Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 24.11.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

12. **Bestimmte Integrale (8 Punkte)**

Lösen Sie die nachfolgenden Integrale unter Angabe der verwendeten Integrationsregel(n):

(a) $$\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

(c) $$\int_0^1 \sqrt[3]{x^2}\,\mathrm{d}x$$

(b) $$\int_0^1 \frac{x}{(1-x^2)^{1/4}}\,\mathrm{d}x$$

(d) $$\int_{-\infty}^{\infty} x^5\,\cos(x)\,\frac{\exp(x^2)-1}{\ln(x^2+2)}\,\mathrm{d}x$$

13. **Unbestimmte Integrale (8 Punkte)**

Lösen Sie die nachfolgenden Integrale unter Angabe der verwendeten Integrationsregel(n):

(a) $$\int \sin^4(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

(c) $$\int \frac{1}{\sqrt{4+9x^2}}\,\mathrm{d}x$$

(b) $$\int x^2\cos(2x)\,\mathrm{d}x$$

(d) $$\int \frac{2x^2-5x+2}{x^3-2x^2+x}\,\mathrm{d}x$$

14. **Temperatur der Sonnenoberfläche (6 Punkte)**

Das Wien-Strahlungsgesetz

$$f(\omega) \propto \frac{\omega^3}{\exp(\frac{\hbar\omega}{k_\mathrm{B}T})} \tag{1}$$

gibt in durchaus guter Näherung an, wie viel Leistung ein schwarzer Strahler pro Frequenz abstrahlt. So lässt sich die Oberflächentemperatur der Sonne berechnen, wenn man den Mittelwert der abgestrahlten Frequenzen kennt.

(a) Leiten Sie (z.B. durch vollständige Induktion) die Lösung des Integrals

$$\int_0^\infty x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

her.

(b) Der Erwartungswert von ω ist definiert als

$$\langle\omega\rangle = \frac{1}{||f||}\int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,\omega\,f(\omega), \qquad ||f|| = \int_0^\infty \mathrm{d}\omega\,f(\omega). \tag{3}$$

Bei der Sonne ist $\langle\omega\rangle/(2\pi) \approx 500\cdot 10^{12}$ Hz (gelb-orange).
Berechnen Sie die Temperatur T.

Bitte wenden! →

15. **Gauß-Wellenpaket & Heisenberg-Unschärferelation (8 Punkte)**

In der Quantenmechanik wird der Zustand eines Teilchens durch die Wellenfunktionen $\phi(x)$ beschrieben. Betrachten Sie ein Gauß-Wellenpaket im Ursprung:

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{(1/4)}\sqrt{\Delta x}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(\Delta x)^2}\right) , \tag{4}$$

wobei $(\Delta x)^2$ konstant ist.

(a) Berechnen Sie das Integral und bestimmen Sie c_1:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = c_1 \tag{5}$$

Betrachten Sie dafür zunächst

$$c_1^2 = c_1 \times c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)\,\mathrm{d}y\,. \tag{6}$$

Substituieren Sie in dem entstehenden Integral $x = r\cos(\phi), y = r\sin(\phi)$ mit $\phi \in [0, 2\pi]$ und $r \in [0, \infty]$.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass das Volumenelement $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion normiert ist:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2\ \mathrm{d}x = 1 \tag{7}$$

Hinweis: Benützen Sie ihr Ergebnis aus der vorherigen Teilaufgabe.

(c) Die Varianz des Orts $(\Delta x)^2$ ist definiert als

$$(\Delta x)^2 = \left\langle x^2 \right\rangle - \langle x \rangle^2\ , \tag{8}$$

wobei $\langle x \rangle$ der Erwartungswert des Orts ist.

i. Bestimmen Sie den Erwartungswert des Orts $\langle x \rangle$:

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\,|\phi(x)|^2\ \mathrm{d}x \tag{9}$$

ii. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\left\langle x^2 \right\rangle$ mit:

$$\left\langle x^2 \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,|\phi(x)|^2\ \mathrm{d}x \tag{10}$$

iii. Geben Sie die Varianz $(\Delta x)^2$ an.

(d) Manchmal ergibt es Sinn sich statt der Ortsabhängigkeit der Wellenfunktion $\phi(x)$ die Impulsabhängigkeit $\phi(p)$ anzuschauen. Die Umrechnung erfolgt vermöge:

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\,\phi(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

i. Bestimmen Sie $\phi(p)$.

ii. Bestimmen Sie die Varianz des Impulses, wobei gilt

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} p\,|\phi(p)|^2\ \mathrm{d}p \tag{12}$$

und $(\Delta p)^2 = \left\langle p^2 \right\rangle - \langle p \rangle^2$.

iii. Was passiert mit Δp wenn Sie das Gaußpaket sehr genau bestimmt haben, d.h. Δx klein ist?
Berechnen Sie $\Delta x\,\Delta p$.