Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 01.12.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

16. **Einige Integrale (8 Punkte)**

Lösen Sie die nachfolgenden Integrale unter Angabe der verwendeten Integrationsregel(n):

(a) $\int \sin\left(\sqrt{x}\right) \mathrm{d}x$

(b) $\int \frac{1}{x \ln\left(x\right)} \mathrm{d}x$

(c) $\int_0^1 (x - x^2) \sin\left(n\pi x\right) \mathrm{d}x, \; n \in \mathbb{N}$

(d) $\int \sin^2\left(x\right) \mathrm{d}x$

17. **Vektorraum (7 Punkte)**

Betrachten Sie $F_2 = (\{0, 1\}, \oplus, \odot)$

Es gelte

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1 \tag{1}$$

und

$$0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass F_2 ein Körper ist.

Für eine Menge A bezeichne $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge, also die Menge aller Teilmengen von A.

Seien weiterhin die disjunkte Vereinigung

$$M_1 \triangle M_2 = (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1), \quad M_1, M_2 \in \mathcal{P}(A) \tag{3}$$

und

$$\circ : F_2 \times \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A) \tag{4}$$

mit

$$0 \circ M = \emptyset, \quad 1 \circ M = M, \quad M \in \mathcal{P}(A) \tag{5}$$

gegeben.

(b) Zeigen Sie für eine nichtleere Menge A, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle, \circ)$ ein F_2-Vektorraum ist.

18. **Lehrsätze aus der ebenen Geometrie (9 Punkte)**

Beweisen Sie mit Hilfe der Vektorrechnung folgende Lehrsätze aus der ebenen Geometrie:

(a) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
(b) Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich im Verhältnis 2:1.
(c) Die Seitenmittelpunkte eines (beliebigen) Vierecks bilden die Ecken eines Parallelogramms.

Fertigen Sie zur Unterstützung der Beweisführung Skizzen an.

Bitte wenden! →

19. **Basis und Basiswechsel (6 Punkte)**

Gegeben seien 3 Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ sowie drei weitere Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$:

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Gegeben seien nun die zwei Vektoren:

$$\vec{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 17 \\ 42 \end{bmatrix}, \ \vec{q} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

Stellen Sie diese beiden Vektoren

i. als Linearkombination der Vektoren der Standardbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ und

ii. als Linearkombination der Basis $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ dar.