

Übungsblätter gibt es unter <https://lnk.tu-bs.de/joFKnf>.

Die FG Physik veranstaltet am Donnerstag, den 15.12.2022 ab 18:30 Uhr eine Weihnachtsfeier in MS 3.1

24. Spezielle Matrizen (8 Punkte)

Drehungen in der Ebene lassen sich durch eine Matrix der Form

$$M_\phi = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (1)$$

beschreiben.

- (a) Überzeugen Sie sich anhand eines Beispiels davon, dass es sich um Drehungen handelt. Wenden Sie dazu M_ϕ für $\phi = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ auf den Vektor $\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ an und skizzieren Sie das Ergebnis.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge aller Drehungen M_ϕ , wobei $\phi \in [0, 2\pi)$ bezüglich der Matrixmultiplikation eine Gruppe bildet. Prüfen Sie dazu die Gruppenaxiome (i-iv) nach:

i. Abgeschlossenheit:

$$M_\phi \cdot M_\vartheta = M_{\phi+\vartheta} \quad \forall \phi, \vartheta \quad (2)$$

ii. Assoziativität:

$$M_\phi \cdot (M_\vartheta \cdot M_\psi) = (M_\phi \cdot M_\vartheta) \cdot M_\psi \quad \forall \phi, \vartheta, \psi \quad (3)$$

iii. Neutrales Element:

$$\exists \vartheta_0 : \forall \phi \quad M_\phi \cdot M_{\vartheta_0} = M_\phi \quad (4)$$

iv. Inverses Element:

$$M_\phi \cdot M_{-\phi} = \mathbb{1} \quad \forall \phi \quad (5)$$

Eine Gruppe ist abelsch, wenn gilt:

v. Kommutativität:

$$M_\phi \cdot M_\vartheta = M_\vartheta \cdot M_\phi \quad \forall \phi, \vartheta \quad (6)$$

Ist die Gruppe abelsch? Begründen Sie.

In der Quantenmechanik sind zur Beschreibung des Spins eines Elektrons die Pauli-Matrizen von Interesse:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

- (c) Zeigen Sie, dass $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ zusammen mit der Einheitsmatrix $\mathbb{1} \equiv \sigma_0$ eine Basis des Vektorraumes der 2×2 -Matrizen bilden.
- (d) Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ. Für die Paulimatrizen lässt sich jedoch eine Beziehung angeben. Zeigen Sie, dass gilt:

$$[\sigma_l, \sigma_m] = \sigma_l \sigma_m - \sigma_m \sigma_l = 2i \varepsilon_{lmn} \sigma_n \quad (8)$$

25. Matrixmultiplikation (12 Punkte)

Gegeben seien $A, C \in \mathbb{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{M}(1 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad y = [1 \quad 0 \quad 1] \quad (9)$$

Berechnen Sie

- | | | | |
|-----|--|-----|-------------|
| (a) | $B \cdot A$ | (d) | $x \cdot y$ |
| (b) | $\alpha A + \beta C, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ | (e) | $y \cdot x$ |
| (c) | $A \cdot C$ | | |

- (f) Schreiben Sie ein Programm, dass zwei Zufallsmatrizen $A, B \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$ miteinander multipliziert.

Vergleichen Sie die Laufzeit mindestens für $n = 10, 100, 1000, 10000$ mit der einer von Ihrer Wahl-Programmiersprache bereitgestellten Routine (so es eine gibt).

Stellen Sie Ihr Ergebnis graphisch dar.

26. Gauß-Jordan-Verfahren (10 Punkte)

Betrachten Sie folgendes Gleichungssystem

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \quad (10)$$

$$2x_1 - 2x_2 + 2x_4 = 2 \quad (11)$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \quad (12)$$

$$x_1 - x_4 = 4. \quad (13)$$

- (a) Lösen Sie das Gleichungssystem indem Sie (von Hand) mithilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens die Inverse der Koeffizientenmatrix bestimmen.
- (b) Schreiben Sie ein Programm, das eine Matrix beliebiger Größe mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens invertiert.
- Testen Sie Ihr Programm an obigem Gleichungssystem.
 - Betrachten Sie die Matrix $A^{(N)}$ der Dimension N mit den Einträgen:

$$a_{ij}^{(N)} = \begin{cases} i, & i = j \\ 1, & \text{sonst} \end{cases} \quad (14)$$

Messen Sie die Laufzeit Ihres Algorithmus in Abhängigkeit von der Dimension N und stellen Sie diese graphisch dar.

Hinweis: Beim Gauß-Jordan-Verfahren müssen Sie, um die Einträge unter der Diagonale zu löschen mit dem derzeitigen Diagonaleintrag multiplizieren. Hier müssen Sie sicherstellen, dass sich in diesem Eintrag keine 0 befindet. Man kann dieses Problem lösen, indem man die Zeilen so tauscht, dass der betragsmäßig größte Eintrag oben steht. Dieser Vorgang heißt *Pivotisierung* und macht das Verfahren stabil.