



2. Übungsblatt

Abgabe: 10.11.2022 bis 9.45 Uhr per Mail an die HiWis

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

3. Kettenregel und partielle Ableitungen
(6 Punkte)

Gegeben sei eine stetig differenzierbare Funktion $f(x, y, z)$ mit der Eigenschaft, dass in einem geeigneten Gebiet die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ nach einer jeden der drei Variablen x , y oder z eindeutig als stetig differenzierbare Funktion der beiden anderen Variablen aufgelöst werden kann. Dann gilt:

- (a) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z = 1$;
- (b) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$;
- (c) $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x = -\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$.

Verifizieren Sie diese Beziehungen zunächst anhand eines konkreten Beispiels:

$$f(x, y, z) = 2x + 3y + z = 0$$

Zeigen Sie deren Gültigkeit anschließend allgemein. Das "Kürzen" von Differentialen nach den Gesetzen der Bruchrechnung ist dabei strengstens verboten!

4. Boltzmann-Verteilung
(6 Punkte)

Ein Kristall mit N Gitterplätzen hat n_A Fehlstellen mit der Aktivierungsenergie ϵ_A und n_B Fehlstellen mit ϵ_B .

- (a) Bestimmen Sie den Entartungsfaktor $g(N, n_A, n_B)$ für die Anordnung der Fehlstellen.
- (b) Bestimmen Sie das Maximum der Entropie σ bezüglich der Variablen n_A und n_B unter der Nebenbedingung, dass die Gesamtenergie U konstant ist. Wie ist das Verhältnis von n_A zu n_B in Abhängigkeit von der Temperatur τ ? Führen Sie dazu die Temperatur in Analogie zur Vorlesung ein. Betrachten Sie die Fehlstellen A als ein Subsystem und die Fehlstellen B als das andere Subsystem, die beide in thermischem Kontakt stehen. Stellen Sie dieses Verhältnis als Funktion von $\tau, \epsilon_A, \epsilon_B$ dar.
- (c) Berechnen Sie die Fehlstellendichten n_A/N und n_B/N unter der Annahme $1 \ll n_A, n_B \ll N$.

Hinweis: Verwenden Sie für die Fakultät die Näherung aus der Übung. Den Kristall kann man sich als Kette, zwei- oder dreidimensionales Gitter vorstellen, das mit Atomen A und B besetzt ist. Die Fehlstellen können nun so interpretiert werden, dass sich an einigen Stellen ein Atom A aus dem Kristall gelöst hat oder substituiert wurde, an anderen ein Atom B . Die dazu notwendigen Energien sind dann ϵ_A und ϵ_B .

Bitte wenden \rightarrow

5. Paramagnetismus

(8 Punkte)

Betrachten Sie die Spinkette aus N Spins mit magnetischem Moment μ bei der Temperatur τ . Zeigen Sie, dass nach Anlegen eines äußeren Magnetfelds B die Spinkette ein magnetisches Gesamtmoment

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{\tau}\right)$$

besitzt. Gehen Sie dabei von der aus der Vorlesung bekannten Entartungsfunktion

$$g(N, m) = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2} + m\right)! \left(\frac{N}{2} - m\right)!}$$

aus. Skizzieren Sie den Verlauf von $M(\tau)$. Als Zwischenergebnis sollten Sie auch $\tau^{-1}(U)$ erhalten. Skizzieren Sie auch den Verlauf hiervon. Welche Besonderheit besitzt der Wertebereich dieser Temperatur?

Hinweise: Benutzen Sie für die Fakultät die Näherungsformel aus der Übung und ersetzen Sie m und M durch die Energie U .