Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer

9. Übungsblatt — Abgabe: 12. Januar 2023 bis 9:45 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

24. **Gitterschwingungen im Festkörper: Einstein-Modell** **(8 Punkte)**

Wir betrachten einen Festkörper aus N Atomen näherungsweise als ein System von $3N$ ungekoppelten, linearen, (eindimensionalen) harmonischen Oszillatoren. Im *Einstein-Modell* wird angenommen, dass alle $3N$ Eigenfrequenzen identisch sind und einen festen Wert ω_E haben. Die Größe $\Theta_E = \hbar\omega_E/k_B$ wird als *Einstein-Temperatur* bezeichnet.

(a) Erklären Sie zuerst kurz, warum diese Oszillatoren als unterscheidbar angesehen werden können.

(b) Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $\mathcal{Z}$, die freie Energie F, das chemische Potential μ, den Druck p und die Entropie S.

(c) Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von $\ln\mathcal{Z}$, F und S in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben.

(d) Bestimmen Sie die innere Energie U. Geben Sie Näherungsausdrücke an, die das Verhalten von U in den Grenzfällen $T \gg \Theta_E$ bzw. $T \ll \Theta_E$ beschreiben. Diskutieren Sie die Ergebnisse. Skizzieren Sie die Funktion $U(T)$.

(e) Bestimmen Sie die Wärmekapazität C_V und stellen Sie das Ergebnis mit Hilfe der *Einstein-Funktion*

$$E(x) = \frac{x^2 \exp(x)}{(\exp(x) - 1)^2}$$

dar. Untersuchen Sie das Verhalten von C_V für $T \ll \Theta_E$. Zeigen Sie, dass C_V für $T \gg \Theta_E$ dem klassischen Wert $C_V = 3Nk_B$ entspricht (Gesetz von Dulong-Petit). Skizzieren Sie den Verlauf der Funktion $C_V(T)$.

25. **Helmholz-Differentialgleichung** **(4 Punkte)**

Gegeben sei die innere Energie

$$U(\tau, N) = \frac{3}{2}N\tau.$$

Berechnen Sie daraus

(a) die Freie Energie $F(\tau, N)$ unter der Bedingung $F(\tau_0, N) = 0$,

(b) die Entropie $\sigma(\tau, N)$

(c) das chemische Potential $\mu(\tau, N)$.

Bitte wenden ⟶

26. **Infinitesimaler Carnot-Prozess** **(8 Punkte)**

Unter den *äußeren Parametern* oder *Kontrollparametern* eines thermodynamischen Systems versteht man jene Größen, die der Experimentator nach seinem freien Willen von außen am System einstellen kann. Die übrigen Parameter stellen sich dann spontan durch Streben ins Gleichgewicht ein. So ist z.B. für ein Gas V der einzige Kontrollparameter. Ein *Wärmespeicher* ist ein System ohne Kontrollparameter. Ein solches System ist vollständig durch seine innere Energie als Funktion der Temperatur bestimmt, d.h. $U = U(T)$.

(a) Geben Sie die Gleichungen zur Berechnung der Entropie eines Wärmespeichers einmal als Integral über U und zum anderen als Integral über T an. Passen Sie dazu die Gibbs-Fundamentalgleichung an die Situation des Wärmespeichers an.

(b) Betrachten Sie zwei Wärmespeicher mit $U^{(i)} = C_i T_i$ $(i = 1, 2)$ bei verschiedener Ausgangstemperaturen T_{a1} und T_{a2}. Die C_i stellen dabei die Wärmekapazitäten der Wärmespeicher dar und sind positiv. Sie sollen diesem Gesamtsystem mechanische Arbeit entziehen, und zwar indem Sie die beiden Wärmespeicher über ein Hilfssystem verbinden, an dem ein Carnot-Prozess mit sehr kleinen Wärmemengen pro Zyklus abläuft.

Beim Carnot-Prozess gibt es eine Phase der isothermen Expansion (Kompression). Dabei fließt Wärmeenergie vom heißen Reservoir in das System (vom System in das kalte Reservoir). Dies gilt auch weiterhin beim infinitesimalen Carnot-Prozess. Die Expansion (Kompression) verläuft isotherm, obwohl der heiße (kalte) Wärmespeicher leicht abgekühlt (aufgeheizt) wird, allerdings eben nur infinitesimal. Für einen Zyklus spielen die Wärmespeicher also die Rolle der Wärmebäder. Allerdings ist die Situation modifiziert, denn die Wärmespeicher sind endlich und ändern ihre Temperatur bei Wärmeaufnahme bzw. Wämeabgabe, was für Wärmebäder nicht erfolgen würde. Stellen Sie die Bilanzen für Wärme, Arbeit und Entropie pro Carnot-Zyklus auf.

(c) Durch die Wärmeabgabe verändern sich die Temperaturen der Wärmespeicher. Berechnen Sie die Endtemperatur T_e des Gesamtsystems und die insgesamt beim Angleichungsprozess gewonnene Arbeit, wenn die Ausgangstemperaturen der beiden Wärmespeicher T_{a1} und T_{a2} betragen haben.

(d) Wenden Sie das Ergebnis auf die folgende Situation an: An einem warmen Frühlingstag ($T_{a1} = 20°C$) haben Sie einen Liter kühleres Wasser der Temperatur $T_{a2} = 15°C$ als Treibstoff für eine Wärmekraftmaschine Ihrer Wahl zur Verfügung. Um wieviel können Sie das Wasser im Schwerefeld der Erde damit anheben?

Hinweis: Für die Erdatmosphäre ist eine unendliche Wärmekapazität anzunehmen. Die vom Frühlingstag gelieferte Wärme lässt sich durch einen Grenzübergang $C_1 \to \infty$ ermitteln. Alternativ kann man sich diese Wärme auch mithilfe des Wirkungsgrades überlegen.

Bemerkung: Der in dieser Aufgabe behandelte Prozess wurde tatsächlich in der von Thomas Newcomen 1712 entwickelten *atmosphärischen Dampfmaschine* ausgenutzt. Der Wirkungsgrad lag allerdings nur bei etwa 0.5%.

Bitte wenden ⟶

27. **Thermodynamische Betrachtung einer Spiralfeder** **(4 Bonuspunkte)**

Wir betrachten eine Spiralfeder, die dem Hook'schen Gesetz folgt, das heißt, die Rückstellkraft K ist proportional zur Auslenkung x:

$$K = -D(T)\,x, \quad \text{wobei} \quad D(T) = \frac{a}{T}$$

und $a > 0$ eine Konstante ist. Die Feder werde bei konstanter Temperatur T aus ihrer Ruhelage ($x = 0$) ausgelenkt (isotherme Prozessführung).

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Arbeit δW die Freie Energie $F(T, x)$ unter der Bedingung $F(T, x = 0) = 0$.

(b) Formulieren Sie das Differential von $F(T, x)$ und berechnen Sie die Entropie $S(T, x)$.

(c) Berechnen Sie die innere Energie $U(T, x)$.