Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

7 . Übungsblatt | Elektrodynamik | SS 2022

Abgabe: Mo., 20.06.2022 bis 12:00 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/hOZ6Hb`.
Aufgaben mit △ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

29. **Wissensfragen (3 Punkte)**

    (a) Zeichnen Sie die elektrischen Feldlinien und die Äquipotentiallinien eines Dipols und eines Quadrupols.

    (b) Was ist die Nahzone einer Multipolentwicklung?

30. **Elektromagnetisches Feld einer bewegten Punktladung (14 Punkte)**

    Berechnen Sie das Feld einer mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Punktladung.

    (a) Bestimmen Sie das Vierer-Potential $A^{\mu\prime}$ der Punktladung in ihrem Ruhesystem Σ'.
    Geben Sie das Vierer-Potential aus Sicht eines Inertialsystems Σ an, in dem die Punktladung sich mit Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ bewegt.
    Welche Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ beobachtet man in Σ?
    Bestimmen Sie die Äquipotentialflächen $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$ und skizzieren Sie diese sowie die Feldlinien von $\vec{E}$.

    △ (b) Aus der Vorlesung sind die Liénard-Wiechert-Potentiale bekannt. Berechnen Sie $\vec{E}$ und $\vec{B}$ für den Fall einer Punktladung, die sich mit konstantem $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ bewegt. Leiten Sie dazu die folgende Form der Liénard-Wiechert-Potentiale ab:

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{q}{c}\left.\frac{\vec{v}(\tau)}{[||\vec{r}-\vec{r}(\tau)|| - (1/c)\vec{v}(\tau)\cdot(\vec{r}-\vec{r}(\tau))]}\right|_{\tau=t_{\text{ret}}} \tag{1}$$

$$\varphi(\vec{r},t) = \left.\frac{q}{[||\vec{r}-\vec{r}(\tau)|| - (1/c)\vec{v}(\tau)\cdot(\vec{r}-\vec{r}(\tau))]}\right|_{\tau=t_{\text{ret}}} . \tag{2}$$

    $\vec{r}(t)$ ist die Bahnkurve der Punktladung, $\vec{v}(t)$ ihre Geschwindigkeit und $\vec{r}$ ist der Beobachtungspunkt in Σ.
    Beachten Sie beim Differenzieren, dass die Gleichung $t_{\text{ret}} = t - ||\vec{r} - \vec{r}(t_{\text{ret}})||/c$ eine *implizite* Definition der retardierten Zeit darstellt.
    Hinweise:

    i. Es ist hilfreich, die Abkürzungen

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}(t_{\text{ret}}), \quad R = ||\vec{R}||, \quad v_R = \frac{\vec{v}(t_{\text{ret}})\cdot\vec{R}}{R} \tag{3}$$

    einzuführen und zunächst die Ausdrücke $\partial t_{\text{ret}}/\partial t$, ∇t_{ret}, ∇R, ∇v_R usw. zu bestimmen, *ohne* dabei die retardierte Zeit zu eliminieren.

    ii. Stellen Sie damit zunächst $\vec{E}$ in Abhängigkeit von $\vec{R}$ und v_R dar.

    △ (c) Formen Sie $\vec{E}$ solange um, bis Sie für $\vec{E}$ Ihr Ergebnis aus (a) erhalten.
    Hinweis: Um mit (a) vergleichen zu können, muss die retardierte Zeit aus $\vec{E}$ eliminiert werden. Zeigen Sie dazu:

$$\vec{r} - \vec{v}t = \vec{R} - R\frac{\vec{v}}{c} \quad \text{und} \quad R^2(1 - v_R/c)^2 = (\vec{r} - \vec{v}t)^2 - [(\vec{v}/c)\times(\vec{r} - \vec{v}t)]^2 . \tag{4}$$

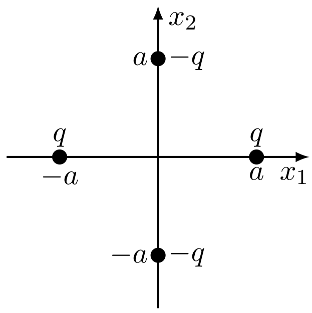
31. **Drehmoment auf einen Dipol (3 Punkte)**

Berechnen Sie das Drehmoment auf einen reinen Dipol $\vec{p}$ in einem externen Feld $\vec{E}$.
Hinweis: Verfahren Sie analog zur Berechnung der Kraft auf einen Dipol im externen $\vec{E}$-Feld.

32. **Multipolentwicklung (10 Punkte)**

Berechnen Sie das Monopol-, Dipol- und Quadrupolmoment der folgenden Ladungsverteilungen bezüglich des Koordinatenursprungs:

(a) Vier Punktladungen q und $-q$ wie rechts in der Skizze dargestellt.



(b) Homogen geladene Kugelschale mit Radius R, deren Mittelpunkt im Ursprung liegt.

(c) Zylinder mit Radius R und Länge L, sowie mit folgender Raumladungsdichte:

$$\rho(\vec{r}) = \begin{cases} c\, x_3^n & \text{für } -L/2 \leq x_3 \leq L/2 \text{ und } x_1^2 + x_2^2 \leq R^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{5}$$

mit $c = \mathrm{const}$ und $n \in \mathbb{N}$.

Geben Sie außerdem jeweils die Beiträge der einzelnen Momente zum Potential $\varphi(\vec{r})$ an.