Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 19.01.2023 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

35. **Divergenz und Rotation (9 Punkte)**

Stellen Sie die folgenden Vektorfelder graphisch dar und berechnen Sie jeweils Divergenz und Rotation:

(a) $\vec{F}(x,y,z) = [\cos(x)\sin(y), -\sin(x)\cos(y), 0]^T$

(b) $\vec{F}(x,y,z) = [xy^2, x^2, 0]^T$

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{A} = \begin{bmatrix} 2xy\mathrm{e}^{-z^2} + (2-\lambda)z^3\cos(y^2) \\ x^2\mathrm{e}^{-z^2} - (3-\lambda)xyz^3\sin(y^2) \\ (\lambda-3)x^2yz\mathrm{e}^{-z^2} + 3xz^2\cos(y^2) \end{bmatrix}. \tag{1}$$

(c) Bestimmen Sie λ so, dass die Beziehung $\mathrm{rot}(\vec{A}) = 0$ erfüllt ist.

36. **Identitäten (12 Punkte)**

Sei $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ein skalares Feld und seien $\vec{A}, \vec{B} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ Vektorfelder.

Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

(a) $\mathrm{rot}(\mathrm{grad}(\phi)) = \vec{0}$

(b) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{A})) = 0$

(c) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}(\vec{A})) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}(\vec{A})) - \Delta\vec{A}$, mit $\Delta = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = (\nabla\cdot\nabla)$

(d) $\mathrm{div}(\phi\vec{A}) = \vec{A}\cdot\mathrm{grad}(\phi) + \phi\,\mathrm{div}(\vec{A})$

(e) $\mathrm{rot}(\phi\vec{A}) = \phi\,\mathrm{rot}(\vec{A}) + \mathrm{grad}(\phi)\times\vec{A}$

(f) $\mathrm{div}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\mathrm{rot}(\vec{A}) - \vec{A}\cdot\mathrm{rot}(\vec{B})$

37. **Volumen- und Oberflächenintegrale (9 Punkte)**

Durch die Menge $\mathcal{E} = \{\,(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\,\}$ wird ein Ellipsoid mit den Halbachsen a, b und c definiert. Eine mögliche Parametrisierung ist

$$x = a\,s\,\sin(\theta)\,\cos(\phi), \tag{2}$$
$$y = b\,s\,\sin(\theta)\,\sin(\phi), \tag{3}$$
$$z = c\,s\,\cos(\theta). \tag{4}$$

Überlegen Sie sich zunächst die Wertebereiche für die Koordinaten s, θ und ϕ, sowie deren anschauliche Bedeutung.

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Determinante.

(b) Berechnen Sie die Gesamtmasse eines Ellipsoids mit konstanter Massendichte ρ_0.

(c) Geben Sie das Flächenelement $\mathrm{d}O$ auf der Oberfläche des Ellipsoids allgemein an und berechnen Sie damit die Oberfläche für ein abgeplattetes Ellipsoid mit $a = b$.
Hinweis: Es ist

$$\int_0^\pi \sin(x)\sqrt{a^2\cos^2(x) + c^2\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = a + \frac{c^2}{2a\epsilon}\ln\left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right);\ \epsilon = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}. \tag{5}$$