Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 17.11.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

9. **Taylorreihen (8 Punkte)**

Betrachten Sie die nachfolgenden Funktionen

$$f_1(x) = x\sin(x), \qquad f_2(x) = \frac{5-2x}{x^2+x-2}. \tag{1}$$

(a) Entwickeln Sie f_1 in eine Taylorreihe um $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Geben Sie den Konvergenzradius an.
Hinweis: Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x\sin(x)) = x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\sin(x) - n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\cos(x) \tag{2}$$

gilt.

(b) Stellen Sie mithilfe eines Computers einen Vergleich zwischen $f_1(x)$ und der Taylorreihe fünfter Ordnung dar.
Wie groß darf $|x-x_0|$ für eine relative Abweichung der Taylorreihe $\left|\frac{f_1(x)-T_5(x)}{f_1(x)}\right|$ von maximal $10\,\%$ werden?

(c) Entwickeln Sie f_2 in eine Taylorreihe um $x_0 = 0$. Geben Sie den Konvergenzradius an.
Hinweis: Finden Sie die Partialbruchzerlegung von f_2, das heißt bestimmen Sie A, B, x_1, x_2 so, dass

$$f_2(x) = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}. \tag{3}$$

Benützen Sie anschließend die Ihnen bereits bekannte geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \text{für } |x|<1. \tag{4}$$

10. **Die Riemann-Summe (6 Punkte + 3 Bonuspunkte)**

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = (x-2)^3 - x^2 + 10. \tag{5}$$

(a) Zeichnen Sie die Funktion auf der positiven Halbachse.

(b) Approximieren Sie das Integral

$$I = \int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

mithilfe einer Riemann-Summe, indem Sie das Intervall $[0,4]$ in vier gleich große Abschnitte zerlegen.

(c) Schreiben Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl ein Programm, welches die Riemann-Summe I_{Riemann} mit einer frei wählbaren Anzahl von gleich großen Intervallen berechnen kann. Wie klein müssen die Intervalle gewählt werden damit

$$|I - I_{\text{Riemann}}| < 10^{-2}? \tag{7}$$

(d) **Bonus**: Berechnen Sie (6) von Hand.

Bitte wenden! →

11. **Optimierung der Riemann-Summe: Trapez- & Simpson-Verfahren (16 Punkte)**

Zwei genauere Methoden zur approximativen Berechnung von Integralen sind die Trapez- und die Simpson-Regel.

Beim Trapez-Verfahren verwendet man (zur besseren Anpassung an die zu integrierende Funktion) die Steigung an den Zerlegungspunkten, d.h. man approximiert den Integranden als lineare Funktion. Entsprechend summiert man anstelle der Riemann-Rechtecke über Trapeze.

Bei der Simpson-Regel entwickelt man den Integranden bis zweiten Ordnung. Auf diesem Weg erhält man eine quadratische Näherung der Funktion in ihrem jeweiligen Teilintervall.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_0^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{n=0}^{N-1} \int_{n\Delta x}^{(n+1)\Delta x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k} (x - n\Delta x)^k \right) \mathrm{d}x \tag{8}$$

gilt, wobei $N\Delta x = b$.

(b) Zeigen Sie, dass aus (8) die Riemann-Summe folgt, wenn Sie die Taylorentwicklung des Integranden bereits nach der **nullten** Näherung abbrechen.

(c) Zeigen Sie :
Brechen Sie die Taylorentwicklung nach der **ersten** Ordnung ab, so folgt aus (8) die Trapezregel:

$$I \approx \frac{\Delta x}{2} \left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right]. \tag{9}$$

(d) Zeigen Sie, dass die Simpson-Regel

$$I \approx \frac{\Delta x}{3} \left[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots + 4f(x_{n-1}) + f(x_n) \right] \tag{10}$$

aus dem Abbruch der Reihe aus (8) nach der **zweiten** Ordnung folgt.

Hinweis: Bei der Riemann-Summe benötigen Sie durch die Näherung nullter Ordnung lediglich den Startpunkt x_1 zur Berechnung eines Teilintegrals.

Bei der Trapezregel ist aufgrund der linearen Näherung der nächste Punkt (also x_i und x_{i+1}) nötig, um die Teilfläche zu berechnen.

Entsprechend benötigen Sie bei der Simpson-Regel wegen der quadratischen Näherung den übernächsten Punkt, also x_i, x_{i+1} und x_{i+2}. Das Integrationsintervall beträgt also bei der Simpson-Regel $2\Delta x$.

(e) Approximieren Sie das Integral aus (6) mit der Trapez- und mit der Simpson-Regel. Vergleichen Sie die Genauigkeit (auch mit der Methode der Riemann-Summen).

(f) Schreiben Sie in einer Programmiersprache Ihrer Wahl ein Programm, welches das Integral (6) mithilfe der Simpson-Regel mit einer frei wählbaren Anzahl von gleich großen Intervallen approximieren kann.
Vergleichen Sie die Anzahl der Stützstellen, die Sie benötigen, damit

$$|I - I_{\text{Riemann}}| < 10^{-4}, \tag{11}$$

bzw.

$$\left|I - I_{\text{Simpson}}\right| < 10^{-4}. \tag{12}$$