



21. Thermodynamische Relationen II

(8 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Thermodynamischen Relationen:

(a) $\left(\frac{\partial \sigma}{\partial V}\right)_{\tau, N} = \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_{V, N}$

(b) $\left(\frac{\partial U}{\partial N}\right)_{\tau, V} - \mu = -\tau \left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)_{N, V}$

(c) $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_{\tau, N} = -\frac{1}{k_B} \tau V \left(\alpha^2 + k_B \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \tau}\right)_{p, N}\right)$

(d) $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_{\tau} = \tau \left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_V - p$

Hierbei bezeichnet k_B die Boltzmannkonstante und α den *thermischen Ausdehnungskoeffizienten*, der durch $\alpha = \frac{k_B}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial \tau}\right)_p$ gegeben ist. Die Relation (d) wurde in Aufgabe 14 verwendet, um die Vollständigkeit von $d\sigma = \frac{1}{\tau} \delta Q$ zu zeigen.

22. Thermische und kalorische Zustandsgleichungen

(5 Punkte)

Gegeben sei die Freie Energie eines Gases:

$$F(T, N, V) = -\frac{c_3 N^2}{T(V + c_1 N)} - N k_B T \ln \left(\frac{V - c_2 N}{N} \right) + c_4 N T - c_4 N T \ln T - c_5 N T, \quad ,$$

wobei $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 \in \mathbb{R}$ Konstanten sind.

- (a) Berechnen Sie die thermische Zustandsgleichung $p = p(T, N, V)$, die kalorische Zustandsgleichung $U = U(T, N, V)$ und das chemische Potential μ .
- (b) Verifizieren Sie für das Gas die *Gibbs-Duhem-Gleichung* $G = \mu N$.

23. Der Weihnachtsmann und tiefe Temperaturen

(7 Punkte)

Jemand hat sich vom Weihnachtsmann suprafluides ^3He gewünscht. Dem Weihnachtsmann ist klar, dass er dafür extrem tiefe Temperaturen ($\sim \text{mK}$) benötigt, jedoch nicht, wie man diese erreicht. Eine Möglichkeit der Erzeugung solcher Temperaturen ist die magnetische Kühlung, die in dieser Aufgabe diskutiert werden soll. Wir betrachten dazu wiederum eine Spinkette im äußeren Magnetfeld $B > 0$.

- (a) In Aufgabe 5 wurden als Zwischenergebnisse die Ausdrücke

$$\sigma(U, N, B) = N \ln N - \frac{1}{2} \left(N - \frac{U}{\mu B} \right) \ln \left(\frac{N}{2} - \frac{U}{2\mu B} \right) - \frac{1}{2} \left(N + \frac{U}{\mu B} \right) \ln \left(\frac{N}{2} + \frac{U}{2\mu B} \right)$$

und

$$U(\tau, N, B) = -\mu B N \tanh \left(\frac{\mu B}{\tau} \right)$$

für die Spinkette bestimmt. Zeigen Sie, dass daraus für die Entropie

$$S(T, N, B) = N k_B \left\{ \ln \left[2 \cosh \frac{\mu B}{k_B T} \right] - \frac{\mu B}{k_B T} \tanh \left(\frac{\mu B}{k_B T} \right) \right\}$$

hergeleitet werden kann.

Achtung: μ bezeichnet hier das magnetische Moment und **nicht** das chemische Potential.

- (b) Wenn man bei eingeschaltetem Magnetfeld B_a wartet, bis sich das thermodynamische Gleichgewicht mit der Temperatur T_a eingestellt hat und dann das äußere Magnetfeld auf den Wert B_e rasch absenkt und dafür sorgt, dass die Entropie des Systems konstant bleibt (adiabatischer Vorgang), so stellt sich ein neues Gleichgewicht bei niedrigerer Temperatur $T_e < T_a$ ein, die Spinkette wird also abgekühlt. Hinreichende Bedingung für diesen Vorgang ist

$$\frac{T_e}{T_a} = \frac{B_e}{B_a}.$$

Begründen Sie diese Beziehung über die Entropie S .

- (c) Wenn man nun das Magnetfeld wieder auf B_a langsam erhöht, und dabei die Temperatur konstant hält, so kann man sukzessive zu tieferen Temperaturen gelangen. Skizzieren Sie diesen Vorgang in einem S - T -Diagramm. Warum kann man nie $T = 0$ erreichen? Überlegen Sie sich dazu, welcher Einfluss den Grenzprozess $B_e \rightarrow 0$ stören könnte.