INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Technische Universität Braunschweig

Prof. Dr. U. Motschmann
Dr. S. Töpfer

4. Übungsblatt Abgabe: 24.11.2022 bis 9:45 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

8. **Die kanonische Verteilung** **(3 Punkte)**

   Die Zustandssumme der kanonischen Verteilung ist gegeben durch

   $$\mathcal{Z} = \sum_n \exp\left(-\beta U_n\right) \quad .$$

   Zeigen Sie, dass für das mittlere Schwankungsquadrat $(\Delta U)^2 = \langle U^2 \rangle - \langle U \rangle^2$ die Beziehung

   $$(\Delta U)^2 = -\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial \beta}$$

   gilt. Es gilt $\beta = 1/\tau$.

9. **Harmonischer Oszillator** **(8 Punkte)**

   Wir betrachten ein System, das aus N quantenmechanischen harmonischen Oszillatoren mit gleicher Frequenz ω besteht.

   (a) Bestimmen Sie die Zustandssumme $\mathcal{Z}_1$ für *einen* Oszillator dieses Systems.

   (b) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme für N *unterscheidbare* nicht wechselwirkende Teilchen $\mathcal{Z}_N$ und die Einteilchenzustandssumme $\mathcal{Z}_1$ über

   $$\mathcal{Z}_N = \mathcal{Z}_1^N$$

   zusammenhängen.

   Hinweis: Ein Energieeigenwert $U_l = U_{l_1,\ldots,l_N}$ des N-Oszillator-Systems ist

   $$U_l = \hbar\omega(l_1 + 1/2) + \hbar\omega(l_2 + 1/2) + \ldots + \hbar\omega(l_N + 1/2) \quad .$$

   Der Index l ist als Mengenindex zu verstehen und umfasst die Indizes $l_1\ , l_2\ ,\ \ldots\ , l_N$.

   (c) Zeigen Sie, dass die innere Energie U durch

   $$U = N\hbar\omega \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\beta\hbar\omega) - 1}\right]$$

   gegeben ist. Untersuchen Sie das Verhalten von U in den Grenzfällen $\beta \to 0$ und $\beta \to \infty$.

10. **Klassisches Teilchen im Kasten** **(4 Punkte)**

    Wir betrachten ein System aus einem klassischen Teilchen in einem dreidimensionalen Kasten mit der Kantenlänge L. Dieses Teilchen bewege sich frei im Kasten, d.h. es ist kein Potential im Kasten vorhanden.

    (a) Berechnen Sie hierfür das klassische Zustandsintegral.

    (b) Berechnen Sie weiterhin die mittlere Energie dieses Systems und interpretieren Sie das Ergebnis.

Bitte wenden ⟶

11. **Harmonischer Oszillator II** **(5 Punkte)**

In Aufagbe 9 wurde ein System aus N unterscheidbaren *quantenmechanischen* Oszillatoren untersucht. Nun wird ein System aus N unterscheidbaren *klassischen* harmonischen Oszillatoren gleicher Frequenz ω betrachtet. Für die Hamilton-Funktion gilt:

$$H(p_1, \ldots, p_N, q_1, \ldots, q_N) = \sum_{\nu=1}^{N} \left(\frac{p_\nu^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_\nu^2 \right) \quad .$$

(a) Berechnen Sie das klassische Zustandsintegral

$$\mathcal{Z}_{\text{klass}} = \frac{1}{C} \int \exp\left(-\beta H\right) \, \mathrm{d}^N p \, \mathrm{d}^N q$$

sowie die Innere Energie U des Systems.

(b) Zeigen Sie explizit: Wenn die quantenmechanische Zustandssumme im Grenzfall hoher Temperaturen mit dem entsprechenden klassischen Zustandsintegral übereinstimmen soll, muss für die Normierungskonstante gelten: $C = h^N$. h ist das Planck-Wirkungsquantum.