Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke

Abgabe: Do., 10.11.2022 bis 11:30 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/joFKnf`.

Bitte beachten Sie das Persönlichkeitsrecht des Dozenten und fertigen Sie keine Videos/Streams oder Fotografien von der Vorlesung an

5. **Der Körper der komplexen Zahlen (10 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 b_1 - a_2 b_2 \\ a_1 b_2 + a_2 b_1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_1^2 + a_2^2} \begin{bmatrix} a_1 \\ -a_2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

einen Körper bildet.

(b) Man definiert nun die komplexe Einheit i mit der Eigenschaft $\mathrm{i}^2 = -1$. Zeigen Sie dass man mit der Zuordnung

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \mapsto a_1 + i a_2 \tag{4}$$

die gleichen Rechenregeln bekommt und damit auch wieder einen Körper erhält.

(c) Die komplexe Konjugation einer komplexen Zahl $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\bar{z} = x - \mathrm{i}y. \tag{5}$$

Der Betrag einer Komplexen Zahl ist definiert als $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Zeigen Sie für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 \qquad \overline{z_1^n} = \bar{z}_1^n \tag{6}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2| \qquad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \qquad |z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|\,. \tag{7}$$

(d) Geben Sie die Zahlen

$$\frac{\mathrm{i} - 1}{\mathrm{i} + 1} \qquad \frac{3 + 4\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} \qquad \frac{(1+\mathrm{i})^4}{(1-\mathrm{i})^3} + \frac{(1-\mathrm{i})^4}{(1+\mathrm{i})^4} \qquad \frac{1 + \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}a}\,,\ a \in \mathbb{R} \tag{8}$$

in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an und bestimmen Sie deren Betrag.

6. **Differenzieren und Regel von L'Hospital (9 Punkte)**

i. $\frac{\sin x}{\ln(x+1)}$

ii. $\frac{\exp(x^2) - \exp x}{x-1}$

iii. $\frac{x \exp x - \exp(2x-1)}{x(x-1)^2}$

iv. $x \sin x$

v. $\ln(1 + x^2)$

vi. $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

(a) Bestimmen Sie für die gegebenen Funktionen die erste Ableitung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$

(b) Bestimmen Sie zusätzlich für die Aufgabenteile i.-iii. den Grenzwert $\lim_{x \to 0} f(x)$.

(c) Bestimmen Sie zusätzlich für den Aufgabenteil vi. die zweite Ableitung $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 x} f(x)$, $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 y} f(y)$ und $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2 z} f(z)$. Nehmen Sie dazu an, dass die zwei anderen Variablen des Tripels (x, y, z) konstant sind.

Bitte wenden! →

7. **Folgen, Reihen, Konvergenz und Vollständigkeit (6 Punkte)**

   (a) Zeigen Sie, dass die durch

   $$S_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \tag{9}$$

   definierte Folge das Cauchy-Kriterium erfüllt und folglich konvergiert.

   (b) Betrachten Sie für $x_0 > 0, a \in \mathbb{R}$ und $a > 0$ die Folge

   $$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \tag{10}$$

   i. Bestimmen Sie den Fixpunkt $\tilde{x}$, für den $x_{n+1} = x_n$ ist.

   ii. Das Monotonieprinzip besagt, dass eine monotone, beschränkte Folge auf einem vollständigen Körper konvergiert. Benützen Sie dieses Prinzip um die Konvergenz der Folge zu zeigen.
   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für beliebiges $x_0 > 0$ folgt, dass $x_n > \sqrt{a}$ ist.

8. **Rekursive Folgen (5 Punkte)**

   Betrachten Sie die Folgen

   i.
   $$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad P_0 = 0, \quad P_1 = 1. \tag{11}$$

   ii.
   $$Q_n = \frac{P_{n-1} + P_n}{P_n}. \tag{12}$$

   iii.
   $$R_n = \begin{cases} R_{n-1} - n & \text{falls } R_{n-1} - n > 0 \text{ und noch kein Folgenglied war} \\ R_{n-1} + n & \text{sonst} \end{cases}, \qquad R_0 = 0. \tag{13}$$

   iv.
   $$J_{n+1} = \begin{cases} \lfloor \sqrt{J_n} \rfloor & \text{falls } J_n \text{ gerade} \\ \lfloor \sqrt{J_n^3} \rfloor & \text{falls } J_n \text{ ungerade} \end{cases}, \qquad J_0 = 25. \tag{14}$$

   Dabei ist $\lfloor \bullet \rfloor$ die Abrundungsfunktion.

   (a) Bestimmen Sie mithilfe einer Programmiersprache Ihrer Wahl je die ersten 100 Folgenglieder und stellen Sie diese graphisch dar.
   Hinweis: Tabellenkalkulationsprogramme oder Taschenrechner sind nicht zulässig.
   Geben Sie Ihren Code und Ihre Visualisierungen mit ab.

   (b) Haben Sie eine Vermutung für $\lim_{n\to\infty} Q_n$? Falls ja, welche?