Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

9 . Übungsblatt | Elektrodynamik | SS 2022

Abgabe: Mo., 04.07.2022 bis 12:00 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/hOZ6Hb`.
Aufgaben mit △ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

37. **Wissensfragen (2 Punkte)**

 (a) Beschreiben Sie die Methode der Bildladung. Wann kann diese angewendet werden?

△ 38. **Dirichlet'sche Randbedingung (8 Punkte)**

Betrachten Sie ein Potentialproblem im Halbraum $z \geq 0$ mit Dirichlet'schen Randbedingungen in der xy-Ebene (sowie im Unendlichen).

 (a) Schreiben Sie die entsprechende Green'sche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$ auf.

 (b) Der Wert des Potentials $\varphi(\vec{r})$ sei in der xy-Ebene vorgegeben: $\varphi = V$ innerhalb eines Kreises mit Radius a um den Ursprung, sowie $\varphi = 0$ außerhalb dieses Kreises.
 Zeigen Sie, dass $\varphi(\vec{r})$ an einem Punkt $\vec{r}$ im Halbraum $z \geq 0$ in Zylinderkoordinaten (ρ, ϕ, z) durch den Integralausdruck

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{V}{4\pi} \int_0^a \mathrm{d}\rho' \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi' \, \frac{2z}{\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2 - 2\rho\rho' \cos(\phi - \phi') + z^2}^3} \tag{1}$$

 gegeben ist.

 (c) Zeigen Sie, dass $\varphi(\vec{r})$ auf der z-Achse ($\rho = 0$) gegeben ist durch

$$\varphi = V\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right). \tag{2}$$

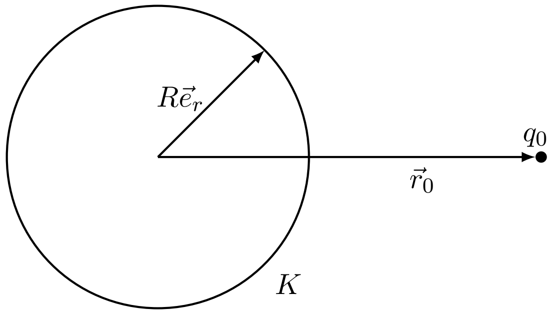
 (d) Zeigen Sie, dass sich das Potential in großen Abständen ($\rho^2 + z^2 \equiv r^2 \gg a^2$) in eine Potenzreihe bezüglich r^{-1} entwickeln lässt, mit den führenden Termen

$$\varphi = \frac{Va^2}{2} \frac{z}{r^3} \left[1 - \frac{3a^2}{4r^2} + \frac{5\,(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8\,r^4} + \ldots\right]. \tag{3}$$

 Zeigen Sie, dass die Ergebnisse von Teil (c) und (d) im gemeinsamen Gültigkeitsbereich konsistent sind.

39. **Influenzierte Ladung - Bildladung (14 Punkte)**

Gegeben sei eine geerdete, metallische Kugel K mit Radius R um den Ursprung herum.
Bringt man eine Punktladung q_0 an den Ort $\vec{r}_0$ (siehe Skizze) außerhalb der Kugel, so entsteht auf der Kugeloberfläche eine Influenzladung.



(a) Bestimmen Sie das Potential $\varphi(\vec{r})$ im Außenraum der Kugel mit Hilfe der Methode der Bildladung unter der Randbedingung $\varphi(\vec{r})|_{\vec{r}\in\partial K} = 0$.

(b) Beantworten Sie die folgenden Fragen und geben Sie jeweils eine kurze Begründung an:

i. Wie groß ist das elektrische Feld im Innenraum der Kugel?

ii. Unter welchem Winkel trifft das elektrische Feld auf die Kugeloberfläche?

iii. Auf welchen Linien auf der Kugeloberfläche gilt $\sigma(\vec{r}) = \text{const.}$?

(c) Berechnen Sie die Influenzladung $\sigma(\vec{r})$, indem Sie den Gaußschen Satz an der Oberfläche der Kugel ausnutzen.

(d) Bestimmen Sie die influenzierte Gesamtladung durch Integration über die Kugeloberfläche und vergleichen Sie mit der Stärke der Bildladung.

(e) Berechnen Sie die von der influenzierten Ladung ausgeübte Kraft auf die Punktladung q_0 als Funktion des Abstands $r_0 = |\vec{r}_0|$, indem Sie die Beiträge von Flächenelementen $\mathrm{d}A$ auf der Kugeloberfläche aufintegrieren. Diskutieren Sie den Grenzfall $r_0 \gg R$.

△ (f) Nehmen Sie nun an, die Kugel sei nicht mehr geerdet, sondern auf konstantem Potential $\varphi_0 > 0$ gehalten.
Wie müssen jetzt Bildladungen gewählt werden, um dieses Randwertproblem zu lösen?

Hinweis: Nutzen Sie bei der Berechnung der Integrale Kugelkoordinaten und die Symmetrie des Problems. Geeignete Substitutionen und eine Partialbruchzerlegung (in Teil (e)) können die Berechnung vereinfachen.

40. **Mehrere Bildladungen (6 Punkte)**

Bestimmen Sie das Potential φ im Bereich $\{\vec{r} \mid x_1, x_2 > 0; \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > R\}$ für die in der Skizze dargestellte Geometrie:
Eine Punktladung q befindet sich bei $(a, a, 0)$. Die Metallplatten entlang der Koordinatenachsen x_1 und x_2 sowie die Kugel um den Ursprung mit Radius R seien metallisch und geerdet.
Zeigen Sie insbesondere auch, dass $\varphi = 0$ für $x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$ und auf der Oberfläche der Kugel erfüllt ist.