Prof. Dr. U. Motschmann
S. Töpfer, M. Sc.

6. Übungsblatt

Abgabe: keine Abgabe, Besprechung: 23. Juni 2022

Fragen zu den Aufgaben: Simon Töpfer, Raum 3.317, Tel.: 391-5187, s.toepfer@tu-bs.de

11. Anisotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung

Bei der Vermessung der kosmischen Hintergrundstrahlung ergeben sich je noch betrachtetem Blickwinkel (θ, φ) Schwankungen $\delta T(\theta, \varphi)$ in der Temperaturverteilung. Diese Anisotropien zeichnen sich durch groß- und kleinskalige Strukturen aus. Um die Strukturen voneinander zu separieren und die Anisotropien zu charakterisieren, ist es naheliegend die Temperaturschwankungen in eine Multipolreihe

$$\delta T(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

zu entwickeln. Dabei bezeichnet Y_{lm} die vollständig normierten, komplexen Kugelflächenfunktionen und a_{lm} sind die zugehörigen, komplexen Entwicklungskoeffizienten.

(a) Zeigen Sie, dass das Leistungsspektrum

$$P := \int |\langle \delta T(\theta, \varphi) \rangle|^2 \, \mathrm{d}\Omega,$$

mit $\mathrm{d}\Omega = \sin\theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$ in der Form

$$P = \sum_{l=0}^{\infty} C_l$$

dargestellt werden kann.

(b) Bei der Analyse der Anisotropie ist die Korrellation

$$C(\underline{n}_1, \underline{n}_2) = \langle \delta T(\underline{n}_1) \, \delta T(\underline{n}_2) \rangle$$

der in zwei verschiedenen Raumrichtungen $\underline{n}_1$ und $\underline{n}_2$ gemessenen Temperaturschwankungen von großer Bedeutung. Welche Konsequenzen ergeben sich für die funktionale Abhängigkeit der Korrellation C sowie den Mittelwert und die Standardabweichung der Entwicklungskoeffizienten a_{lm}, wenn folgende Annahmen für die Temperaturverteilung getroffen werden:

- Gaußverteilung: $\langle \delta T \rangle = 0$
- statistische Homogenität: $C(\underline{n}_1, \underline{n}_2) = C(\underline{n}_1 - \underline{n}_2)$
- statistische Isotropie: $C(\underline{n}_1, \underline{n}_2) = C(|\underline{n}_1 - \underline{n}_2|)$

(c) Berechnen Sie explizit die Korrellationsfunktion $C(\underline{n}_1, \underline{n}_2)$.