

Versuch 27: Messungen zum Wiedemann-Franz'schen Gesetz

In diesem Versuch soll die Temperaturverteilung an Metallstäben in ihrer zeitlichen Entwicklung untersucht werden. Auf diese Weise kann die zeitliche und räumliche Abhängigkeit des Wärmetransports studiert werden. Weiterhin wird die Methode von van der Pauw zur Messung der elektrischen Leitfähigkeit von dünnen Filmen vorgestellt. Über den Vergleich der Messergebnisse aus beiden Versuchsteilen soll das Wiedemann-Franz'sche Gesetz überprüft werden.

Vorkenntnisse

Wärme und Temperatur – Mechanismen des Wärmetransports – Umwandlung von elektrischer Energie in Wärmeenergie – Thermische Leitfähigkeit von Metallen – Elektrische Leitfähigkeit von Metallen – Wiedemann-Franz'sches Gesetz – Kontinuitätsgleichung – Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes von Festkörpern – Ohmsches Gesetz – Messmethoden der elektrischen Leitfähigkeit – Freies Elektronengas – Elektronischer Beitrag zur Wärmeleitung

Physikalische Grundlagen

Das Wiedemann-Franz'sche Gesetz

Sowohl die Wärmeleitfähigkeit λ als auch die elektrische Leitfähigkeit σ werden in (reinen) Metallen beinahe ausschließlich von den freien Ladungsträgern getragen. Unter dieser Voraussetzung ist das Verhältnis beider Größen zueinander konstant und der absoluten Temperatur T proportional (Wiedemann-Franz'sches Gesetz) und es gilt

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 T, \quad (1)$$

wobei $L = \frac{\lambda}{\sigma T} = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{k_B}{e} \right)^2 = 2,45 \times 10^{-8} \frac{V^2}{K^2}$ als Lorenz-Zahl bezeichnet wird. Sie ist temperaturunabhängig. Aus dem Wiedemann-Franz'schen Gesetz geht also hervor, dass gute Wärmeleiter auch gute elektrische Leiter sind und umgekehrt schlechte Wärmeleiter auch schlechte elektrische Leiter. Für eine Herleitung des Wiedemann-Franz'schen Gesetzes wird an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen, z.B.:

Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik 6 – Festkörper, de Gruyter Verlag, 2005.

C. Kittel, Einführung in die Festkörperphysik, Oldenbourg Verlag, 1989.

R. Gross, A. Marx, Festkörperphysik, Oldenbourg Verlag, 2012.

N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing, 1976

Material	λ (W cm ⁻¹ K ⁻¹)	σ (Ω^{-1} m ⁻¹)
Cu	4,01	$5,96 \times 10^7$
Al	2,37	$3,77 \times 10^7$
Fe	0,802	$1,04 \times 10^7$
Au	3,17	$4,52 \times 10^7$
Ag	4,29	$6,30 \times 10^7$
Pb	0,353	$0,48 \times 10^7$

Table 1: Literaturwerte thermischer und elektrischer Leitfähigkeiten für ausgewählte Metalle nach dem CRC HANDBOOK OF CHEMISTRY AND PHYSICS. Die elektrischen Leitfähigkeiten wurden aus den spezifischen Widerständen bei $T = 293$ K errechnet.

...

Experimentell über das Wiedemann-Franz'sche Gesetz bestimmte Lorenz-Zahlen für Metalle stimmen immer nur bei hohen Temperaturen (größenordnungsmäßig etwa 100 K) gut mit den theoretisch nach Gl. (1) erwarteten Werten überein.

Leitfähigkeitsmessung nach van der Pauw

Die hier als skalar betrachtete elektrische Leitfähigkeit σ und der spezifische Widerstand $\rho_{\text{el}} = 1/\sigma$ sind über das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

definiert. Eine interessante Methode zur Messung des spezifischen Widerstands hat L. J. van der Pauw im Jahr 1958 angegeben¹. Im Gegensatz zu den sonst üblichen "eindimensionalen" Verfahren wird bei der Widerstandsmessung nach van der Pauw eine zweidimensionale Probe in Form einer dünnen Folie oder einer flachen Scheibe mit konstanter Dicke d und beliebig geformtem Rand benutzt (s. Abb. 1). Die Probe muss einfach zusammenhängend sein, d.h. sie darf keine Löcher aufweisen.

Auf dem Probenrand sind insgesamt vier elektrische Kontakte (A, B, C und D) möglichst geringer Ausdehnung mehr oder weniger willkürlich angeordnet, von denen zunächst A und B zur Stromspeisung und C und D zur Spannungsmessung verwendet werden. Das Verhältnis von Spannung zu Strom wird als Widerstand $R_{AB,CD}$ definiert. Einen zweiten Widerstand $R_{BC,DA}$ erhält man analog, wenn die Kontakte für Stromspeisung und Spannungsmessung zyklisch getauscht werden.

Mit den so gewonnenen Widerstandswerten ergibt sich der zu bestimmende spezifische Widerstand des untersuchten Materials nach der Gleichung

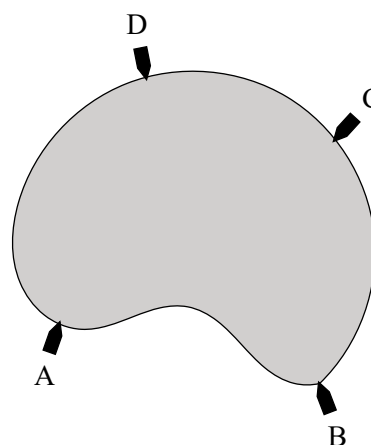


Abb. 1: Kontaktierschema für eine Widerstandsmessung nach van der Pauw.

¹L. J. van der Pauw, A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape, Philips Research Report **13**, 1 (1958).

$$\rho_{el} = \frac{\pi d}{2 \ln 2} (R_{AB,CD} + R_{BC,DA}) f \left(\frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}} \right). \quad (3)$$

Die Funktion $f \left(\frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}} \right)$ wurde von van der Pauw berechnet und ist für die Versuchsauswertung an dieses Skript angehängt.

Zur Herleitung von Gl. (3)

Van der Pauw hat in "A method of measuring specific resistivity and Hall effect of discs of arbitrary shape" eine Herleitung von Gl. (3) angegeben. Er zeigt darin die allgemeine Gültigkeit der Beziehung

$$\exp(-\pi R_{AB,CD}d/\rho_{el}) + \exp(-\pi R_{BC,DA}d/\rho_{el}) = 1 \quad (4)$$

für die oben angegebene Geometrie, indem er zunächst von einer halbumendlichen Probe mit den Kontakten P, Q, R und S auf deren Rand (in dieser Reihenfolge) ausgeht und den Spannungsabfall $V_S - V_R$ bei Einspeisung des Stromes I in P und Q berechnet. Dann zeigt er, dass Gl. (4) auch für beliebig geformte, einfach zusammenhängende Proben mit konstanter Dicke ihre Gültigkeit behält. Dies gelingt mit der Theorie der konformen Abbildungen. Fasst man die Probe als obere Hälfte der komplexen z -Ebene auf, lässt sich nach einem Theorem eine Transformation in Form einer analytischen Funktion $t(z)$ angeben, die die Halbebene mit den Kontakten P, Q, R und S auf das der tatsächlichen Probenform entsprechende Gebiet in der t -Ebene mit den Kontakten A, B, C und D konform abbildet. Eine solche Abbildung ist winkeltreu und überführt Feldlinien in Feldlinien und Äquipotentiallinien in Äquipotentiallinien, sodass die Potentialdifferenzen $V_S - V_R$ und $V_D - V_C$ invariant gegenüber konformen Abbildungen und somit gleich sind. Die obigen Gleichungen bleiben daher unverändert bestehen, wenn man die Bezeichnungen der Kontakte auswechselt. Damit ist die Gültigkeit von Gl. (4) für alle Proben mit der genannten Geometrie gezeigt.

Die Beziehung in Gl. (3) zur Bestimmung von ρ_{el} erhält man durch Umformung von Gl. (4). Hierzu wird die oben erwähnte Funktion f verwendet. Sie wirkt auf das Verhältnis $\frac{R_{AB,CD}}{R_{BC,DA}}$ der Widerstände. Sie ist definiert durch

$$\frac{R_{AB,CD} - R_{BC,DA}}{R_{AB,CD} + R_{BC,DA}} = \frac{f}{\ln 2} \operatorname{arcosh} \left\{ \frac{\exp(\ln 2/f)}{2} \right\} \quad (5)$$

Es ist nicht möglich, diese Gleichung explizit nach f aufzulösen, f ist nur durch diese sogenannte *implizite Darstellung* verfügbar.

Wärmeleitung

Die Definition der hier als skalar angenommenen Wärmeleitfähigkeit λ ergibt sich, indem man die Proportionalität der Wärmestromdichte \vec{j}_w zum vorhandenen Temperaturgradienten ausdrückt

$$\vec{j}_w = -\lambda \operatorname{grad}_{\vec{r}} T \quad (6)$$

Für die Wärmestromdichte \vec{j}_w ergibt sich andererseits aus der Kontinuitätsgleichung, dass

$$\operatorname{div}_{\vec{r}} \vec{j}_w + \frac{\partial q}{\partial t} = W \quad (7)$$

Hierbei ist W die Wärmeleistungsdichte und q die im Volumenelement enthaltene Wärme, also

$$dq = \rho c_p dT \quad (8)$$

mit der Massendichte $\rho = m/V$ und der spezifischen Wärme bei konstantem Druck c_p . Durch Einsetzen von Gl. (6) und (8) in die Kontinuitätsgleichung erhält man die Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta_{\vec{r}} T = \frac{\rho c_p}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} - \frac{W}{\lambda}. \quad (9)$$

Für den Quotienten aus der Wärmeleitfähigkeit λ und der spezifischen Wärme pro Volumen $m/V c_p$ führt man die Temperaturleitfähigkeit α ein und erhält schließlich die Wärmeleitungsgleichung in ihrer endgültigen Form

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta_{\vec{r}} T + \frac{\alpha}{\lambda} W \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{\lambda}{\rho c_p} \quad (10)$$

Man erkennt, dass sowohl eine positive Krümmung des Temperaturprofils als auch die direkte Freisetzung von Wärme zu einem Temperaturanstieg führen. Als Spezialfall betrachten wir den Fall konstanter Wärmezufuhr ($W(t) = \text{const}$). Hier stellt sich nach hinreichend langer Zeit ein sogenannter stationärer Zustand ein und die Temperaturverteilung wird dann zeitunabhängig ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$). Gl. (10) hat dann die Form einer Potentialgleichung mit

$$\Delta_{\vec{r}} T = -\frac{1}{\lambda} W. \quad (11)$$

Freies Elektronengas

Die folgenden beiden Abschnitte stützen sich auf die Darstellungen in N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid State Physics*, Saunders College Publishing, 1976 und können dort ausführlicher nachvollzogen werden.

Einer der größten Erfolge der Drude-Theorie, welche das die Elektronen in einem Metall als freies Elektronengas beschreibt, besteht darin, dass sie eine Erklärung für das experimentell gefundene Wiedemann-Franz Gesetz lieferte. Die grundsätzlichen Annahmen seien in aller Kürze zusammengefasst:

Obwohl das Elektronengas in einem Festkörper drei Größenordnung dichter als konventionelle Gase bei normalen Temperaturen und Umgebungsdrücken ist, beschrieb Drude das Verhalten der Elektronen mit Annahmen der zu diesem Zweck geringfügig modifizierten kinetischen Gastheorie.

- (1) Jegliche langreichweitigen Wechselwirkungen zwischen sowohl zwei Elektronen wie auch Elektronen und Ionen werden vernachlässigt. Die einzigen Wechselwirkung zwischen den Teilchen tritt in Form von Stößen auf. Bei Anlegung eines externen elektrischen Feldes bewegt erfahren die Elektronen eine entsprechende Beschleunigung, wobei die resultierende Bewegung durch die Newton'schen Gesetze beschrieben werden kann. Das durch andere Ladungsträger (wie Elektronen oder Ionen) erzeugte Feld wird nicht berücksichtigt. Wohingegen die Vernachlässigung von Elektron-Elektron-Wechselwirkungen oftmals zu sinnvollen Ergebnissen führt, ist die Annahme der verschwindenden Wechselwirkungen zwischen Elektronen und Ionen bereits bei der korrekten Beschreibung metallischen Verhaltens problematisch

- (2) Auftretende Stöße erstrecken sich über sehr kurze Zeitskalen, sodass sie als instantan angenommen werden können. Als Konsequenz eines Stoßereignisses ändert sich die Elektronengeschwindigkeit. Stöße werden hierbei als das Abprallen von Elektronen an undurchdringbaren Ionenrümpfen visualisiert, andere Stoßformen werden größtenteils vernachlässigt.
- (3) Die Wahrscheinlichkeit eines Stoßes pro Zeiteinheit beträgt $\frac{1}{\tau}$, wobei τ die Relaxationszeit bzw. die mittlere Zeit zwischen zwei Stößen beschreibt. Hierbei nimmt die einfachste Form des Drude Modells Positions- und Geschwindigkeitsunabhängigkeit dieser Größe an.
- (4) Das thermische Gleichgewicht zwischen Elektronen und ihrer Umgebung wird ausschließlich durch Stöße erreicht. Hierbei wird dies dadurch realisiert, dass sich ein Elektron unmittelbar nach einem Stoßereignis nicht mit einer Geschwindigkeit bewegt, die in Relation zur Situation vor dem Stoß steht, sondern räumlich willkürlich mit einer Geschwindigkeit, die der lokalen thermischen Energie am Ort des Stoßereignisses entspricht. Je wärmer der Bereich ist, in dem ein Stoßereignis stattfindet, desto höher ist die Geschwindigkeit des Elektrons.

Unter zur Hilfenahme dieser vier Annahmen kann mitunter das wohlbekanntes Ohmsche Gesetz hergeleitet werden, welches hier nicht nochmal explizit thematisiert werden soll. Stattdessen sei der Fokus auf den elektronischen Beitrag zur thermischen Leitung gelegt.

Elektronischer Beitrag zum Wärmetransport

Nach dem Drude-Modell des freien Elektronengases wird angenommen, dass die Elektronen einen Großteil des Wärmetransports tragen. Dieser Zusammenhang wird experimentell ersichtlich, wenn betrachtet wird, dass metallische Festkörper in der Regel eine deutlich höhere Wärmeleitfähigkeit als isolierende Körper aufweisen.

Wird nun ein Stück Metall betrachtet, über dessen Länge ein Temperaturgradient vorherrscht. Die thermische Stromdichte \mathbf{j}^q kann hier als Vektor definiert werden, die parallel zum Wärmefluss gerichtet ist und für kleine Temperaturgradienten proportional zu diesem ist:

$$\mathbf{j}^q = -\kappa \nabla T. \quad (12)$$

Hierbei beschreibt der Proportionalitätsfaktor κ die thermische Leitfähigkeit. O.b.d.A soll im Folgenden vereinfachend die Betrachtung auf einen Temperaturgradienten in ausschließlich x-Richtung reduziert werden.

Um nun die thermische Leitfähigkeit berechnen zu können, wird auf Annahme (4) des vorherigen Abschnitts zurückgegriffen. Die Elektronen, welche von der heißeren Seite des Metallstücks stammen, sind höherenergetisch als Elektronen, die von der kalten Seite des Körpers stammen. Somit lässt sich insgesamt ein Fluss thermischer Energie beobachten, welcher von der heißen zur kalten Seite gerichtet ist.

Sei nun zur Quantifizierung der thermischen Stromdichte angenommen, dass die Elektronen sich ebenfalls nur in eine Richtung bewegen können und der Ort x den Mittelpunkt zwischen warmer und kalter Seite des Metallstücks darstellt. Somit lassen sich die eine Hälfte der Elektronen der heißen Seite und die andere Hälfte der Elektronen der kalten Seite zuordnen. Sei weiterhin angenommen, dass die thermische Energie eines Elektrons, welches am Ort x' bei einer lokalen Temperatur T eine Kollision erfährt, im thermischen Gleichgewicht $E(T[x'])$ beträgt. Betrachte nun die genannte Position x , an dem das Elektron von der linken (heißen) Seite ankommt, jedoch ohne dort zu stoßen. Der letzte, die thermische Energie festsetzende, Stoß habe hierbei bei $x - v\tau$ stattgefunden, sodass das Elektron am Ort x eine thermische Energie von $E(T[x-v\tau])$

besitze. Hierbei ist v die Geschwindigkeit des Elektrons. Analog lässt sich die thermische Energie eines Elektrons von der rechten (kalten) Seite als $E(T[x+v\tau])$ bestimmen.

Die insgesamte thermische Stromdichte berechnet sich nun sehr simpel aus der Differenz der thermischen Energien der Elektronen von der heißen und kalten Seite, die mit der Geschwindigkeit der Ladungsträger und der Anzahl der sie tragenden Ladungsträger gewichtet sind. Nach den getroffenen Annahmen lässt sich somit schreiben:

$$j^q = \frac{n}{2} \cdot v \cdot (E(T[x - v\tau]) - (E(T[x + v\tau]))) \quad (13)$$

Wobei n die Gesamtzahl der Elektronen pro Einheitsvolumen ist. Wird nun angenommen, dass die Temperaturvariation auf der Längenskala der mittleren freien Weglänge $l = v\tau$ verschwindend klein ist, so lassen sich die thermischen Energien um x herum Taylorapproximieren und nach der ersten Ordnung abbrechen. Die Stromdichte erhält hierdurch die vereinfachte Form:

$$j^q = \frac{n}{2} \cdot v^2 \cdot \tau \cdot \frac{dE}{dT} \cdot \left(-\frac{dT}{dx} \right) \quad (14)$$

Die Erweiterung auf den dreidimensionalen Fall erfolgt einfach dadurch, dass die Geschwindigkeit v durch die x -Komponente v_x ersetzt wird und über alle Raumrichtungen gemittelt wird. Da die Geschwindigkeitsverteilung im thermischen Gleichgewicht, welches bei hinreichend kleinem Temperaturgradienten gegeben ist, isotrop ist gilt $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle = \frac{1}{3}v^2$. Zusätzlich gilt für die spezifische Wärme der Elektronen $c_v = n \cdot \frac{dE}{dT}$ sodass sich j^q schreiben lässt als:

$$j^q = -\frac{1}{3} \cdot v^2 \cdot \tau \cdot c_v \cdot \nabla T \quad (15)$$

woraus durch Vergleich mit (12) die Wärmekapazität als

$$\kappa = \frac{1}{3} \cdot v^2 \cdot \tau \cdot c_v \quad (16)$$

bestimmbar ist. Mithilfe der ebenfalls aus dem Drude-Modell herleitbaren Leitfähigkeit

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m} \quad (17)$$

lässt sich nun ein allgemeiner Ausdruck für das Wiedemann-Franz'sche Gesetz bestimmen:

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{c_v m^2}{3ne^2} \quad (18)$$

Drudes Auswertung dieses Ausdrucks stützt sich nun auf die bereits besprochenen Annahmen des Modells des freien Elektronengases. Hierbei wurden Analogien zum klassischen Gas für das mittlere Geschwindigkeitsquadrat und die spezifische Wärmekapazität getroffen. Er nahm, ohne jegliche experimentelle Grundlage an, dass $c_v = \frac{3}{2} \cdot n \cdot k_B$ gelte. Zudem wird angenommen, dass die Geschwindigkeitsverteilung des freien Elektronengases der klassischen Boltzmann-Verteilung entspreche und somit $\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T$. Damit ergibt sich nach Drude insgesamt

$$\frac{\kappa}{\sigma} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{k_B}{T} \right)^2 \cdot T. \quad (19)$$

Dieses Ergebnis unterscheidet sich um den Faktor 2 von den experimentell gefundenen Werten. Generell ist diese in Anbetracht der sehr simplen Annahmen recht gute Übereinstimmung mit experimentellen Resultaten auch nur auf zwei Irrtümer der Annahmen zurückzuführen, deren Fehler sich gegenseitig annullieren: Drude schätzte den elektronischen Beitrag zur spezifischen

Wärme bei Raumtemperatur um den Faktor 100 zu groß ab, wohingegen er das Geschwindigkeitsquadrat der Elektronen um den Faktor 100 zu niedrig abschätzte. Insgesamt kürzt sich dieser verfälschende Faktor aus dem Ausdruck der Wärmeleitfähigkeit (16) raus.

Das freie Elektronengas kann, wie unter anderem anhand der Diskrepanz zwischen Theorie und Praxis ersichtlich, nicht als klassisches Gas beschrieben werden. Diesem wird erst in der Sommerfeld Theorie Rechnung getragen. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass Elektronen eben nicht der Boltzmann, sondern der Fermi-Verteilung unterworfen sind, müssen die spezifische Wärme und das mittlere Geschwindigkeitsquadrat entsprechend modifiziert abgeschätzt werden.

Der elektronische Beitrag zur spezifischen Wärme ist um den Faktor der Größenordnung $\frac{k_B T}{E_F}$ kleiner als Drudes Annahme, wobei E_F die Fermi-Energie ist. Das korrekte mittlere Geschwindigkeitsquadrat ist durch die Fermi-Geschwindigkeit $v_F^2 = \frac{2E_F}{k_B T}$ gegeben. Diese ist somit um einen Faktor der Größenordnung $\frac{E_F}{k_B T}$ größer. Durch Einsetzen der korrigierten Größen wird das mit den experimentellen Resultaten übereinstimmende Wiedemann-Franz'sche Gesetz erhalten, welche im Skript eingangs in Form der Gleichung (1) gegeben ist.

Experiment

Versuchsaufbau zur Messung der Wärmeleitfähigkeit

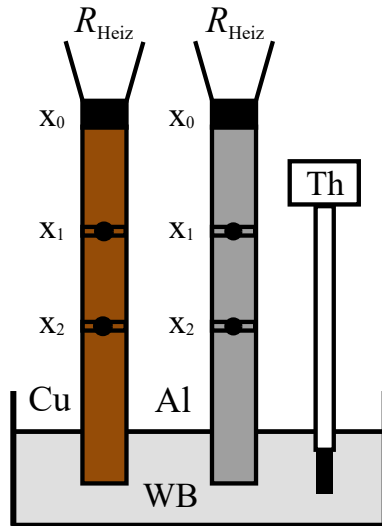


Abb. 2: Schematische Skizze des Versuchsaufbaus.

Zur Messung der Wärmeleitfähigkeit werden zwei thermisch isolierte Metallstäbe aus Kupfer und Aluminium verwendet, die an ihrem oberen Ende bei x_0 mit einem Heizwiderstand R_{Heiz} versehen sind. Der Heizstrom wird von einem Netzteil geliefert, wobei Strom und Spannung zur Bestimmung der Heizleistung mit Hilfe zweier Digitalmultimeter und/oder direkt am Gerät gemessen werden können. Zwei Digitalmultimeter werden für die Temperaturmessung in Verbindung mit zwei Platin-PTC-Widerständen benötigt. Die Sensoren sind im Abstand von 100 mm voneinander in den Stäben bei x_1 und x_2 integriert. In der folgenden Tabelle sind die Kalibrierdaten für die Widerstände aufgeführt. Berechnen Sie die Kalibrierfunktion $T(R)$ aus diesen Daten.

Temperatur T ($^{\circ}\text{C}$)	Widerstand R (Ω)	Temperatur T ($^{\circ}\text{C}$)	Widerstand R (Ω)
0	1000,0	80	1308,9
10	1039,0	90	1347,0
20	1077,9	100	1385,0
30	1116,7	110	1422,9
40	1155,4	120	1460,6
50	1194,0	130	1498,2
60	1232,4	140	1535,8
70	1270,7	150	1573,0

Um einen Wärmerückstau zu vermeiden, sind die Stäbe mit ihrem unteren Ende an ein Temperaturbad gekoppelt. Dieses Bad ist durch eine dicke Aluminiumplatte realisiert.

Versuchsaufbau zur Bestimmung des spezifischen Widerstandes

Für die Messung des spezifischen Widerstandes steht jeweils eine bereits mit Kontakten versehene Folie aus Kupfer bzw. Aluminium zur Verfügung. Die Dicke dieser Folien ist am Messplatz angegeben. Zur Durchführung der Messungen werden weiter ein Netzteil und zwei Digitalmultimeter zur Strom- und Spannungsmessung benötigt.

Versuchsaufgaben

1. Wärmeleitfähigkeit von Kupfer und Aluminium

Messen Sie den zeitlichen Verlauf der Temperaturverteilung in einem Cu-Stab und Al-Stab, wie er sich nach Einschalten einer an einem Ende angebrachten Heizung ergibt.

Nehmen Sie gleichzeitig(!) mit dem Einschalten des Heizstroms die Widerstandswerte der zwei Thermowiderstände etwa 30 Minuten lang auf. Nach dieser Zeit hat sich – unabhängig von

der verwendeten Heizleistung – ein nahezu stationärer Zustand eingestellt. Tragen Sie die Widerstandswerte als Funktion der Zeit $R(t)$ auf. ΔT ergibt sich durch Umrechnung von $\Delta R = R(x_1) - R(x_2)$. Zeigen Sie anhand des zeitlichen Verlaufs Ihrer Daten, dass trotz leichter Drift der Widerstände ein stationärer Zustand der Wärmeleitung erreicht ist. *Wie kann die weitere Drift erklärt werden?* Messen Sie $T_{1/2}(t)$ bzw. $R_{1/2}(t)$ für beide Stäbe.

Stellen Sie weiter die Abhängigkeit der Temperatur, die sich zum Ende des Versuchs eingestellt hat, von der Entfernung x zum Heizwiderstand dar und bestimmen Sie die thermische Leitfähigkeit von Kupfer und Aluminium. Die Messung der thermischen Leitfähigkeit erfolgt nach Gl. (6) mit Hilfe eines konstanten Wärmestroms, der zwischen den beiden Messpunkten x_1 und x_2 einen Temperaturabfall verursacht (analog einem Spannungsabfall über einen elektrischen Widerstand). Gehen Sie davon aus, dass die elektrische Energie im Heizwiderstand vollständig in Joulesche Wärme umgewandelt wird. Die sich einstellende Wärmestromdichte j_w kann dann aus dem Heizstrom I , der Heizspannung U und der Querschnittsfläche des Stabes mit dem Radius r berechnet werden über

$$j_w = \frac{1}{\pi r^2} P_{el} = \frac{1}{\pi r^2} U I. \quad (20)$$

Messen Sie die Stabdurchmesser mit einem Messschieber. Bilden Sie dazu Mittelwert und Standardabweichung von mindestens fünf Messungen.

Voraussetzung für sinnvolle Ergebnisse ist die hinreichende Stationarität. Daher ist es angebracht, für die Berechnung der Wärmestromdichte nur Werte gegen Ende der Messung zu verwenden wenn $\Delta T \approx \text{const.}$ gilt. Achten Sie darauf, dass die Maximalleistung des Widerstands nicht überschritten wird. Vergleichen Sie für beide Metalle die gewonnenen Daten mit Literaturwerten.

2. Spezifischer Widerstand von Kupfer und Aluminium

Bestimmen Sie den spezifischen Widerstand von Aluminium und Kupfer nach der Methode von van der Pauw. Der Strom wird über je zwei der vier vorhandenen Kontakte eingespeist. Lesen Sie die Stromstärke am dazu in Serie geschalteten Multimeter ab, während das zweite Multimeter zur Spannungsmessung an den anderen beiden Kontakten dient.

Führen Sie die Messung zunächst für Kupfer bei unterschiedlichen Einstellungen der Stromstärke durch und bilden Sie daraus die Mittelwerte der Widerstände $R_{AB,CD}$ und nach zyklischem Vertauschen der Anschlüsse die Mittelwerte der Widerstände $R_{BC,DA}$. Bestimmen Sie daraus den spezifischen Widerstand ρ_{el} über Gl. (3). Wiederholen Sie die Messungen anschließend für Aluminium. Geben Sie für beide Metalle auch die elektrische Leitfähigkeit an und vergleichen Sie diese mit den Literaturwerten!

3. Bestimmung der Lorenz-Zahl

Berechnen Sie mit den gewonnenen Daten die Lorenz-Zahl L und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem theoretischen Wert.

Anhang: Graphische Auftragung der van der Pauw Funktion

