Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 22.12.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

27. **Eigenschaften von Determinanten (10 Punkte)**

(a) Seien $j, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $j \leq n$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ und $A, B \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$. Gehen Sie von der aus der Vorlesung bekannten Definition der Determinante bzw. dem Laplace-Entwicklungssatz aus und zeigen Sie folgende Aussagen:

i. $\det(A) = \det(A^T)$

ii. Wenn A zwei gleiche Zeilen hat, ist $\det(A) = 0$.

iii. Wenn A und B durch das Vertauschen zweier Zeilen auseinander hervorgehen, ist

$$\det(A) = -\det(B) \tag{1}$$

iv.

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \tag{2}$$

v.

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{j1} & \dots & \lambda a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \lambda \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) \tag{3}$$

vi.

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} + \lambda a_{i1} & \dots & a_{jn} + \lambda a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right) \tag{4}$$

vii. $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ alle Zeilen von A sind linear unabhängig $\Leftrightarrow \exists A^{-1}$

(b) Beweisen Sie für $A, B \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$ den Determinanten-Multiplikationssatz

$$\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B). \tag{5}$$

Hinweis: Konstruieren Sie eine Zerlegung von A in ein Produkt von Matrizen $S_i(\lambda)$, die die i-te Zeile mit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ multipliziert und Matrizen Q_{ij}, die die j-te Zeile auf die i-te Zeile addiert. Zeigen Sie nun, dass der Multiplikationssatz für B und diese Matrizen gilt.

28. **Matrizen: Inverse und Spur (6 Punkte)**

Seien $A, B, C, D \in \mathbb{M}(n \times n, K)$ und D ähnlich zu A. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

(b) $\mathrm{Sp}(A^T) = \mathrm{Sp}(A)$

(c) $\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot A)$

(d) $\mathrm{Sp}(A \cdot B) = \mathrm{Sp}(A)\mathrm{Sp}(B)$

(e) $\mathrm{Sp}(A \cdot B \cdot C) = \mathrm{Sp}(C \cdot A \cdot B) = \mathrm{Sp}(B \cdot C \cdot A)$

(f) $\mathrm{Sp}(D) = \mathrm{Sp}(A)$

29. **Ähnlichkeit von Matrizen (7 Punkte)**

Sei g eine lineare Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit folgender Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

$$g^e_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 & 1 \\ \sqrt{3} & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{6}$$

(a) Geben Sie die Matrixdarstellung g^f_{ij} von g bezüglich der Basis $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ an, wobei

$$\vec{f}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{f}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{f}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

(b) Berechnen Sie $\det(g^e_{ij})$ und $\det(g^f_{ij})$.

30. **Cramer-Regel (7 Punkte)**

Die Cramer-Regel besagt, dass die Lösung eines Gleichungssystems $A \cdot x = b$ mit quadratischer Koeffizientenmatrix A und $\det(A) \neq 0$ gegeben ist als

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \tag{8}$$

wobei A_i ensteht, indem man die i-te Spalte von A durch b ersetzt.

Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & & & + & 6x_3 & = & 12 \\ x_1 & + & 9x_2 & + & 5x_3 & = & 44 \\ & & 5x_2 & + & 10x_3 & = & 30 \end{array} \tag{9}$$

Lösen Sie obiges Gleichungssystem mit

(a) dem Gauß-Jordan-Verfahren,

(b) der Cramer-Regel.