



12. Gleichverteilungssatz

(7 Punkte)

Wir betrachten ein System aus N Teilchen im klassischen Bereich, d.h. die Koordinaten und Impulse der Teilchen seien durch $\underline{q}, \underline{p} \in \mathbb{R}^{3N}$ und die Energie durch die Hamiltonfunktion $\mathcal{H}(\underline{q}, \underline{p})$ gegeben.

- (a) Beweisen Sie den klassischen Gleichverteilungssatz

$$\left\langle x_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_k} \right\rangle = \delta_{jk} \tau \quad .$$

Hierbei bezeichnet x_j eine beliebige Variable (Koordinate oder Impuls) der Hamiltonfunktion.

Hinweis: Gehen Sie von der Definition des Mittelwertes im kanonischen Ensemble aus und integrieren Sie diesen Ausdruck partiell.

- (b) Verwenden sie Ihr Ergebnis aus (a) um zu zeigen, dass jeder Freiheitsgrad (Variable), der quadratisch in \mathcal{H} auftritt, $\tau/2$ zur inneren Energie beiträgt, d.h.

$$U = \frac{f}{2} \tau \quad ;$$

wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet. Alternativ lässt sich dies auch direkt aus der kanonischen Zustandssumme herleiten.

- (c) Bestimmen Sie nun die mittlere Energie für

- i. ein System aus N freien Teilchen
- ii. ein System aus N (eindimensionalen) harmonischen Oszillatoren
- iii. ein relativistisches Teilchen mit $\mathcal{H} = cp$ (c sei hier die Lichtgeschwindigkeit, $p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$).

13. Differentialformen

(10 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen einige Grundbegriffe über Differentialformen wiederholt werden.

- (a) Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $U \subset \mathbb{R}^3$ sei eine Differentialform

$$\delta F = F_1(\underline{x})dx + F_2(\underline{x})dy + F_3(\underline{x})dz$$

mit stetig differenzierbaren Koeffizienten $F_1(\underline{x})$, $F_2(\underline{x})$ und $F_3(\underline{x})$ gegeben. Zeigen Sie: Für δF existiert genau dann (**zwei Richtungen**) ein Potential $\phi(\underline{x})$ mit

$$\delta F = d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad ,$$

wenn die Integrabilitätsbedingung

$$\text{rot } \underline{F} = 0$$

erfüllt ist, wobei $\underline{F} = (F_1, F_2, F_3)$ als Vektorfeld im üblichen Sinne zu lesen ist. Ein solches δF heißt *vollständig* oder *exakt*. Wie lautet die Integrabilitätsbedingung in zwei Dimensionen?

Bitte wenden \rightarrow

Bemerkung: Analog zur Mechanik kann die Existenz eines Potentials auch als äquivalent zur Wegunabhängigkeit der Integration über die Differentialform betrachtet werden:

$$\delta F \text{ exakt} \Leftrightarrow \int_{\gamma} \delta F = \int_{\gamma} \underline{F} d\underline{x} = 0$$

für jeden (stückweise stetigen) geschlossenen Weg γ . Wie in der Vorlesung später noch behandelt wird, entspricht die Wegunabhängigkeit der Integration in der Thermodynamik gerade die Unabhängigkeit von der konkreten Prozessführung.

(b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Formen vollständige Differentiale darstellen:

- i. $\delta F = \frac{y}{x} dx + \ln\left(\frac{x}{y^{\alpha+1}}\right) dy$; $x, y > 0$, $\alpha = \text{const}$
- ii. $\delta F = C dx + \frac{x}{y} dy$, $C = \text{const}$.

(c) Bestimmen Sie für das vollständige Differential aus (b) ein Potential $\phi(x, y)$.

(d) Betrachten Sie nun das nicht vollständige Differential aus (b) und bestimmen Sie eine nichtverschwindende Funktion $h(x, y)$ so, dass das Produkt $h(x, y) \delta F$ ein vollständiges Differential ist. Die Funktion $h(x, y)$ heißt *integrierender Faktor* für δF . Geben Sie ein Potential ϕ zu $h(x, y) \delta F$ an.

Hinweis: Als Bestimmungsgleichung für $h(x, y)$ ergibt sich eine partielle DGL. Diese braucht aber nicht allgemein gelöst zu werden. Irgendeine nichttriviale Lösung ist ausreichend. Diese findet man z.B. durch Erraten, einen Separationsansatz oder eine geschickte Variablenabhängigkeit.

(e) Es lässt sich jedoch nicht immer ein von Null verschiedener integrierender Faktor finden: Zeigen Sie zunächst allgemein, dass eine Differentialform δF mit einem nichttrivialen integrierenden Faktor $h(x, y, z)$ der „Frobenius-Integrabilitätsbedingung“

$$\underline{F} \cdot (\text{rot } \underline{F}) = 0$$

genügen muss. Zeigen Sie anschließend, dass

$$\delta F = y dx - x dy + dz$$

nicht exakt und die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt ist.

Hinweis: $\text{rot}(\psi \underline{A}) = \psi \text{rot } \underline{A} - \underline{A} \times (\text{grad } \psi)$

(f) Wenn die Frobenius-Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, existiert ein integrierender Faktor. Welche Schlussfolgerung ergibt sich daraus zur Existenz eines integrierenden Faktors $h(x, y)$ im zweidimensionalen Fall $\underline{F} = (F_1, F_2, 0)$?

14. Totale Differentiale und Zustandsgrößen

(3 Punkte)

Wir betrachten das Differential der Wärme δQ .

(a) Zeigen Sie, dass

$$\delta Q = dU + p dV$$

für $U = U(\tau, V)$ im Allgemeinen kein totales Differential darstellt.

(b) Zeigen Sie, dass $1/\tau$ die Rolle eines integrierenden Faktors spielt, wenn die Bedingung

$$(\partial_V U)_\tau = \tau (\partial_\tau p)_V - p$$

erfüllt ist und somit

$$d\sigma = \frac{1}{\tau} dU + \frac{p}{\tau} dV$$

ein totales Differential, also $\sigma(U, V)$ eine Zustandsgröße darstellt.

Hinweis: Für diese Aufgabe ist es hilfreich vorher Aufgabe 13 bearbeitet zu haben.