichung bezeichne dabei $\frac{|I - I_N|}{I}$.

(a) Betrachten Sie

$$M = \{ [x, y] \in [1, 2] \times [-2, 2] \mid x^2 - y^2 \geq 1 \}. \quad (10)$$

i. Skizzieren Sie M .

ii. Berechnen Sie den Flächeninhalt von M von Hand.

iii. Implementieren Sie die oben beschriebene Monte-Carlo-Methode und bestimmen Sie damit den Flächeninhalt von M .

Vergleichen Sie mit ihrem Ergebnis aus ii und untersuchen Sie den Einfluss von N . Stellen Sie die relative Abweichung als Funktion von N graphisch dar.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion

$$\mathbb{1}_M(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } [x, y] \in M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (11)$$

(b) Nähern Sie das Integral

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2 y^2} \, dx \, dy \quad (12)$$

mithilfe ihrer Monte-Carlo-Routine.