Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 08.12.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

20. **Skalarprodukt (5 Punkte)**

Sei $\mathcal{B}_1 \equiv \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ eine Basis des Vektorraumes $V \subset \mathbb{R}^n$ für die $\langle \vec{v}_1 | \vec{v}_2 \rangle \neq 0$ ist, wobei $\langle \bullet | \bullet \rangle$ das Standardskalarprodukt ist. Die Koordinatendarstellung für einen Vektor $\vec{a} \in V$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ ist definiert durch

$$\vec{a} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2. \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass in der Basisdarstellung zu $\mathcal{B}_1$ folgt

$$\left\langle \vec{a} \middle| \vec{b} \right\rangle \neq \sum_i a_i b_i. \tag{2}$$

(b) Seien nun $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ und $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. Finden Sie nun eine Basis $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$, sodass

$$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V : \left\langle \vec{a} \middle| \vec{b} \right\rangle = \sum_i \tilde{a}_i b_i, \tag{3}$$

wobei die Koordinatendarstellung bezüglich $\mathcal{B}_2$ definiert ist durch

$$\vec{a} = \tilde{a}_1 \vec{w}_1 + \tilde{a}_2 \vec{w}_2. \tag{4}$$

Fertigen Sie eine Skizze an.

Hinweis: Fertigen Sie die Skizze zuerst an und überlegen Sie sich wie die Basis konstruiert werden muss.

(c) Man nennt die Basis $\mathcal{B}_2$ die zu $\mathcal{B}_1$ duale Basis. Zeigen Sie, dass eine Orthonormalbasis zu sich selbst dual ist.

21. **Festkörper (5 Punkte)**

In einem Festkörper sind die Atome in einem regelmäßigen Gitter angeordnet. Die Lage eines jeden Atoms kann durch Vielfaches der Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ beschrieben werden. Diese seien durch $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$, $\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}^T \times 10^{-10}\,\mathrm{m}$ bzgl. kartesischer Koordinaten gegeben.

(a) Berechnen Sie das Spatprodukt $\langle \vec{a}_1 | \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle$.
Welche anschauliche Bedeutung hat das Spatprodukt?

(b) Für viele Anwendungen ist das sogenannte reziproke Gitter zweckmäßig, welches gegeben ist durch

$$\vec{b}_i = \frac{\vec{a}_j \times \vec{a}_k}{\langle \vec{a}_1 | \vec{a}_2 \times \vec{a}_3 \rangle}, \tag{5}$$

wobei $i, j, k = 1, 2, 3$ und zyklisch vertauscht.
Berechnen Sie für die oben angegebenen Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ die Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$, $\vec{b}_3$.

Bitte wenden! →

22. **Vektorprodukt (8 Punkte)**

(a) Bestimmen Sie für

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \qquad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T \qquad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\end{bmatrix}^T \tag{6}$$

die Kreuzprodukte:

$$\vec{v}_1 \times \vec{v}_2 \qquad \vec{v}_2 \times \vec{v}_3 \qquad \vec{v}_3 \times \vec{v}_1. \tag{7}$$

Untersuchen Sie das Ergebnis auf lineare Abhängigkeit.

(b) Seien $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$. Benützen Sie das Levi-Civita-Symbol und zeigen bzw. berechnen Sie

i.
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{8}$$

ii.
$$\left\langle \vec{a} \times \vec{b} \middle| \vec{c} \times \vec{d} \right\rangle = \langle \vec{a} | \vec{c} \rangle \left\langle \vec{b} \middle| \vec{d} \right\rangle - \left\langle \vec{a} \middle| \vec{d} \right\rangle \left\langle \vec{b} \middle| \vec{c} \right\rangle \tag{9}$$

iii.
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{10}$$

iv.
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})) \tag{11}$$

v.
$$\left\langle \vec{a} \middle| \vec{b} \times \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{c} \middle| \vec{a} \times \vec{b} \right\rangle = \left\langle \vec{b} \middle| \vec{c} \times \vec{a} \right\rangle \tag{12}$$

23. **Matrixmultiplikation (0 Punkte + 12 Bonuspunkte)**

Gegeben seien $A, C \in \mathbb{M}(3 \times 3, \mathbb{R})$, $B \in \mathbb{M}(2 \times 3, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{M}(3 \times 1, \mathbb{R})$ und $y \in \mathbb{M}(1 \times 3, \mathbb{R})$ gegeben durch

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & -2\end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{13}$$

Berechnen Sie

(a) $B \cdot A$

(b) $\alpha A + \beta C,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(c) $A \cdot C$

(d) $x \cdot y$

(e) $y \cdot x$

(f) Schreiben Sie ein Programm, dass zwei Zufallsmatrizen A, $B \in \mathbb{M}(n \times n, \mathbb{R})$ miteinander multipliziert.
Vergleichen Sie die Laufzeit mindestens für $n = 10, 100, 1000, 10000$ mit der einer von Ihrer Wahl-Programmiersprache bereitgestellten Routine (so es eine gibt).
Stellen Sie Ihr Ergebnis graphisch dar.