Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

8 . Übungsblatt Elektrodynamik SS 2022

Abgabe: Mo., 27.06.2022 bis 12:00 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/hOZ6Hb`.
Aufgaben mit △ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

33. **Wissensfragen (3 Punkte)**

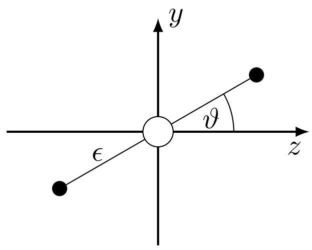
(a) Was ist die Wellenzone einer Multipolentwicklung?

(b) Geben Sie die Regel der partiellen Integration für ein bestimmtes Integral an.

(c) Geben Sie die Einheit des magnetischen Moments im Gauß'schen Einheitensystem an.

34. **Drehmoment auf einen Quadrupol (12 Punkte)**

Betrachten Sie den reinen Quadrupol aus der Vorlesung in einem axialsymmetrischen elektrischen Feld entlang der z-Achse.
Der Quadrupol sei von der z-Achse weg um einen Winkel ϑ um die x-Achse gedreht (siehe Skizze, nehmen Sie $\epsilon \to 0$ an).



(a) Zeigen Sie, dass die Ladungsverteilung durch

$$\rho(\vec{r}) = \frac{Q}{2}\left(\cos\vartheta\,\frac{\partial}{\partial z} + \sin\vartheta\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 \delta(\vec{r}) \qquad (1)$$

gegeben ist.

(b) Entwickeln Sie das Potential des äußeren Feldes in eine Potenzreihe um $\vec{r} = 0$ bis zur 2. Ordnung. Nutzen Sie die Symmetrie des Problems, um den Ausdruck zu vereinfachen. Zeigen Sie, dass

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 + \varphi_z\, z + \frac{1}{2}\,\varphi_{zz}\left(z^2 - \frac{x^2+y^2}{2}\right) + \ldots \qquad (2)$$

$$\text{mit} \quad \varphi_z := \partial_z\varphi|_{\vec{r}=0}\,, \quad \varphi_{zz} := \partial_z^2\varphi\big|_{\vec{r}=0}$$

gilt. Benutzen Sie hierfür die Poisson-Gleichung und nehmen Sie an, dass das Potential nicht durch Ladungen im Ursprung erzeugt wird.

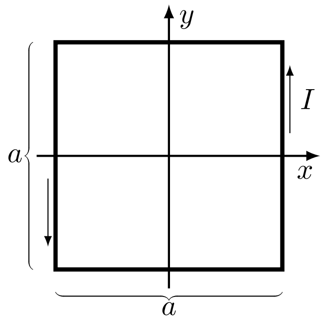
(c) Zeigen Sie unter Benutzung der Ergebnisse aus den Teilen (a) und (b), dass für das Drehmoment gilt:

$$\vec{D} = \left(-\frac{3}{4}\,Q\,\varphi_{zz}\,\sin(2\vartheta), 0, 0\right)^T. \qquad (3)$$

Hinweis: Hierfür müssen Sie zweimal partiell integrieren.

35. **Magnetisches Moment eines Leiterdrahtes (5 Punkte)**

Ein infinitesimal dünner Leiterdraht ist als Quadrat mit Kantenlänge a geformt und liegt in der xy-Ebene (siehe Abbildung).
Durch den Draht fließe der konstante Strom I. Berechnen Sie das zugehörige magnetische Moment $\vec{m}$.
Welchen Beitrag liefert das magnetische Moment $\vec{m}$ im Allgemeinen und in diesem Beispiel zur magnetischen Induktion $\vec{B}$?



△ 36. **Elektromagnetisches Feld einer Richtantenne (10 Punkte)**

Betrachten Sie die folgende Anordnung zweier Dipole $\vec{p}_{1(2)} = p_{1(2)}\vec{n}_y$, die mit gleicher Kreisfrequenz $\omega = kc$ schwingen, eine Phasenverschiebung α gegeneinander haben (d.h. $p_2 = e^{i\alpha} p_1$) und im Abstand d auf der x-Achse angebracht sind (siehe Abbildung unten). Diese Anordnung beschreibt eine einfache Richtantenne.

(a) Berechnen Sie zur Zeit $t = 0$ das $\vec{B}$- und $\vec{E}$-Feld und den Poyntingvektor am Ort $\vec{r} = (x, y, 0)$ als Funktion von x und y.

(b) Nehmen Sie nun an, dass $kd = \pi$ ist. Geben Sie damit ein „optimales" α an, so dass $\vec{B}$- und $\vec{E}$-Feld und der Poyntingvektor längs der x-Achse am größten und längs der y-Achse am kleinsten werden.

Hinweis: Sie dürfen natürlich rechnen, einfacher ist es aber, sich z. B. die Interferenz der $\vec{B}$-Felder der beiden Dipole längs der x/y-Achse zu vergegenwärtigen. Beschreiben Sie damit Ihre Wahl von α in Worten.

(c) Wie kann man diese Richtantenne durch Hinzunahme weiterer Dipole verbessern?

(d) Darstellung der Antennencharakteristik: Erstellen Sie mit einem Grafikprogramm Ihrer Wahl einen Konturplot von entweder $||\vec{B}||^2$ oder $||\vec{E} \times \vec{B}^*||$ in der xy-Ebene.