Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

Abgabe: Mo., 13.06.2022 bis 12:00 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/hOZ6Hb`.
Aufgaben mit △ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

24. Wissensfragen (5 Punkte)

(a) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen im Gaußschen Einheitensystem an.

(b) Geben Sie alle Möglichkeiten an durch Kombination einer Ableitung ∂^μ mit den zwei Vierer-Vektoren $A^\mu(x)$ und $B^\mu(x)$ einen Vierer-Vektor zu erzeugen.

(c) Wie lauten die retardierten/avancierten Green'schen Funktionen der Wellengleichung?

(d) Das Vierer-Potenzial $A^\mu = (\vec{A}, \phi)$ erfüllt $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. Wie drückt sich damit $\vec{E}$ durch $(\vec{A}, \phi)$ aus? Der Feldtensor lautet

$$F^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & B^3 & -B^2 & -E^1 \\ -B^3 & 0 & B^1 & -E^2 \\ B^2 & -B^1 & 0 & -E^3 \\ E^1 & E^2 & E^3 & 0 \end{bmatrix} .$$

(e) Geben Sie die Maxwell-Gleichungen ausgedrückt durch $F^{\mu\nu}$ an (2 Stück).

△ 25. Energie und Impuls elektromagnetischer Wellen (8 Punkte)

Eine transversale elektromagnetische Welle im Vakuum sei definiert

- mit linearer Polarisierung durch

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \sin[k\,(z - ct)] \tag{1}$$

- mit zirkularer Polarisierung durch

$$\vec{E} = E_0 \left\{ \cos[k\,(z - ct)]\, \vec{e}_x + \sin[k\,(z - ct)]\, \vec{e}_y \right\} \ . \tag{2}$$

Bearbeiten Sie sowohl für die linear als auch für die zirkular polarisierte Welle:

(a) Skizzieren Sie die Welle.
In welche Richtung breitet sich die Welle aus?

(b) Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}(\vec{r}, t)$,

(c) Berechnen Sie den Poynting-Vektor $\vec{S}(\vec{r}, t)$,

(d) Berechnen Sie den Druck der Strahlung auf eine um den Winkel ϑ gegen die Ausbreitungsrichtung geneigte und total absorbierende Ebene.

26. **Drehimpulsdichte (6 Punkte)**

Weisen Sie die Drehimpulserhaltung für eine gegebene Verteilung von Ladungen ρ und Strömen $\vec{j}$ in einem Volumen V nach und leiten Sie einen Ausdruck für den Drehimpuls $\vec{\mathcal{L}}_{\text{Feld}}$ des elektromagnetischen Feldes in diesem Volumen her.
Gehen Sie dabei wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie $\vec{\mathcal{L}}_{\text{Feld}}$ so, dass mit der zeitlichen Ableitung des mechanischen Drehimpulses

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\mathcal{L}}_{\text{mech}} = \int_V \mathrm{d}V\, \vec{r} \times \left(\rho\vec{E} + \frac{1}{c}\vec{j} \times \vec{B}\right) \tag{3}$$

gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\mathcal{L}}_{\text{mech}} + \vec{\mathcal{L}}_{\text{Feld}}\right)_i = \int_V \mathrm{d}V\, \epsilon_{ijk} x_j \frac{\partial}{\partial x_l} T_{kl}\,, \tag{4}$$

wobei T_{ij} der Maxwellsche Spannungstensor und $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)^T$ ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass gilt

$$\left[\vec{E}(\nabla \cdot \vec{E}) - \vec{E} \times (\nabla \times \vec{E})\right]_i = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_i E_j - \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{E}\delta_{ij}\right)\,. \tag{5}$$

△ (b) Um den Fluss der Drehmomentdichte zu bestimmen, muss die rechte Seite von Gleichung (4) als Volumen-Integral über eine Divergenz geschrieben werden. Zeigen Sie damit die Form

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{\mathcal{L}}_{\text{mech}} + \vec{\mathcal{L}}_{\text{Feld}}\right)_i = \oint_{\partial V} d\vec{f} \cdot \vec{M}_i\,. \tag{6}$$

Was erhalten Sie für M? Interpretieren Sie Ihr Resultat.

27. **Polarisation ebener Wellen im Vakuum (7 Punkte)**

(a) Leiten Sie die homogene Wellengleichung für $\vec{B}$ aus den Maxwell-Gleichungen ab, ohne die Potentiale zu verwenden ($\vec{j} = \vec{0}$, $\rho = 0$).

(b) Das elektrische Feld sei als ebene Welle in der Form

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{a}(\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2)e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}\,, \quad \vec{k} = k\vec{e}_3 \tag{7}$$

vorgegeben, wobei $a \neq 0$ eine beliebige reelle Zahl sei.
Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ und geben Sie deren Polarisation an.

(c) Die magnetische Induktion sei als ebene Welle vom Typ

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = B_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\vec{e}_1 + B_0 \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)\vec{e}_2\,, \quad \vec{k} = k\vec{e}_3 \tag{8}$$

vorgegeben.
Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ und geben Sie die Polarisation von $\vec{E}$ an.

28. **Flug durch einen unendlichen großen Plattenkondensator (4 Punkte)**

Im Inertialsystem Σ gelte $\vec{E} = E_0\vec{e}_2$ und $\vec{B} = 0$.

(a) Was für Felder werden aus einem mit $\vec{v}_0$ relativ zu Σ bewegten Inertialsystem Σ' beobachtet? Diskutieren Sie die Fälle $\vec{E} \parallel \vec{v}_0$ und $\vec{E} \perp \vec{v}_0$.

(b) Geben Sie jeweils die Lorentzkraft aus Sicht eines Beobachters in Σ bzw. Σ' an, die eine Punktladung erfährt, die in Σ am Ort $\vec{r} = 0$ ruht.

Hinweis: Ein Computerprogramm, wie z. B. Mathematica, darf zur Matrixmultiplikation zur Hilfe genommen werden.