

Übungsblätter gibt es unter <https://lnk.tu-bs.de/h0Z6Hb>.

Aufgaben mit Δ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

9. Teilchenzerfall (7 Punkte)

Ein Σ^0 -Teilchen bewegt sich auf einen Detektor zu und zwar mit der Geschwindigkeit $c/3$ aus der Sicht des Ruhesystems des Detektors. Das Teilchen zerfällt in ein Λ -Teilchen und ein Photon, bevor es den Detektor erreicht. Das Photon bewege sich nach dem Zerfall auf den Detektor zu.

- Informieren Sie sich anhand geeigneter Literatur, was ein Σ^0 - bzw. ein Λ -Teilchen ist und geben Sie Größen wie Masse und Lebensdauer an.
- Welche Energie hat das Σ^0 -Teilchen im Ruhesystem des Detektors?
- Welche Energie hat das Photon im Ruhesystem des Σ^0 -Teilchens?
- Δ Welche Energie (des Photons) wird im Detektor gemessen?

Geben Sie Ihre Ergebnisse in Abhängigkeit der Ruhemassen der Teilchen an. Sie können $c = 1$ setzen.

10. Zentraler Stoß: Relativistische Betrachtung (8 Punkte)

Betrachten Sie den zentralen Stoß eines Elektrons der Energie E_{vor}^e mit einem Proton.

- Zeigen Sie allgemein, dass unter Ausschluss äußerer Kräfte für den Stoß zweier Punktmassen Energieerhaltung gilt.
- Welche Energie E_{vor}^e muss das Elektron vor dem Stoß haben, damit das Proton nach dem Stoß die Energie $T_{\text{nach}}^p = 0.5 T_{\text{vor}}^e$ hat? Betrachten Sie den Stoß in dem Inertialsystem, in dem das Proton vor dem Stoß ruht.

11. Transformationsverhalten von Tensoren (8 Punkte)

Ein Tensor $\underline{t}$ q -ter Stufe ist gegeben durch seine kontravarianten Komponenten $t^{i_1, \dots, i_q}$ und definiert durch

$$\underline{t} = t^{i_1, \dots, i_q} \vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q}, \quad (1)$$

wobei die $\vec{e}_i$ kovariante Einheitsvektoren eines d -dimensionalen Vektorraums sind und „ $\otimes$ “ das Tensorprodukt bezeichnet.

Sei D_i^j eine Koordinatentransformation (und D^{-1j}_i ihr Inverses), die die kontravarianten Komponenten eines Vektors $\vec{t}$ wie folgt transformiert

$$\tilde{t}^j = D^{-1j}_i t^i, \quad (2)$$

wobei $\tilde{t}^j$ die kontravarianten Komponenten im transformierten Koordinatensystem bezeichnen. Dann transformiert sich ein Tensor q -ter Stufe folgendermaßen

$$\tilde{t}^{j_1, \dots, j_q} = D^{-1j_1}_{i_1} D^{-1j_2}_{i_2} \dots t^{i_1, \dots, i_q}. \quad (3)$$

Gegeben sei ein Koordinatensystem mit Metrik (g_{ij}) und ein Tensor zweiter Stufe $\underline{t}$:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & A & 0 \\ A & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (t^{ij}) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

(a) Berechnen Sie die kovarianten Komponenten des Tensors $\underline{t}$.

(b) Betrachten Sie nun eine Koordinatentransformation mit

$$D^1_1 = 1, \quad D^2_3 = 1 \quad \text{und} \quad D^3_2 = -1, \quad (5)$$

alle übrigen Komponenten seien 0.

Berechnen Sie die transformierten kontravarianten Komponenten $\tilde{t}^{ij}$ und kovarianten Komponenten $\tilde{t}_{ij}$ des Tensors.

(c) Zeigen Sie, dass die kovarianten und kontravarianten transformierten Komponenten über eine passende Metrik miteinander zusammenhängen.

Wie lässt sich diese Metrik berechnen?

▲ 12. Transformationsverhalten von Pseudotensoren (7 Punkte)

Ein Tensor q -ter Stufe heißt **alternierend**, wenn für jede Permutation $\mathcal{P}$ gilt

$$t^{\mathcal{P}(i_1, \dots, i_q)} = \text{sgn}(\mathcal{P}) t^{i_1, \dots, i_q}, \quad (6)$$

wobei $\text{sgn}(\mathcal{P})$ das Signum der Permutation ist.

(a) Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft basisunabhängig ist.

Bezeichne $(i_1, \dots, i_q)$ einen Satz sortierter Indizes, also $i_1 < i_2 < \dots < i_q$. Mit Hilfe des total-antisymmetrischen Kroneckersymbols

$$\delta_{i_1, \dots, i_q}^{j_1, \dots, j_q} = \begin{cases} 1, & i_1, \dots, i_q \text{ gerade Permutation von } j_1, \dots, j_q \\ -1, & i_1, \dots, i_q \text{ ungerade Permutation von } j_1, \dots, j_q \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (7)$$

lässt sich dann das äußere Produkt „ $\wedge$ “ zweier Tensoren $\underline{t}$ und $\underline{s}$ definieren:

$$(\underline{t} \wedge \underline{s})^{i_1, \dots, i_{p+q}} := \delta_{(j_1, \dots, j_p)(j_{p+1}, \dots, j_{p+q})}^{i_1, \dots, i_{p+q}} t^{(j_1, \dots, j_p)} s^{(j_{p+1}, \dots, j_{p+q})}. \quad (8)$$

Der resultierende Tensor ist alternierend.

(b) Begründen Sie für zwei Tensoren $\underline{t}$ und $\underline{s}$ gleicher Stufe (also $p = q$) über einem d -dimensionalen Vektorraum, dass nur $\binom{d}{p+q}$ linear unabhängige Komponenten von $(\underline{t} \wedge \underline{s})^{i_1, \dots, i_{p+q}}$ existieren.

Die unabhängigen Komponenten können dann auch durch die Komponenten mit sortierten Indizes angegeben werden. Es lässt sich also schreiben

$$t^{(i_1, \dots, i_q)} = \frac{1}{q!} t^{j_1, \dots, j_q} \delta_{j_1, \dots, j_q}^{(i_1, \dots, i_q)}. \quad (9)$$

Darauf aufbauend, kann man die Stufe des resultierenden Tensors verringern. Man erhält dann einen sogenannten Pseudotensor. Ein Beispiel hierfür ist das Kreuzprodukt in drei Dimensionen.

Sei $\underline{t}$ nun ein Tensor, der durch ein Kreuzprodukt angegeben werden kann, dann lässt sich schreiben

$$t_i = \epsilon_{i(jk)} t^{(jk)}, \quad (10)$$

wobei $t^{(jk)}$ die unabhängigen Elemente eines alternierenden Tensors sind.

(c) Zeigen Sie, dass das Transformationsverhalten von $\underline{t}$ durch

$$\tilde{t}_j = \frac{1}{\det D} D^i_j t_i \quad (11)$$

gegeben ist, wobei D die Matrix der Basistransformation bezeichnet.

Hinweis: Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix A lässt sich mit der Leibniz-Formel schreiben als $\det A = \sum_{\mathcal{P}} \text{sgn}(\mathcal{P}) \prod_i A_{i, \mathcal{P}(i)}$, wobei hier $\mathcal{P}$ eine Permutation aller Zahlen $1, \dots, n$ bezeichnet.