Technische Universität Braunschweig

INSTITUT FÜR THEORETISCHE PHYSIK

Prof. Dr. Wolfram Brenig
Alexander Schwenke
Erik Wagner

1 . Übungsblatt | Elektrodynamik | SS 2022

Abgabe: Mo., 02.05.2022 bis 12:00 Uhr in Stud.IP

Übungsblätter gibt es unter `https://lnk.tu-bs.de/hOZ6Hb`.
Aufgaben mit △ müssen von Studierenden im Lehramt nicht bearbeitet werden.

5. **Wissensfragen (3 Punkte)**

   (a) Was folgt aus Newtons zweitem Gesetz $\vec{F} = m\vec{a}$ für einen Körper endlicher Masse m bei konstanter Kraft $\vec{F}$? Widerspricht hier etwas der speziellen Relativitätstheorie?

   (b) Leiten Sie aus der speziellen Lorentz-Transformation die relativistische Addition zweier Geschwindigkeiten u_1 und u_2 in x-Richtung her. Die spezielle Lorentz-Transformation lautet

$$L^{\mu}{}_{\nu} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \tag{1}$$

   wobei, bei einer Geschwindigkeit v, $\beta = \frac{v}{c}$ und $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ mit der Lichtgeschwindigkeit c sind.

   (c) Wie lautet die Minkowski-Metrik in drei Raumdimensionen?

6. **Lorentz-Transformation (8 Punkte)**

   Zum Zeitpunkt $t = t' = 0$ haben zwei Inertialsysteme Σ und Σ' den gleichen Ursprung und parallele x_3-Achsen.

   Der Winkel zwischen der x_1- und der x'_1-Achse beträgt $\alpha > 0$ bei $t = t' = 0$.

   Geben Sie die Lorentz-Transformation zwischen diesen beiden Inertialsystemen in der Form $x'_\mu = f(x_1, x_2, x_3, t)$ an, wobei aus der Sicht von Σ die Relativgeschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_1$ ist.

7. **Relativistische Lösegeldübergabe (9 Punkte)**

   Aus der Sicht eines Beobachters im Inertialsystem Σ bewegen sich zwei Raumschiffe auf parallelen Bahnen im Abstand d mit den Geschwindigkeiten $\vec{v}_1 = -c/2\,\vec{e}_2$ bzw. $\vec{v}_2 = c/2\,\vec{e}_2$.

   In dem Zeitpunkt, in dem die Raumschiffe vom System Σ aus gesehen den kürzesten Abstand d haben, schickt das Schiff 1 ein Paket mit der Geschwindigkeit $\frac{3c}{4}$ ab (bezogen auf das System Σ).

   (a) In welchem Winkel muss aus der Sicht eines Beobachters an Bord von Schiff 1 das Paket abgeschickt werden, damit es das zweite Schiff erreichen kann?
   Nehmen Sie an, dass die Koordinatenachsen des Beobachters auf Schiff 1 parallel zu denen des Systems Σ sind.

   (b) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich das Paket vom Schiff 1 aus gesehen?

△ 8. **Krummlinige, nicht-orthogonale Koordinaten (10 Punkte)**

Als Beispiel für krummlinige und nicht-orthogonale Koordinaten u^1, u^2, u^3 betrachten wir:

$$x^1 = -a\,u^1\,\sin(u^2) \qquad x^2 = b\,u^1\,\cos(u^2) \qquad x^3 = cu^3\,, \tag{2}$$

wobei $a, b, c, > 0$ und x^1, x^2, x^3 kartesische Koordinaten sind.

(a) Bestimmen Sie die normierte Basis $\vec{e}_i$ der Tangentialvektoren $\vec{e}_i = \vec{t}_i / \left|\vec{t}_i\right|$, wobei $\vec{t}_i = \partial\vec{x}/\partial u^i$. Dies ist die sogenannte *kovariante* Basis.

(b) Für zwei Vektoren $\vec{a} = a^i\,\vec{e}_i$ und $\vec{b} = b^j\,\vec{e}_j$ (Einstein'sche Summenkonvention!) sind a^i und b^i die sogenannten *kontravarianten* Komponenten. Für das gewöhnliche Skalarprodukt gilt $\vec{a}\cdot\vec{b} = g_{ij}\,a^i\,b^j$, wobei g_{ij} die (*kovariante*) *euklidische* Metrik ist. Bestimmen Sie im vorliegenden Fall g_{ij}.

(c) Zu jeder kovarianten Basis gibt es eine *kontravariante* Basis $\vec{e}^{\,j}$, mit $\vec{e}^{\,i}\cdot\vec{e}_j = \delta^i_j$. Dabei ist δ^i_j das Kroneckersymbol. Bestimmen Sie $\vec{e}^{\,i}$ im vorliegenden Fall.
Hinweis: Betrachten Sie $\vec{e}_i \times \vec{e}_j/(\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3))$ für $(i,j) = (1,2), (1,3), (2,3)$.

(d) Der Vektor $\vec{b} = b^j\vec{e}_j$ lässt sich auch in *kovarianten* Komponenten $\vec{b} = b_j\vec{e}^{\,j}$ schreiben. Drücken Sie damit das gewöhnliche Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ allgemein mittels der kontravarianten (kovarianten) Komponenten von $\vec{a}$ ($\vec{b}$) aus. Wie erhält man b_j aus g_{ij} und b^j?

(e) Skizzieren Sie die Koordinatenlinien in der x^1-x^2-Ebene für $a = 1$, $b = 2$ und zeichnen Sie die kontra- und kovarianten Basisvektoren in den Punkten $(u^1, u^2) = (1, \pi/4)$ und $(u^1, u^2) = (1, \pi/2)$ ein. Welche Gleichungen beschreiben die Linien $u^1 = \mathrm{const}$ bzw. $u^2 = \mathrm{const}$ in kartesischen Koordinaten?

(f) Bestimmen Sie den Laplace-Operator in den Koordinaten u^1, u^2, u^3.