Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

4 . Übungsblatt — Elektrodynamik — SS 2022

Abgabe: Mo., 23.05.2022 bis 12:00 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/hOZ6Hb`.
Aufgaben mit △ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

18. **Eichtransformationen (0 Punkte)**

(a) Zeigen Sie, dass die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ invariant unter Eichtransformationen sind.

(b) Betrachten Sie das Vektorpotential

$$\vec{A} = \alpha \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ -x_2 x_3 \\ -x_1 x_3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit $\alpha = \text{const}$ und es gelte $\varphi \equiv 0$.

i. Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$.

ii. Zeigen Sie, dass das Vektorpotential $\vec{A}$ nicht die Coulomb-Eichung erfüllt.

iii. Ermitteln Sie eine Eichtransformation, so dass das umgeeichte Vektorpotential $\vec{A}'$ der Coulomb-Eichung genügt.
Zeigen Sie zunächst, dass die gesuchte Eichtransformation Lösung einer Poisson-Gleichung sein muss.
Geben Sie $\vec{A}'$ an.

19. **Poisson-Gleichung und Fouriertransformation (7 Punkte)**

Betrachten Sie eine Kugeloberfläche mit Radius R und konstanter Flächenladungsdichte σ.

Erinneren Sie sich an die Fouriertransformation einer Funktion $f(\vec{r}) \mapsto f(\vec{k})$ mit

$$f(\vec{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3\vec{r}\, e^{-i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(\vec{r}). \tag{2}$$

Die Rücktransformation ist dann durch

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \mathrm{d}^3\vec{k}\, e^{i\,\vec{k}\cdot\vec{r}}\, f(\vec{k}) \tag{3}$$

gegeben.

Nutzen Sie die Fouriertransformation, um die Poisson-Gleichung für die gegebene Ladungsverteilung zu lösen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{4\pi}{||\vec{k}||^2}\, \rho(\vec{k}) \tag{4}$$

gilt, wenn $\varphi(\vec{r})$ und $\rho(\vec{r})$ die Poisson-Gleichung $\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\,\rho(\vec{r})$ erfüllen.

(b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\rho(\vec{k})$ der Ladungsverteilung.
Hinweis: $\rho(\vec{r})\mathrm{d}V = \sigma\, r^2\, \sin\vartheta\, \delta(r-R)\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}\phi$.

(c) Setzen Sie Ihr Ergebnis aus Teil (b) in Gleichung (4) ein und bestimmen Sie $\varphi(\vec{r})$ durch Fourierrücktransformation.
Hinweis: Sie können das Dirichlet-Integral $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$ ohne Herleitung verwenden.

Bitte wenden! →

20. **Greensche Funktion des d'Alembert-Operators (13 Punkte)**

Es soll eine partikuläre Lösung der Wellengleichung

$$\Box\varphi(\vec{r},t) = \Delta\varphi(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\varphi(\vec{r},t) = -4\pi\rho(\vec{r},t) \tag{5}$$

berechnet werden. Gesucht ist die Greensche Funktion, die

$$\Box G(\vec{r},t) = \Delta G(\vec{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\vec{r},t) = -4\pi\delta(\vec{r},t) \tag{6}$$

erfüllt.

(a) Zeigen Sie, dass für die Fouriertransformierte

$$G(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\vec{r}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t\, e^{i\omega t} G(\vec{r},t) \tag{7}$$

gilt:

$$G(\vec{k},\omega) \propto \frac{1}{\omega^2 - k^2c^2}\,. \tag{8}$$

(b) Geben Sie den Residuensatz an.

(c) Führen Sie zuerst die Fourier-Rücktransformation von Gl. (8) bezüglich ω aus.
Interpretieren Sie dazu ω als komplexe Zahl und verwenden Sie den Residuensatz unter Berücksichtigung folgender Punkte:

i. Die Integrationskontur in der komplexen Ebene schließt die reelle Achse ein und wird entweder durch einen Halbbogen in der unteren (Kontur C) oder oberen Halbebene (Kontur C') geschlossen.

ii. Die Pole von $G(\vec{k},\omega)$ liegen auf der reellen Achse. Um Singularitäten zu vermeiden, nehme man in Gleichung (8) die Ersetzung $ck \to ck + i\eta, \eta > 0$ vor.

iii. Nach der Integration bilde man den Grenzwert $\eta \to 0$.

iv. Integrieren Sie entlang der passenden Kontur C oder C'.
Hinweis: Überlegen Sie sich, für welche Zeiten t das Integral entlang C bzw. C' existiert.

Skizzieren Sie C, C' und die Pole des Integranden.

(d) Die Rücktransformation bezüglich $\vec{k}$ in den Ortsraum führt man am einfachsten mit Hilfe von sphärischen Polarkoordinaten im $\vec{k}$-Raum aus. Legen Sie die k_z-Achse parallel zu $\vec{r}$.

(e) Interpretieren Sie die Zeitabhängigkeit Ihres Ergebnisses fur $G(\vec{r},t)$. Was erhält man, wenn man entlang C' integriert?

21. **Pseudovektor (4 Punkte)**

(a) Was ist ein polarer Vektor?
Was ist ein axialer Vektor (Pseudovektor)?

(b) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt eines Pseudovektors und eines polaren Vektors ein polarer Vektor ist.

(c) Nutzen Sie die Aussage aus (b) und die Maxwell-Gleichungen, um zu zeigen, dass die magnetische Induktion $\vec{B}$ ein Pseudovektor ist.