Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Mo., 25.07.2022 bis 12:00 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/h0Z6Hb`.
Aufgaben mit Δ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

52. Wissensfragen (3 Punkte)

(a) Leiten Sie die Randbedingungen für das elektrische Feld $\vec{E}$ und das magnetische Feld $\vec{B}$ an einer Grenzfläche zwischen zwei Medien mit Permittivitäten ϵ_1, ϵ_2 und Permeabilitäten μ_1, μ_2 ohne Oberflächenladung σ und ohne Oberflächenströme $\vec{j}$ her.
Gehen Sie dabei von den Maxwell-Gleichungen aus.

53. Vergütungsschicht (10 Punkte)

Eine dielektrische Schicht mit der Dielektrizitätskonstanten ϵ_2 ist durch die Ebenen $x_3 = 0$ und $x_3 = d$ begrenzt und befindet sich zwischen zwei Medien mit ϵ_1 für $x_3 < 0$ und ϵ_3 für $x_3 > d$. Alle drei Medien seien ungeladen und nicht-magnetisch. Eine ebene, elektromagnetische Welle falle vom Gebiet $x_3 < 0$ kommend senkrecht auf die Schicht ein.

(a) Welche Randbedingungen müssen die Felder bei $x_3 = 0$ bzw. $x_3 = d$ erfüllen?

(b) Berechnen Sie die Amplituden der Felder für die reflektierte A^R_{ges} und die transmittierte Welle A^T_{ges} für diese Anordnung. Dabei müssen Mehrfachreflexionen berücksichtigt werden.
Führen Sie die folgenden Abkürzungen für die Verhältnisse der Amplituden bei der *einfachen* Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche ein:

- r_{12}: Licht fällt aus dem Medium 1 auf das Medium 2 ein und wird reflektiert;
- r_{21}: Licht fällt aus dem Medium 2 auf das Medium 1 ein und wird reflektiert.

Die Koeffizienten r_{23}, t_{12} und t_{21} seien analog definiert. Zeigen Sie

$$A^R_{\text{ges}} = \left(r_{12} + \frac{t_{21}\, r_{23}\, t_{12}\, e^{\mathrm{i}2k_2 d}}{1 - r_{23}\, r_{21}\, e^{\mathrm{i}2k_2 d}} \right) A_0 \,, \tag{1}$$

wobei k_2 der Wellenvektor im Medium 2 und A_0 die Amplitude der einfallenden Welle ist.

(c) Zeigen Sie, dass für einen senkrechten Einfall ebener Wellen auf eine ebene Grenzfläche folgende Beziehung gilt:

$$r_{ij} = \frac{k_i - k_j}{k_i + k_j} \quad \text{und} \quad t_{ij} = \frac{2k_i}{k_i + k_j} \tag{2}$$

(d) Sei $\epsilon_1 = 1$ (Luft) und $\epsilon_3 = n^2$ (Glas). Zeigen Sie, dass für $\epsilon_2 = n$ die Reflexion verschwindet (Vergütung). Wie muss man d wählen?
Zeigen Sie zunächst:

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{\epsilon_i} - \sqrt{\epsilon_j}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}} \quad \text{und} \quad t_{ij} = \frac{2\sqrt{\epsilon_i}}{\sqrt{\epsilon_i} + \sqrt{\epsilon_j}}. \tag{3}$$

Drücken Sie alle auftretenden Koeffizienten durch n aus und setzen Sie diese in Gleichung (1) ein.

(e) Berechnen Sie mit einem typischen Brechungsindex $n = 1.6$ und der Wellenlänge von sichtbarem Licht in Luft $\lambda = 0.5\ \mu\text{m}$ die benötigte Dicke d der Vergütungsschicht.

Bitte wenden! →

Δ 54. **Brechung und Reflexion an einer ebenen Grenzfläche (7 Punkte)**

Eine ebene, elektromagnetische Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{\mathrm{i}(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \quad \vec{H} = \frac{c}{\omega}\,\vec{k}\times\vec{E} \tag{4}$$

treffe bei $x_3 = 0$ auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei homogenen und isotropen Dielektrika mit Dielektrizitätskonstanten $\epsilon_1 \neq \epsilon_2 \neq 1$ und den Permeabilitäten $\mu_1 = \mu_2 = 1$.

Der Normalenvektor der Grenzfläche sei $\vec{E}_3$. Die einfallende Welle komme aus dem Medium 1. Verwenden Sie für die reflektierte und die transmittierte Welle den Ansatz

$$\vec{E}^{\mathrm{R,T}} = \vec{E}_0^{\mathrm{R,T}}\, e^{\mathrm{i}(\vec{k}^{\mathrm{R,T}}\cdot\vec{r}-\omega^{\mathrm{R,T}}t)}\,. \tag{5}$$

(a) Folgern Sie aus den Maxwell-Gleichungen, dass es zwei unabhängige Sätze von Lösungen gibt:
- $\{E_2, H_1, H_3\}$ (transversal-elektrische (TE) Welle mit ($\vec{E} \perp \vec{k}, \vec{E}_3$)
- $\{H_2, E_1, E_3\}$ (transversal-magnetische (TM) Welle mit ($\vec{H} \perp \vec{k}, \vec{E}_3$)

(b) Verwenden Sie die Randbedingungen für die Felder bei $x_3 = 0$, um Bestimmungsgleichungen für die Amplituden $\vec{E}_0^{\mathrm{R}}$ und $\vec{E}_0^{\mathrm{T}}$ der reflektierten und der transmittierten Welle aufzustellen. Ermitteln Sie für die TM-Welle die Verhältnisse $t = ||\vec{E}_0^{\mathrm{T}}||/||\vec{E}_0||$ und $r = ||\vec{E}_0^{\mathrm{R}}||/||\vec{E}_0||$ und drücken Sie diese als Funktion von α (Einfallswinkel) und von ϵ_1 bzw. ϵ_2 aus.

(c) Plotten Sie $R = r^2$ und $T = 1 - R$ als Funktion des Einfallswinkels α für $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 5$ und $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 1.2$. Diskutieren Sie den Verlauf.

55. **Frequenz-Abhängigkeit der dielektrischen Funtkion (10 Punkte)**

Betrachten Sie ein einfaches Modell zur Wechselwirkung des elektrischen Feldes $\vec{E}$ mit Materie: Nehmen Sie an, dass die Elektronen jedes Atoms im Medium unabhängigen, durch das elektrische Feld getriebenen, gedämpften harmonischen Oszillatoren entsprechen.

Die Auslenkung $\vec{r}$ eines Elektrons wird dann durch die Differentialgleichung

$$m_{\mathrm{e}}\,\partial_t^2\vec{r} + \gamma\,\partial_t\vec{r} + m_{\mathrm{e}}\,\omega_0^2\,\vec{r} = e\,\vec{E} \tag{6}$$

beschrieben, wobei m_{e} die Masse eines Elektrons, γ ein Dämpfungsfaktor, ω_0 die Eigenfrequenz des Elektrons und e dessen elektrische Ladung ist.

(a) Bestimmen Sie mit $\vec{E} = \vec{E}_0\, e^{\mathrm{i}\omega t}$ die Lösung der Differentialgleichung.

(b) Nutzen Sie diese Lösung zusammen mit dem Dipolmoment $\vec{p} = e\,\vec{r}$ eines Elektrons, um die dielektrische Funktion $\epsilon = \epsilon(\omega)$ des Mediums zu erhalten. Nehmen Sie dabei an, die Dichte der Elektronen betrage N/V.

(c) Diskutieren Sie den Einfluss von γ auf die Form von $\epsilon(\omega)$.