

# Geladene Teilchen und kosmische Magnetfelder – fachliche Hintergründe für ein neues Anwendungsgebiet in der Oberstufe

Rainer Müller, TU Braunschweig

## 1. Einleitung: Geladene Teilchen in kosmischen Plasmen

Wenn man auf der Erde lebt, hat man nicht viele Gelegenheiten, Erfahrungen im Umgang mit Plasmen sammeln. Fast jeder hat schon einmal die leuchtenden Filamente in einer Plasmakugel betrachtet, und viele wissen auch, dass im Inneren von Leuchtstoffröhren und Energiesparlampen ein Plasma existiert. Aber die meisten Menschen haben keine konkreten Vorstellungen von diesem Zustand der Materie.

Dabei ist das Plasma der häufigste Materiezustand im Universum. Ein Plasma ist ein ionisiertes Gas, das aus freien Elektronen und positiv geladenen Ionen (meistens Protonen) besteht. Wie die Elektronen sind die positiven Ionen frei beweglich, so dass alle Komponenten eines Plasmas strömen können. Das unterscheidet es von einem metallischen Leiter, in dem die Elektronen ebenfalls frei beweglich sind, aber die positiven Ionen fest in einem regelmäßigen Gitter angeordnet sind.

Ein Plasma entsteht bei hohen Temperaturen, wenn die mittlere thermische Energie größer als die Ionisierungsenergie der Atome ist. Dann werden die Atome eines Gases ionisiert. Das ist zum Beispiel im Inneren der Sterne der Fall, aber auch in den heißen Regionen der Galaxis, wo die interstellare Materie zumindest teilweise ionisiert ist.

Die Physik der Plasmen ist schon mehrfach Gegenstand fachdidaktischer Projekte gewesen ([1]-[5]). Bisher wurde aber noch nicht versucht, die motivierende Wirkung, die von astrophysikalischen Themen ausgeht, für das klassische Oberstufenthema „Bewegung von geladenen Teilchen in elektrischen und magnetischen Feldern“ nutzbar zu machen. Die folgenden Überlegungen sollen einen ersten Schritt in diese Richtung darstellen.

Die Physik astrophysikalischer Plasmen lässt sich auf zwei Ebenen untersuchen: Zum einen kann man die kosmischen Magnetfelder als vorgegeben ansehen und die Bewegung einzelner geladener Teilchen mit Hilfe der Lorentzkraft beschreiben. Als Beispiel werden wir die Bewegung von Elektronen und Protonen im van-Allen-Gürtel der Erde beschreiben. Auf einer zweiten Beschreibungsebene wird über die Bewegung einzelner Teilchen gemittelt und nur die Wechselwirkung des im Ganzen neutralen Plasmas mit dem magnetischen Feld betrachtet, das nun selbst als dynamisch angesehen wird. Dieser Ansatz wird als Magnetohydrodynamik (MHD) bezeichnet. Er findet seine Anwendung in der Beschreibung zahlreicher astrophysikalischer Prozesse, auf die zum Teil in den anderen Artikeln dieses Heftes eingegangen wird.

## 2. Bewegung geladener Teilchen in magnetischen Feldern

Betrachten wir zunächst die Bewegung einzelner geladener Teilchen in einem vorgegebenen magnetischen Feld  $\vec{B}$ . Hier wirkt auf geladene Teilchen die Lorentzkraft  $q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$ , mit der die newtonsche Bewegungsgleichung lautet:

$$m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1)$$

Die Richtung der Lorentzkraft lässt sich mit der rechte- bzw. linke-Hand-Regel ermitteln. Sie steht immer senkrecht auf der Geschwindigkeitsrichtung des Teilchens und auf der Magnetfeldrichtung. Aus diesem Umstand lassen sich zwei Schlüsse ziehen:

1. Weil eine Kraft, die senkrecht zur Geschwindigkeit wirkt, die kinetische Energie eines Körpers nicht ändern kann (die Kraft wirkt an senkrecht zum zurückgelegten Weg, und somit ist die Arbeit  $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$  gleich null), bleibt die kinetische Energie und somit auch der Betrag der Geschwindigkeit eines Teilchens in einem reinen Magnetfeld konstant.
2. Nach Gl. (1) ist der Vektor der Beschleunigung senkrecht zum Magnetfeld gerichtet. Die Geschwindigkeitskomponente in Richtung des Magnetfelds bleibt daher ungeändert.

Oft zerlegt man den Geschwindigkeitsvektor des Teilchens in zwei Anteile:  $\vec{v}_\perp$  senkrecht zum Magnetfeld und  $\vec{v}_\parallel$  parallel zum Magnetfeld (Abbildung 1). Die Aussagen (1) und (2) zusammengenommen besagen, dass im homogenen Magnetfeld sowohl  $\vec{v}_\parallel$  als auch der Betrag von  $\vec{v}_\perp$  konstant bleiben, solange ausschließlich die Lorentzkraft auf das Teilchen wirkt.

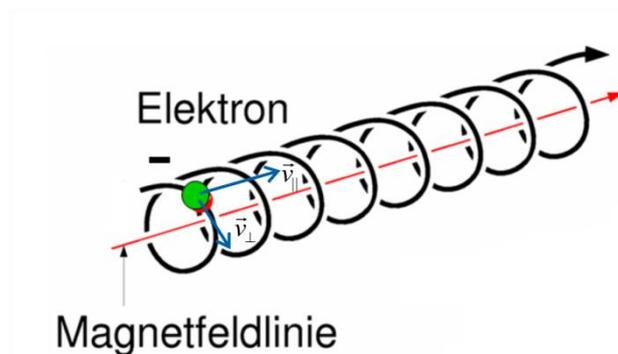


Abbildung 1: Schraubenbahn eines Elektrons im Magnetfeld

Welche Bewegungsform ergibt sich für ein geladenes Teilchen im Magnetfeld? Die wesentliche Überlegung ist bereits aus dem Versuch zur  $e/m$ -Bestimmung, einem Standardversuch der Oberstufe bekannt. Wie man experimentell im Fadenstrahlrohr zeigen kann, beschreiben geladene Teilchen im konstanten Magnetfeld der Helmholtz-Spulen kreisförmige Bahnen in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld. Die Lorentzkraft wirkt als Zentripetalkraft der Kreisbewegung. Es gilt:

$$\frac{mv^2}{r} = q \cdot v \cdot B \quad \text{bzw.} \quad \frac{v}{r} = \frac{q \cdot B}{m}. \quad (2)$$

Die Dauer eines Umlaufs kann man ermitteln, wenn man  $\omega = v/r$  als die Winkelgeschwindigkeit der Kreisbewegung identifiziert und die Relation  $\omega = 2\pi/T$  benutzt:

$$\omega = \frac{q \cdot B}{m} \quad \text{bzw.} \quad T = \frac{2\pi m}{q \cdot B}. \quad (3)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  wird auch als Zyklotron- oder Larmor-Frequenz bezeichnet.

Was der Versuch im Fadenstrahlrohr nicht zeigt: Besitzt das Elektron eine von null verschiedene Anfangsgeschwindigkeit  $\vec{v}_\parallel$  parallel zum Magnetfeld, so bleibt diese nach Folgerung (2) von oben unverändert, und es ergibt sich eine Schraubenlinie in Magnetfeldrichtung (Abbildung 1).

**Beispielaufgabe:** Die Stärke des interplanetaren Magnetfelds, d. h. des Magnetfelds im Sonnensystem außerhalb des direkten Einflusses der planetaren Magnetfelder liegt bei einigen Nanotesla (zum Vergleich: Die Stärke des Erdmagnetfelds beträgt in Deutschland etwa  $49 \mu\text{T}$ ). Der interplanetare Raum ist vom *Sonnenwind* erfüllt, der aus positiv geladenen Ionen (hauptsächlich Protonen) und Elektronen besteht. Betrachten Sie ein Sonnenwind-Proton, dessen Bahngeschwindigkeit  $\vec{v}_\perp$  auf der Kreisbahn  $50 \text{ km/s}$  beträgt und das sich im interplanetaren Magnetfeld  $B = 4 \text{ nT}$  bewegt. Berechnen Sie den Radius der Kreisbahn des Protons.

**Lösung:** Auflösen von Gl. (2) nach  $r$  und Einsetzen der im Text angegebenen Zahlenwerte ergibt:

$$r = \frac{v_\perp \cdot m}{q \cdot B} = \frac{50 \cdot 10^3 \text{ m/s} \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4 \cdot 10^{-9} \text{ T}} \approx 130 \text{ km.} \quad (4)$$

Der Radius der Schraubenlinie, die das Proton beschreibt, beträgt also über  $100 \text{ km}$ . Zum Vergleich: Der Erdradius beträgt  $6370 \text{ km}$ . Bei einer Kreisbahn-Geschwindigkeit von  $50 \text{ km/s}$  braucht das Proton etwa  $2 \text{ Sekunden}$ , um einen Umlauf der Schraubenlinie zu durchlaufen.

Die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen und der positiv geladenen Ionen in einem astrophysikalischen Plasma ist meist thermisch; man kann dem Plasma eine Temperatur zuordnen. Aus der kinetischen Gastheorie ist bekannt, dass die mittlere Geschwindigkeit bei der Temperatur  $T$  sich wie folgt abschätzen lässt ( $k_B$  ist die Boltzmann-Konstante):

$$\frac{1}{2}mv^2 \approx k_B T \Rightarrow v \approx \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}. \quad (5)$$

Schreibt man  $r = v/\omega$  und setzt Gleichungen (4) und (5) ein, so ergibt sich für den Radius der Schraubenbahn:

$$r = \frac{\sqrt{2mk_B T}}{q \cdot B}. \quad (6)$$

**Beispielaufgabe:** Vergleichen Sie die Bahnformen von Elektronen und Protonen des Sonnenwinds. Nehmen Sie eine Sonnenwindtemperatur von  $130\,000 \text{ K}$  und ein Magnetfeld von  $B = 4 \text{ nT}$  an.

**Lösung:** Einsetzen der Werte für Elektronen in Gl. (6) ergibt eine mittlere Geschwindigkeit  $v \approx 2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$  und den folgenden Radius der Schraubenbahn:

$$r = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} \cdot 130000 \text{ K}}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4 \cdot 10^{-9} \text{ T}} \approx 2,8 \text{ km.} \quad (7)$$

Die Protonen haben dagegen wegen ihrer höheren Masse eine wesentlich niedrigere Geschwindigkeit ( $v \approx 46 \text{ km/s}$ ), und der Radius der Schraubenbahn ist deutlich größer:  $r \approx 120 \text{ km}$ . Wegen des unterschiedlichen Ladungsvorzeichens von Elektronen und Protonen sind die Schraubenbahnen in entgegengesetzte Richtungen gewunden. In der Realität muss die Aufgabenstellung etwas abgewandelt werden, weil Elektronen und Protonen sich untereinander oft nicht im thermischen Gleichgewicht befinden und verschiedene Temperaturen aufweisen.

### 3. Driftbewegungen

Die bisherigen Überlegungen galten für ein räumlich konstantes Magnetfeld. Ändert sich das Magnetfeld von Ort zu Ort, sind vielfältigere Bewegungsformen möglich. Wir greifen nur ein besonders

leicht zu durchschauendes Beispiel heraus (einen ausführlichen Überblick über andere Formen der Driftbewegung gibt Kallenrode [6]).

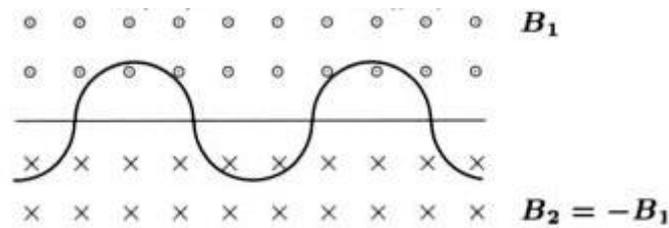


Abbildung 2: Driftbewegung eines geladenen Teilchens in aneinandergrenzenden Magnetfeldern entgegengesetzter Polarität (nach [6])

Wir stellen uns zwei Regionen mit gleich großen, aber entgegengesetzt gerichteten Magnetfeldern vor, die unmittelbar aneinander grenzen (Abbildung 2). Näherungsweise kommt eine solche Situation in der Umgebung der Sonnen-Äquatorialebene vor, wo die Polarität des interplanetaren Magnetfelds wechselt (in der sogenannten heliosphärischen Stromschicht). Die Lorentz-Kraft treibt ein positiv geladenes Teilchen, das in Abbildung 2 von links nach rechts läuft, in eine Linkskurve, die es in eine Region mit entgegengesetzt gerichtetem Magnetfeld führt. Dort kehrt sich das Vorzeichen der Lorentzkraft und damit auch die Krümmung der Bahn um. Insgesamt resultiert keine geschlossene Kreisbahn, sondern das Teilchen driftet entlang einer schlangenartig gewundenen Bahn. Auf diese Weise können große Entfernungen überwunden werden. Sehr komplexe und nahezu stochastische Bahnen können sich ergeben, wenn unterschiedlich große Regionen mit entgegengesetzter Polarität aneinandergrenzen (Abbildung 3). Die in der Abbildung gezeigte Bahn besteht aus Kreissegmenten, die allein durch die Wirkung der Lorentzkraft zustande kommen [7].

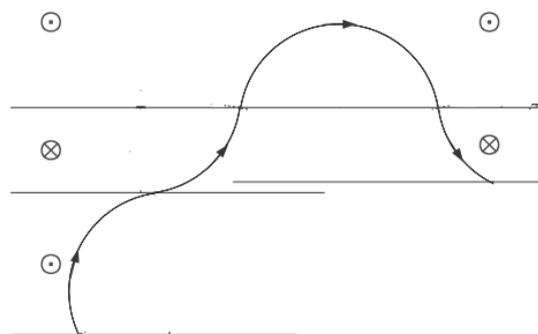


Abbildung 3: Schematische Darstellung der Bewegung eines positiv geladenen Teilchens durch eine Abfolge von Regionen unterschiedlicher Polarität mit wechselnder Breite. Derartige Strukturen kommen z. B. am äußeren Rand des Sonnensystems im sogenannten Heliosheath vor (nach [7]).

#### 4. Bewegung von Teilchen im van-Allen-Strahlungsgürtel

Driftbewegungen von geladenen Teilchen in magnetischen Feldern können durch eine ganze Reihe von Mechanismen verursacht werden [6]: durch zusätzlich vorhandene elektrische Felder (insbesondere senkrecht zum Magnetfeld stehende, ähnlich wie beim Wien-Filter), durch Gravitationsfelder oder durch inhomogene Magnetfelder. Der letztere Mechanismus ist auf interessante Weise in den van-Allen-Strahlungsgürteln der Erde realisiert, in denen Elektronen und Protonen im magnetischen Dipolfeld der Erde „gefangen“ sind.

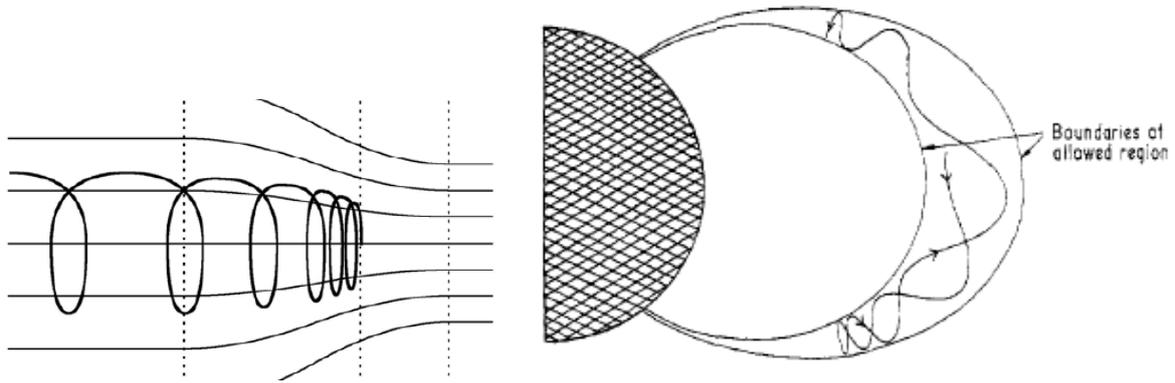


Abbildung 4: (a) Magnetischer Spiegel im inhomogenen Magnetfeld (links) und (b) seine Verwirklichung im van-Allen-Strahlungsgürtel (rechts). Nach [6] bzw. [8].

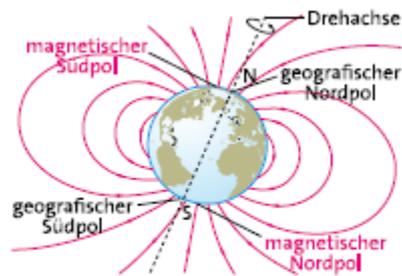


Abbildung 5: In der Umgebung der Erde (bis zu etwa 10 Erdradien) hat das Magnetfeld der Erde die Gestalt eines Dipolfeldes.

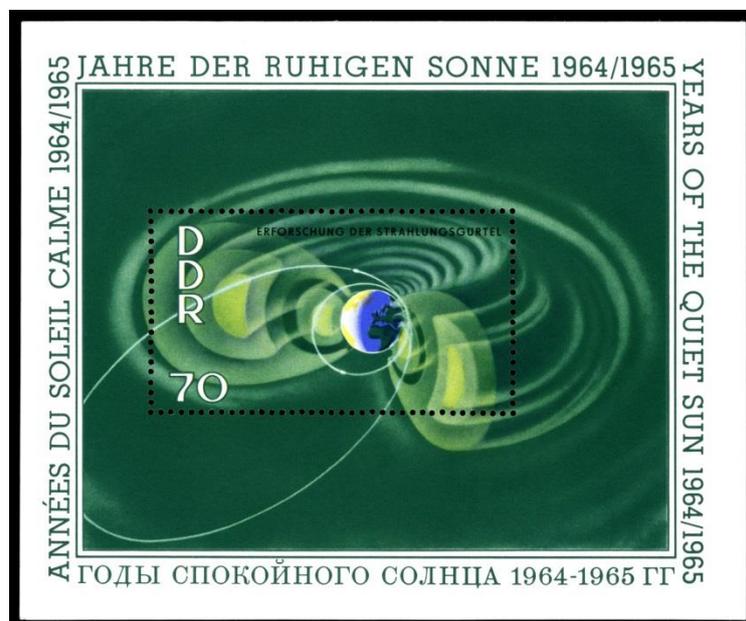


Abbildung 6: Briefmarkenblock der DDR mit den van-Allen-Strahlungsgürteln der Erde (hellgrün)



Abbildung 7: Wenn die Münzen tiefer in den Spendentrichter rollen, nimmt die Bahngeschwindigkeit – und damit auch die kinetische Energie der Kreisbewegung – zu (Foto: Saskia Bouten).

Die Existenz der van-Allen-Gürtel wurde in den 50er Jahren des 20. Jahrhunderts in einem Wechselspiel aus theoretischer und angewandter Forschung deutlich [8]. Zu dieser Zeit wurde intensiv an der kontrollierten Nutzung der Kernfusion zur Energiegewinnung geforscht. In diesem Zusammenhang wurden insbesondere „magnetische Spiegel“ und „magnetische Flaschen“ untersucht, bei denen inhomogene Magnetfelder zum Einschluss von Plasmen genutzt werden sollten.

Vor diesem Hintergrund wurden frühere Messungen, die mit Geiger-Müller-Zählrohren in Raketen durchgeführt worden waren, neu interpretiert. Die hohe Zahl an geladenen Teilchen, die man in gewissen Regionen („Gürteln“) um die Erde gefunden hatte, erklärte man sich nun durch den magnetischen Einschluss im inhomogenen Dipolfeld der Erde.

Das Prinzip des magnetischen Spiegels bzw. der magnetischen Flasche lässt sich am einfachsten mit einem Energie-Argument erklären. Folgerung (1) aus Abschnitt 2 bleibt auch im inhomogenen Magnetfeld richtig: Die kinetische Energie eines geladenen Teilchens kann durch ein Magnetfeld nicht geändert werden. Wir stellen uns nun eine Situation wie in Abbildung 4 (a) vor, wo die Magnetfeldlinien nach rechts zusammenlaufen, die Feldstärke in dieser Richtung also zunimmt. Nach Gl. (3) verringert sich die Umlaufdauer eines nach rechts laufenden Teilchens. Die Bahngeschwindigkeit der Kreisbewegung  $v_{\perp}$  nimmt zu, der Radius der Kreisbahn nimmt ab.<sup>1</sup> Wenn nun einerseits die gesamte

kinetische Energie des Teilchens  $\frac{1}{2}m(v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2)$  konstant bleibt und andererseits  $v_{\perp}$  zunimmt, so muss die Geschwindigkeitskomponente  $v_{\parallel}$  parallel zum Feld zwangsläufig abnehmen. Die Driftgeschwindigkeit  $v_{\parallel}$  eines in Abbildung 4 (a) nach rechts laufenden Teilchens wird immer geringer, bis sie schließlich null ist und die gesamte kinetische Energie auf die Kreisbewegung entfällt. Dies ist der Umkehrpunkt des magnetischen Spiegels; die Driftbewegung des Teilchens kehrt sich um, und es läuft nach links zurück.

Eine Analogie für die immer schneller werdende Kreisbewegung der geladenen Teilchen im inhomogenen Magnetfeld ist der Spendentrichter, der heutzutage in jedem Wissenschaftsmuseum zu finden ist. Weil die Münze dabei immer tiefer rollt und ihre potentielle Energie abnimmt, bleibt die kineti-

---

<sup>1</sup> Eine detaillierte Rechnung zeigt, dass das Verhältnis  $\frac{1}{2} \frac{mv_{\perp}^2}{B}$  näherungsweise konstant bleibt; man spricht von einer adiabatischen Invarianten.

sche Energie dabei allerdings grundsätzlich nicht konstant, und es gibt kein Analogon zur Spiegelbewegung – die Betreiber eines solchen Spendentrichters hätten daran auch kein Interesse.

Im Dipolfeld der Erde laufen die Feldlinien zusammen, wenn man sich dem Nord- oder Südpol nähert; das Magnetfeld wird zu den Polen hin stärker (vgl. Abbildung 5 und Abbildung 4 (b)). Damit sind für geladene Teilchen, die sich in diesem Bereich in Nord-Süd-Richtung bewegen, die Bedingungen für einen magnetischen Einschluss erfüllt. In Abbildung 4 (b) ist eine Teilchenbahn mit einer Reflexion eingezeichnet.

Die im Dipolfeld der Erde eingeschlossenen hochenergetischen Teilchen bilden die van-Allen-Gürtel der Erde. Es gibt zwei Gürtel, die die Erde torusförmig umschließen (hellgrün in Abbildung 6) und von Teilchen unterschiedlicher Masse gebildet werden. Der äußere Gürtel liegt zwischen 3 und 10 Erdradien und enthält hauptsächlich Elektronen, die mit Oszillationsperioden von 1-2 Sekunden zwischen den Umkehrpunkten oszillieren. Der innere Gürtel (0,2-2 Erdradien) wird hauptsächlich von Protonen bevölkert, deren Oszillationsperiode im Bereich von ca. 30 Sekunden liegt [9]. Beide driften auch in Äquatorrichtung um die Erde, die Protonen westwärts, die Elektronen ostwärts mit Umlaufzeiten im Stundenbereich.

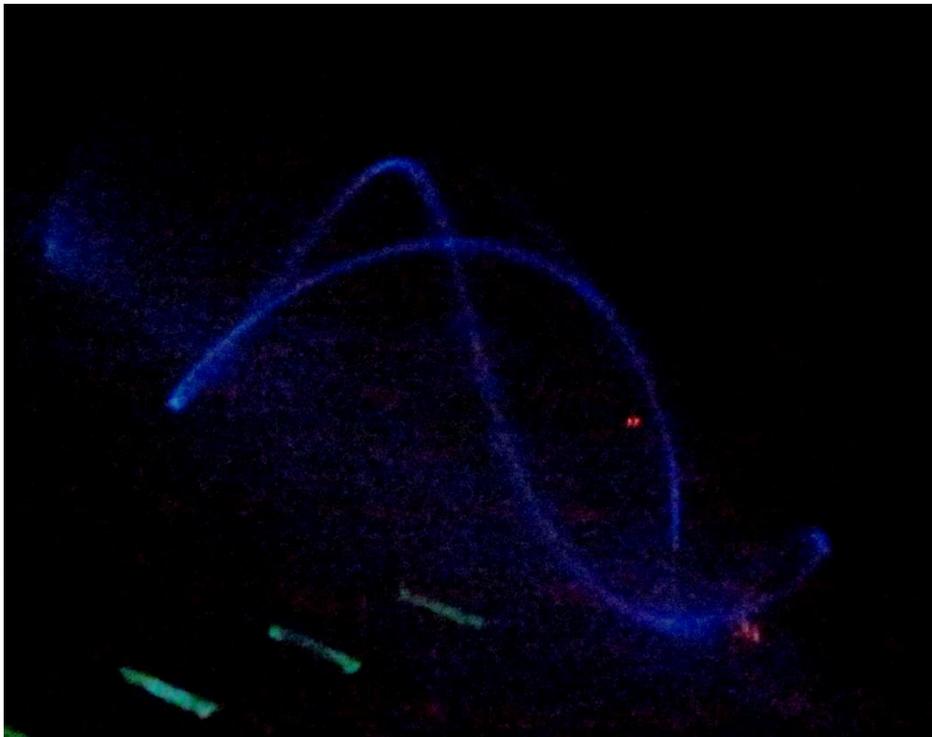


Abbildung 8: Magnetische Spiegel im Fadenstrahlrohr. Der Elektronenstrahl wird senkrecht nach oben emittiert (unten rechts von der Bildmitte). Im inhomogenen Feld zweier Stabmagnete kommt es zu zwei „Reflexionen“ an magnetischen Spiegeln, bevor der Strahl auseinanderläuft. Nach einer Idee aus [10], S. 244.

## 5. Magnetohydrodynamik

Nachdem wir die Bewegung einzelner Teilchen analysiert haben, kommen wir nun zur zweiten Beschreibungsebene für ein Plasma: der *Magnetohydrodynamik* (MHD). Wie bereits in Abschnitt 1 erwähnt, beschäftigt sie sich mit der Bewegung des Plasmas als Ganzem. Die Beschreibung erfolgt in einem größeren Maßstab als zuvor: Von der Bewegung der Einzelteilchen wird abgesehen, es wird darüber gemittelt. Elektronen und positive Ionen werden als ein einheitliches „Fluid“ betrachtet, das hydrodynamisch beschrieben wird (z. B. [11]). Da es im Plasma gleich viele Elektronen wie positive Ionen gibt, ist das Fluid insgesamt elektrisch neutral.

Als wesentlicher Unterschied kommt hinzu: Das Magnetfeld wird nicht mehr als vorgegeben angesehen, es wird selbst zur dynamischen Größe. Das bedeutet: Magnetfeld und Teilchenbewegung bedingen sich gegenseitig, die Physik wird komplizierter.

Der Zugang zur MHD fällt leichter, wenn man zuerst ihre primären physikalischen Größen identifiziert, d. h. die eigentlichen dynamischen Variablen, aus denen alle anderen hergeleitet werden können. Etwas anders, als man es aus den „gewohnteren Bereichen“ der Physik kennt, sind dies:

1. die hydrodynamischen Größen des neutralen Plasmas; Dichte  $\rho(\vec{x}, t)$ , Druck  $p(\vec{x}, t)$  und Geschwindigkeit  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ ,
2. das Magnetfeld  $\vec{B}(\vec{x}, t)$  als primäre elektromagnetische Größe.

Der zweite Punkt unterscheidet die Plasmaphysik zum Beispiel von der Physik der Stromkreise. Dort ist das elektrische Feld (die Spannung) vorgegeben, der elektrische Strom stellt sich ein und erzeugt ein magnetisches Feld. In der Plasmaphysik ist es umgekehrt: Das Magnetfeld spielt die Hauptrolle, elektrische Felder und Ströme stellen sich ein.

Die elektrische Stromdichte, die vorwiegend auf die leichtere Elektronenkomponente des Plasmas zurückgeht, stellt sich so ein, dass das ampèresche Durchflutungsgesetz erfüllt ist. In seiner stationären Variante (d. h. ohne zeitveränderliche elektrische Felder) lautet es:

$$\vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \quad (8)$$

( $\mu_0$  ist die magnetische Feldkonstante). Es ist das gleiche Gesetz, mit dem man z. B. auch das Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Draht berechnet, aber es wird in der Plasmaphysik in anderer Richtung gelesen: Das Magnetfeld erzeugt den elektrischen Strom.

Begleitend zum elektrischen Strom verursacht das Magnetfeld auch ein elektrisches Feld in einem mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  strömenden Plasma. Die Argumentation ist ähnlich wie bei der Herleitung des Hall-Effekts ([10], S. 237): In einem leitenden Körper, der sich durch ein Magnetfeld bewegt, verursacht die Lorentz-Kraft so lange eine Ladungstrennung, bis sich ein Kräftegleichgewicht zwischen der Lorentzkraft und dem durch die Ladungstrennung entstehenden elektrischen Feld einstellt ([12], S. 76). Mathematisch lässt sich dieser Zusammenhang wie folgt formulieren: Das ohmsche Gesetz, das den Zusammenhang zwischen der Stromdichte  $\vec{j}$  und dem elektrischen Feld  $\vec{E}$  (bzw. der Potentialdifferenz) herstellt, lautet unter Berücksichtigung der Lorentzkraft:

$$\vec{j} = \sigma (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (9)$$

( $\sigma$  bezeichnet die elektrische Leitfähigkeit). Aufgelöst nach  $\vec{E}$  ergibt sich:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \vec{j} - \vec{v} \times \vec{B}. \quad (10)$$

Wenn man für  $\vec{j}$  den Ausdruck (8) einsetzt, erhält man eine Relation, in der das elektrische Feld als Funktion des Magnetfelds allein ausgedrückt wird:

$$\vec{E} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} - \vec{v} \times \vec{B}. \quad (11)$$

Für ein ideal leitendes Plasma geht die Leitfähigkeit  $\sigma \rightarrow \infty$ , und es ergibt sich die einfache Beziehung:

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B}. \quad (12)$$

Die Dynamik des Magnetfelds ergibt sich aus dieser Gleichung, die in das faradaysche Induktionsgesetz

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (13)$$

eingesetzt wird. Auch das Induktionsgesetz wird in der Plasmaphysik in anderer Richtung gelesen: Anders als in der Stromkreis-Physik verursacht ein veränderliches Magnetfeld nicht eine Spannung, sondern das elektrische Feld aus Gl. (12) führt zu einer Änderung des Magnetfelds:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{v} \times \vec{B}). \quad (14)$$

Diese Gleichung wird als die *Induktionsgleichung* für ein ideal leitendes Plasma bezeichnet. Sie ist in der Plasmaphysik die dynamische Gleichung für das Magnetfeld. Sie ist zentral für das Verständnis von Phänomenen wie z. B. die Dynamoprozesse im Erdkern und in der Astrophysik.

## 6 Eingefrorene Magnetfeldlinien

Bei ideal leitenden Plasmen tritt eine Besonderheit auf, die die gekoppelte Dynamik von Plasma und Magnetfeld einfacher und anschaulicher macht: die im Plasma „eingefrorenen“ Feldlinien. Mit dieser etwas metaphorischen Sprechweise, die manchmal dafür kritisiert wird, dass sie leicht zu Missverständnissen Anlass gibt, ist Folgendes gemeint: Wenn zwei Punkte im Plasma zu einer Zeit auf derselben Feldlinie liegen, so gilt dies auch zu jedem späteren Zeitpunkt. Das Magnetfeld bewegt sich mit dem Plasma, als ob es darin „eingefroren“ ist – und umgekehrt.

Mit den Mitteln der Vektor-Differentialgeometrie kann man diese auf Alfvén zurückgehende Erkenntnis mit einer relativ kurzen Rechnung aus Gl. (14) zeigen; der Beweis ist physikalisch jedoch wenig erhellend. Alfvén selbst argumentierte mit der Erzeugung von Wirbelströmen (eddy currents), die die relative Bewegung von Magnetfeld und Leiter ähnlich bremsen wie in dem bekannten Versuch mit dem Neodym-Magnet, der durch ein Kupferrohr fällt:

“Suppose that we have a homogeneous magnetic field in a perfectly conducting fluid... . In view of the infinite conductivity, every motion (perpendicular to the field) of the liquid in relation to the lines of force is forbidden because it would give infinite eddy currents. Thus the matter of the liquid is "fastened" to the lines of force...” (zit. nach [13]).

Die Metapher von den „eingefrorenen Magnetfeldlinien“ verdeutlicht, dass sich das ideal leitende Plasma und die Magnetfeldlinien nur gemeinsam bewegen können. Wenn eines von beiden durch äußere Ursachen in Bewegung versetzt wird, bewegt sich das andere zwangsläufig mit.

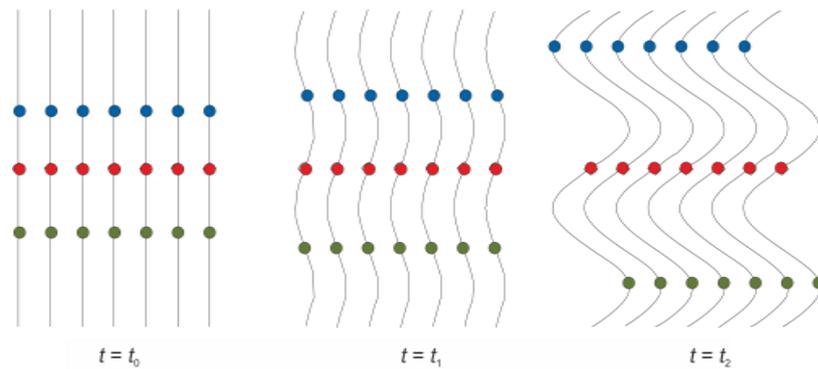


Abbildung 9: "Eingefrorene Magnetfeldlinien" in einem ideal leitenden Plasma: Wenn zwei Punkte im Plasma zu einer Zeit auf derselben Feldlinie liegen, gilt dies auch zu jedem späteren Zeitpunkt.

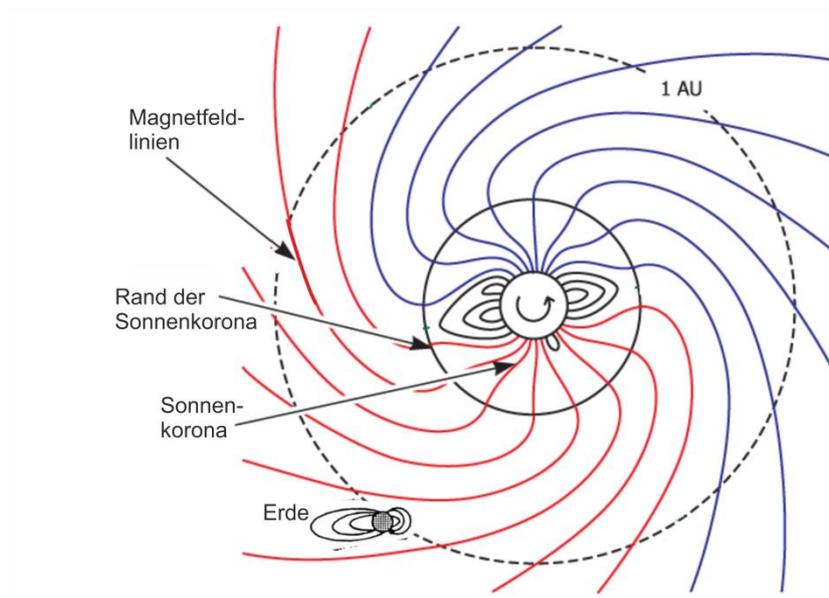


Abbildung 10: Großräumige Struktur des interplanetaren Magnetfeldes im Sonnensystem (nicht maßstäblich). Nach [solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2013-5](http://solarphysics.livingreviews.org/Articles/lrsp-2013-5) und [ned.ipac.caltech.edu/level5/March03/Vallee2/Vallee3\\_2.html](http://ned.ipac.caltech.edu/level5/March03/Vallee2/Vallee3_2.html).

**Beispielaufgabe Spiralstruktur im interplanetaren Magnetfeld:** Die vom Rand der Sonnenkorona ausgehenden Ströme aus geladenen Teilchen (hauptsächlich Protonen und Elektronen) bezeichnet man als Sonnenwind. Der Sonnenwind ist insgesamt neutral; es handelt sich also um ein Plasma. Weil man sich die Magnetfeldlinien des Sonnenmagnetfelds als im Plasma „eingefroren“ vorstellen kann, werden sie vom Sonnenwind nach außen „mitgeschleppt“. Ähnlich wie bei einem Wassersprinkler wird der Sonnenwind radial nach außen abgestrahlt, während sich die Sonne mit einer Umlaufzeit von 25 Tagen um ihre Achse dreht. Erläutern Sie, wie auf diese Weise eine großräumige Spiralstruktur im (interplanetaren) Magnetfeld der Sonne entsteht (Abbildung 10).

**Lösung:** Die Spiralstruktur des solaren Magnetfelds lässt sich mit einem einfachen Modell verstehen. Wir stellen uns eine Stelle in der Sonnenkorona vor, die nach jeweils gleichen Zeitabständen  $n \cdot \Delta t$  ein „Sonnenwind-Paket“ ausstößt. Zwischen zwei Paketen dreht sich die Sonne um den Winkel  $\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t$  weiter. Abbildung 11 zeigt die Bahnen der ausgestoßenen Pakete, die sich geradlinig nach mit der Geschwindigkeit  $v$  außen bewegen.

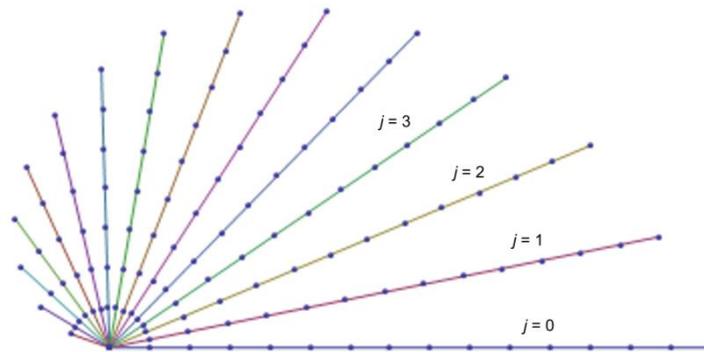


Abbildung 11: Geradlinige Bahnen der nacheinander ausgestoßenen „Sonnenwind-Pakete“ (Punkte mit gleichem  $j$  verbunden).

Wenn man die Sonnenwind-Pakete in der Reihenfolge ihres Ausstoßes mit der Variablen  $j$  durchnummeriert, ergibt sich ihre Position nach  $n$  Zeitschritten aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_j(n \cdot \Delta t) &= v \cdot (n - j) \cdot \Delta t \cdot \cos(j \cdot \omega \cdot \Delta t), \\ y_j(n \cdot \Delta t) &= v \cdot (n - j) \cdot \Delta t \cdot \sin(j \cdot \omega \cdot \Delta t). \end{aligned} \quad (15)$$

Die Winkelfunktionsterme beschreiben das Weiterdrehen der Sonne zwischen dem Ausstoß zweier Pakete, während die Vorfaktoren die geradlinige Ausbreitung mit der Geschwindigkeit  $v$  wiedergeben.

Das Magnetfeld ist nach dem Alfvén-Theorem im Plasma „eingefroren“. Durch die radiale Bewegung des Sonnenwindes wird deshalb eine Magnetfeldlinie von ihrem Ursprungsort in der Sonnenkorona „nach außen gezogen“. Um den Verlauf einer Magnetfeldlinie zu einem bestimmten Zeitpunkt zu ermitteln, muss man die momentanen Orte der vom gleichen Ursprungsort ausgehenden Sonnenwindpakete verbinden. Das Resultat ist in Abbildung 12 gezeigt. Es zeigt „Schnappschüsse“ derselben Magnetfeldlinie zu verschiedenen Zeitpunkten. Die Sonnenwindpakete wandern immer weiter nach außen, wobei sich die Sonne gleichzeitig weiter dreht und der betrachtete Ursprungspunkt neue Pakete ausstößt, die auf der gleichen Magnetfeldlinie liegen. Für die Gestalt der Magnetfeldlinien ergibt sich auf diese Weise eine Spirale, und in der Tat ist Gl. (15), als Funktion von  $j$  betrachtet, die Parameterdarstellung einer archimedischen Spirale. Die Spiralstruktur des solaren Magnetfeldes wurde 1958 von Parker vorhergesagt, sie wird daher oft als Parker-Spirale bezeichnet.

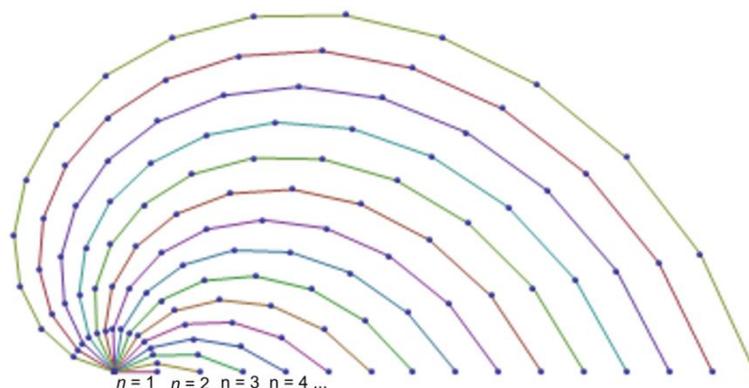


Abbildung 12: Momentaufnahmen einer Magnetfeldlinie zu verschiedenen Zeitpunkten. Die Abbildung zeigt die gleichen Punkte wie Abbildung 11; nun aber sind Punkte mit gleichem  $n$  verbunden, d. h. verschiedene Pakete, die auf der gleichen Magnetfeldlinie liegen, zu unterschiedlichen Zeitpunkten  $n \cdot \Delta t$ .

- [1] Kusserow, U. v. (2002). Vom technischen Generator zum selbsterregten kosmischen Dynamo. In: CD zur Frühjahrstagung des Fachverbandes Didaktik der Physik DPG in Leipzig.
- [2] Herrman, F. & Vorbach, T (2003). Der Geodynamo. PdN/PhiS 6/52, S. 33-38.
- [3] Kusserow, U. v & Mikelskis, H. F. (2004). Weltraumwetter – Unterricht über Kosmische Magnetfelder. In: Pitton, A. (Hrsg.): Chemie- und physikdidaktische Forschung und naturwissenschaftliche Bildung. Münster: Lit, S. 197-199.
- [4] Uhlmann, S., & Priemer, B. (2010). Das Experiment in Schule und Wissenschaft – ein „Nature of Science“-Aspekt explizit in einem Projekt im Schülerlabor. PhyDid B.
- [5] Uhlmann, S., Bisping, V., & Priemer, B. (2010). Spektroskopieversuche mit der Plasmakugel. PhyDid B.
- [6] Kallenrode, M. B. (2010). Space physics: an introduction to plasmas and particles in the heliosphere and magnetospheres, 3<sup>rd</sup> Edition. Springer: Berlin.
- [7] Florinski, V. (2011). On the transport of cosmic rays in the distant heliosheath. Advances in Space Research 48, S. 308–313.
- [8] Elliot, H. (1963). The van Allen Particles. *Rep. Prog. Phys.* **26**, 145
- [9] H. O. Rucker (2001), Planetenmagnetosphären. In: Bergmann, Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 7, 2. Auflage. Berlin: de Gruyter.
- [10] Grehn, J. & Krause, J. (Hrsg.)(2007): Metzler Physik, Braunschweig: Schroedel.
- [11] Kegel, W. H. (1998). Plasmaphysik. Eine Einführung. Berlin: Springer.
- [12] Alfvén, H. (1950). Cosmic electrodynamics. Oxford: Clarendon Press.
- [13] Roberts, P. H. (2007). Alfvén's Theorem and the Frozen Flux Approximation. In: Gubbins, D., & Herrero-Bervera, E. (Hrsg.). Encyclopedia of geomagnetism and paleomagnetism. Dordrecht: Springer, S. 7-11.