



15. Entropie und Information

(8 Punkte)

Wir betrachten eine Reihe von Ereignissen E_n ($n = 1, 2, \dots, N$), die mit bestimmten Wahrscheinlichkeiten P_n mit

$$\sum_n P_n = 1 \quad (1)$$

treten können. Wir ordnen nun der Feststellung eines Ereignisses E_n einen Informationswert I_n zu, bei häufiger Wiederholung von solchen Feststellungen an der gleichen Reihe von Ereignissen erhält man dann einen mittleren Informationsgehalt, festgelegt als

$$I = - \sum_n P_n \log_2 P_n. \quad (2)$$

Diese Definition ist so gewählt, dass sie die mittlere Anzahl von einfachen Alternativfragen (Ja oder Nein, 0 oder 1, Links oder Rechts, Oben oder Unten) angibt, die zur vollständigen Charakterisierung eines Ereignisses der Reihe nach gestellt und beantwortet werden müssen. Information ist also zu verstehen im Sinne von fehlender Information, die notwendig ist, um ein Ereignis eindeutig festzustellen.

Beispiele:

- (1) $N = 1$. Ein Ereignis tritt mit Sicherheit ein, $P_1 = 1$. In diesem Fall ist $I = 0$. Man gewinnt keine Information, da der Eintritt des Ereignisses von vornherein feststeht. Es fehlt somit keine Information, um das Ereignis festzustellen. Es gibt nur ein Ereignis.
- (2) $N = 2$. $P_1 = P_2 = 1/2$. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit ein. Durch Einsetzen erhält man¹ $I = 1$ bit. Es fehlt also 1 bit an Information, um festzustellen, ob Ereignis 1 oder Ereignis 2 vorliegt.

Aufgaben:

- (a) Ein roter Dino hält sich mit gleicher Wahrscheinlichkeit von $P_n = 1/128$ auf einer der 128 quadratischen Fliesen am Boden eines rechteckigen Raumes, der doppelt so lang wie breit ist, auf. Wie groß ist der mittlere (fehlende) Informationsgehalt der Feststellung des Aufenthaltsorts²?
- (b) Erinnert die Definition der Information nicht an die Entropie? Schreiben Sie in einem Satz, warum größere Entropie mit mehr fehlender Information zu identifizieren ist.
- (c) Ein Fabrikant möchte 3000 Tafeln Schokolade (Vollmilch, Zartbitter und weiße Schokolade) produzieren. Wieviele Tafeln von jeder Sorte muss er herstellen, wenn er möglichst viele verkaufen will, über die Beliebtheit der verschiedenen Sorten allerdings keine Erhebungen angestellt hat. Versuchen Sie zuerst durch Argumentieren auf ein Ergebnis zu kommen und berechnen Sie dann die Information dieser Verteilung.
- (d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten P_n , unter denen die fehlende Information (2) maximal wird. Die Ereignisse seien nicht durch mögliche Kopplungen oder äussere Einwirkungen beeinflusst. Berücksichtigen Sie dabei etwaige Nebenbedingungen.
- (e) Stellen Sie eine Analogie zur Thermodynamik (Entropie, Ensembles,...) her.

Bitte wenden →

¹bit ist die Einheit der Information und entspricht einer 0 oder 1 Entscheidung.

²Man sieht, dass in der Definition von I keine Bewertung der Information (etwa nützlich - unnützlich) enthalten ist.

16. Vollständige Differentiale**(8 Punkte)**

Gegeben ist die Differentialform

$$\delta F = (xy^2 + xye^x) dx + (2x^2y + xe^x) dy. \quad (3)$$

- (a) Überprüfen Sie die Differentialform auf Exaktheit (Vollständigkeit).
- (b) Bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor $h(x, y)$, sodass die Differentialform exakt (vollständig) wird. Machen Sie dazu für $h(x, y)$ einen geeigneten Ansatz.
- (c) Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialform mit dem integrierenden Faktor und bestimmen Sie ein Potential $\Phi(x, y)$.

Desweiteren ist Differentialform

$$\delta F = y dx - x dy \quad (4)$$

gegeben.

- (d) Überprüfen Sie die Differentialform auf Exaktheit (Vollständigkeit).
- (e) Bestimmen Sie gegebenenfalls einen integrierenden Faktor $h(x, y)$, sodass die Differentialform exakt (vollständig) wird. Machen Sie dazu für $h(x, y)$ einen geeigneten Ansatz.
- (f) Multiplizieren Sie die ursprüngliche Differentialform mit dem integrierenden Faktor und bestimmen Sie ein Potential $\Phi(x, y)$.

17. Homogene Funktionen**(4 Punkte)**Eine Funktion f heißt homogene Funktion m -ten Grades, wenn gilt

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^m f(x_1, \dots, x_n) \quad (5)$$

für $\lambda > 0$ und $m \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Homogenität und geben Sie gegebenenfalls den Grad m an.

- (a) $f(x_1, x_2) = x_1^4 x_2^3$
- (b) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}$
- (c) $f(x) = e^x$
- (d) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1^5 + x_2^3 x_3^2}{x_1 x_2^2 \sqrt{x_3}}$