Mechanische Probleme mit System lösen

Rainer Müller,
Physikdidaktik, TU Braunschweig
Bienroder Weg 82, 38106 Braunschweig

1. Einleitung

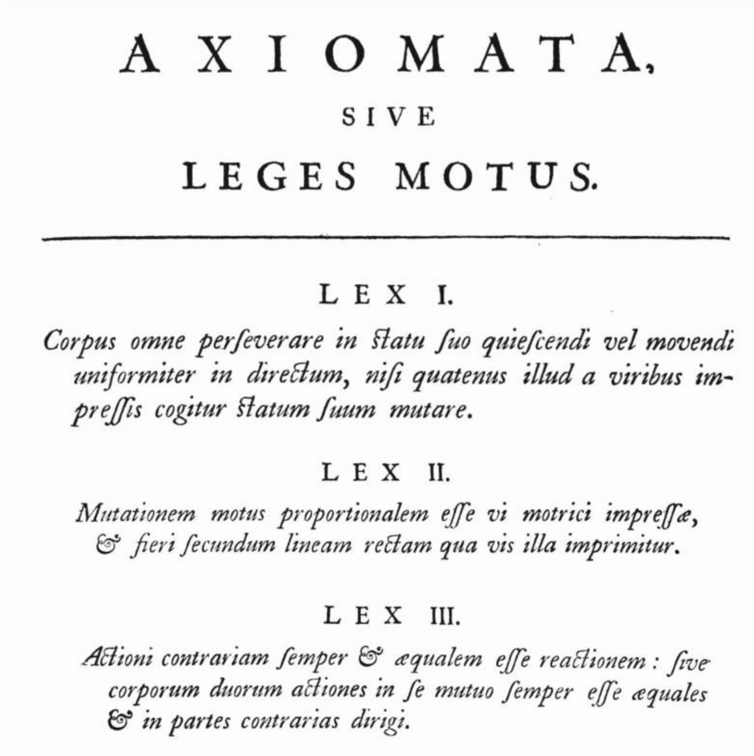
Unter den klassischen Disziplinen der Physik ist die Mechanik strukturell die einfachste. Ihre Begriffe sind klar gebildet, und ihre Grundgesetze, die newtonschen Gesetze, lassen sich in wenigen Zeilen aufschreiben. Und doch zeigt die fachdidaktische Forschung, dass es beträchtliche Lernschwierigkeiten in der Mechanik gibt (einen Überblick geben die entsprechenden Kapitel in [1] und die Artikel [2,3]). Lehrkräfte empfinden den Mechanikunterricht als eine anspruchsvolle Aufgabe, und Untersuchungen belegen, dass es mit den traditionellen Unterrichtskonzepten, die in den Schulbüchern meist dargestellt werden, nur unzureichend gelingt, den Schülerinnen und Schülern die Grundvorstellungen der klassischen Mechanik zu vermitteln.

Die Ursachen für die mangelnde Effizienz des traditionellen Mechanikunterrichts wurden in der Forschung detailliert untersucht. Eine entscheidende Rolle spielen die Lernschwierigkeiten, die durch vorunterrichtliche Vorstellungen der Schülerinnen und Schüler bedingt werden. Diese Alltagsvorstellungen, die mit den zu lernenden physikalischen Vorstellungen nicht übereinstimmen, erweisen sich als sehr hartnäckig. Für die Schülerinnen und Schülern stellen sie eine große Hürde auf dem Weg zu den physikalischen Konzepten dar [1].

Unterricht, der von Schülervorstellungen und Lernschwierigkeiten ausgeht und sie im Lernprozess der Schülerinnen und Schüler durch eine angepasste Gliederung der Sachstruktur berücksichtigt, hat sich als sehr erfolgreich erwiesen. Ein Beispiel ist der zweidimensionale Zugang zur Mechanik von Wiesner et al. [4–6], in dem der vektorielle Charakter der Geschwindigkeit frühzeitig herausgearbeitet und der Begriff der Beschleunigung über Zusatzgeschwindigkeiten eingeführt wird.

Die erste Bedingung für erfolgreichen Mechanikunterricht ist somit eine Sachstruktur, die an den Lernvoraussetzungen der Schülerinnen und Schüler orientiert ist. Dies vorausgesetzt, kann man den Unterricht weiter verbessern, indem man auf bewährte Strategien zur Lösung mechanischer Problemen zurückgreift. Um diese Strategien, mit denen man Aufgaben aus der Mechanik „mit System" lösen kann, soll es in diesem Artikel gehen. Zentral ist ein einfacher Gedanke: In einer systematischen Abfolge von Schritten zur Problemlösung verschafft man sich zunächst Klarheit über das System, das man der Betrachtung zugrunde legen will und identifiziert sodann die am System angreifenden Kräfte, die für die Bewegung maßgeblich sind.

In den Lehrbüchern für Ingenieure ist dieses Verfahren als das „Freistellen" oder „Freischneiden" eines Bauteils bekannt. Es ist der erste Schritt bei Berechnungen in der Technischen Mechanik [7]. Auch in der englischsprachigen Literatur steht in der Regel das Erstellen eines „free-body diagram" am Anfang der Problemlösung [8]. Eigenartigerweise kennt die deutsche Lehrtradition in der Physik ein vergleichbar einfaches und systematisches Verfahren zur Problemlösung normalerweise nicht – weder in den Schulbüchern noch in den Universitäts-Lehrbüchern. Daher soll diese Lösungsstrategie für mechanische Probleme im Folgenden anhand von Beispielen beschrieben werden. Die Darstellung und die gewählten Beispiele orientieren sich dabei zum großen Teil an meinem Lehrbuch „Klassische Mechanik – vom Weitsprung zum Marsflug" [9], in dem die einzelnen Themen noch ausführlicher und differenzierter dargestellt sind.



AXIOMATA,

SIVE

LEGES MOTUS.

LEX I.

Corpus omne perſeverare in ſtatu ſuo quieſcendi vel movendi uniformiter in directum, niſi quatenus illud a viribus impreſſis cogitur ſtatum ſuum mutare.

LEX II.

Mutationem motus proportionalem eſſe vi motrici impreſſæ, & fieri ſecundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

LEX III.

Actioni contrariam ſemper & æqualem eſſe reactionem: ſive corporum duorum actiones in ſe mutuo ſemper eſſe æquales & in partes contrarias dirigi.

Abbildung 1: Newtons Formulierung seiner Bewegungsgesetze

2. Eine systematische Lösungsstrategie Probleme der Mechanik

Newton gab der Mechanik ihre Grundlage in Form von drei „Axiomen oder Gesetzen der Bewegung" (Abbildung 1). Sie enthalten kurz und prägnant die Gesetzmäßigkeiten der Bewegung von Körpern. Vor der Anwendung der Gesetze auf konkrete Probleme steht allerdings der Prozess der Modellbildung, in dem man die Probleme so aufbereitet, dass sich der newtonsche Formalismus anwenden lässt. Die im Folgenden beschriebene Lösungsstrategie für mechanische Probleme kann man als ein systematisches Verfahren zur Modellbildung auffassen.

Zunächst formulieren wir die Strategie in einer rezeptartigen Abfolge von Schritten, um dann anhand von mehreren Beispielen den Sinn der einzelnen Schritte zu erläutern und die Anwendung des Verfahrens zu illustrieren.

Schritt 1: System identifizieren

Am Anfang der Problembearbeitung fertigt man eine Skizze an, in der alle beteiligten Körper dargestellt werden. Davon ausgehend muss das System identifiziert werden, das man betrachten möchte. Diejenigen Körper, an deren Bewegung man interessiert ist, werden durch eine imaginäre Grenzfläche von ihrer Umgebung abgegrenzt. Die Systemgrenzen werden in die Skizze eingezeichnet, z. B. mit einer gestrichelten Linie. Das „Systeminnere", d. h. die Körper, die sich im Inneren der Systemgrenzen befinden, wird in einer zweiten Skizze gesondert dargestellt.

Die Wahl der Systemgrenzen ist ein rein gedanklicher Prozess. Die Systemgrenzen existieren nur auf dem Papier. Beim Bestimmen ihres Verlaufs ist man frei. Es gibt keine Vorschrift für die Festlegung der Systemgrenzen. Wie wir noch sehen werden, hängen die Kräfte, die in die newtonsche Bewegungsgleichung einzusetzen sind, von der Wahl der Systemgrenzen ab. Es gibt daher mehr oder weniger geschickte Grenzverläufe. Durch die zweckmäßige Wahl der Systemgrenzen kann man sich manchmal die Lösung eines Problems erleichtern.

Schritt 2: Äußere Kräfte identifizieren

Im zweiten Schritt werden die äußeren Kräfte identifiziert. Das sind alle diejenigen Kräfte, die *von außen* am System angreifen, die also über die Systemgrenzen hinweg auf die Körper im Inneren der Systemgrenzen wirken. Innere Kräfte, die zwischen den verschiedenen Bestandteilen des Systems wirken, werden *nicht* berücksichtigt. Auch die Kräfte, die das System *auf andere Körper* ausübt, die also die Systemgrenzen von innen nach außen übergreifen, werden nicht berücksichtigt.

Die äußeren Kräfte werden als Kraftpfeile in die zweite Skizze eingezeichnet. Damit hat man das System *freigestellt*. Alles, was außerhalb der Systemgrenzen liegt, ist nur noch durch die Kräfte repräsentiert, die über die Systemgrenzen hinweg wirken. Die Modellbildung ist damit abgeschlossen und wir können die newtonsche Bewegungsgleichung anwenden.

Um einem Missverständnis vorzubeugen: Es gibt keinen prinzipiellen Unterschied in der Natur der äußeren und inneren Kräfte. Sie unterscheiden sich nur darin, dass sie über Systemgrenzen hinweg wirken oder nicht. Ändert man die Systemgrenzen, können dadurch äußere zu inneren Kräften werden und umgekehrt.

Schritt 3: Bewegungsgleichung aufstellen und lösen

In der newtonschen Bewegungsgleichung $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ steht das $\vec{F}$ für die Gesamtkraft, d. h. für die Vektorsumme aller äußeren Kräfte. Alle äußeren Kräfte, die in unserer Skizze am freigestellten System angreifen, werden daher nun vektoriell zur Gesamtkraft addiert. Die Bewegungsgleichung

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

kann nun explizit aufgeschrieben und gelöst werden. Die Lösung beschreibt die Bewegung des *Schwerpunkts* aller im System zusammengefassten Körper. Diese Aussage ist auch für ausgedehnte Systeme in Strenge richtig. Die oftmals aus Unsicherheit vorgenommene Beschränkung auf „Punktmassen" ist bei der hier beschriebenen Vorgehensweise nicht erforderlich.

3 Ein einfaches Beispiel: Münchhausen und sein Zopf

Betrachten wir zur Illustration des Lösungsverfahrens ein einfaches Beispiel. Wir nehmen uns ein Problem vor, dessen Lösung bei unsystematischer Herangehensweise vielen Lernenden Schwierigkeiten bereitet. Wir greifen die bekannte Geschichte vom Baron Münchhausen auf, der sich angeblich mitsamt seinem Pferd am Zopf aus dem Sumpf gezogen hat (Abbildung 2). Wir möchten mit den newtonschen Gesetzen begründen, warum wir die Erzählung für eine Lügengeschichte halten.

Intuitiv ist klar, dass Münchhausen sich nicht selbst aus dem Sumpf ziehen kann. Wenn es aber an die Begründung geht, scheitert die Argumentation oftmals daran, dass die Kräfteverhältnisse in komplexeren Situationen nicht einfach zu überblicken sind. Die oben beschriebene schrittweise Vorgehensweise hilft hier weiter.

Schritt 1:

Die Skizze der Gesamtsituation ist in Abbildung 2 links zu sehen. Es gibt mehrere Möglichkeiten für die Wahl der Systemgrenzen. Wir wollen zwei davon näher betrachten:

(a) Das System enthält Münchhausen zusammen mit seinem Pferd.
(b) Das System besteht nur aus Münchhausens Kopf (Abbildung 2 rechts).

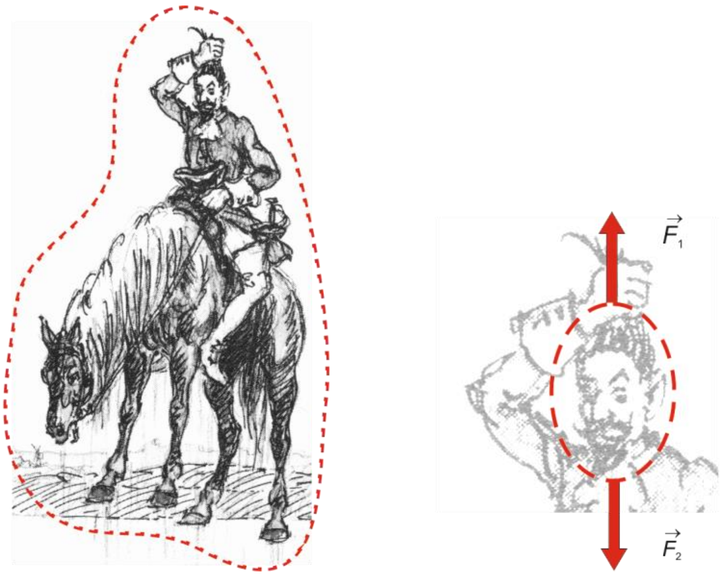


Abbildung 2: Warum kann sich Baron Münchhausen nicht an seinem Zopf aus dem Sumpf ziehen?

Schritt 2:

Im zweiten Schritt sind die äußeren Kräfte zu identifizieren. Je nach Wahl der Systemgrenzen erhalten wir unterschiedliche Ergebnisse. Die Schwerkraft (in beiden Fällen eine äußere Kraft) soll dabei außer Acht bleiben. Auch schon ohne die Schwerkraft kann sich Münchhausen nicht durch Ziehen am eigenen Zopf beschleunigen.

(a) System = Münchhausen mit Pferd: Die Kraft, mit der Münchhausen an seinem Zopf zieht, ist in diesem Fall eine innere Kraft, die nicht berücksichtigt wird. Innere Kräfte beeinflussen die Schwerpunktsbewegung nicht. Mit inneren Kräften kann sich selbst ein Lügenbaron nicht aus dem Sumpf ziehen.

(b) System = Münchhausens Kopf: Bei dieser Wahl der Systemgrenzen ist die Zopfkraft eine äußere Kraft, weil sie über die Systemgrenzen hinweg wirkt (Abbildung 2 rechts). Es gibt nun allerdings auch noch eine zweite äußere Kraft, nämlich die Kraft, die Münchhausens Hals auf den Kopf ausübt. Aufgrund der festen Verbindung zwischen Kopf und Hals ist sie gleich groß und entgegengesetzt gerichtet wie die Zopfkraft. Insgesamt herrscht am System „Kopf" daher Kräftegleichgewicht. Die Gesamtkraft ist null, der Kopf bleibt unbeschleunigt.

Obwohl die beiden unterschiedlichen Systemgrenzenverläufe zu ganz verschiedenen Argumentationsmustern führen (keine äußeren Kräfte im einen Fall, Kräftegleichgewicht im anderen Fall), gelangt man mit beiden zum gleichen Ergebnis: Der Baron lügt.

4 Schieben einer Kiste

Sehen wir uns ein weiteres, etwas komplizierteres Beispiel an: Ein Arbeiter soll eine schwere Holzkiste über den Boden schieben. Wieder gehen wir nach dem oben beschriebenen Schema vor.

Schritt 1:

Die Skizze mit allen beteiligten Körpern (Kiste, Boden und Arbeiter) ist in Abbildung 3 gezeigt. Für den Verlauf der Systemgrenzen gibt es im Wesentlichen zwei Möglichkeiten: (1) Die Kiste allein, ohne den Arbeiter, bildet das System, (2) Arbeiter und Kiste bilden zusammen das System. Wenn wir die erste Möglichkeit wählen, verlaufen die Systemgrenzen so wie in Abbildung 3 dargestellt.

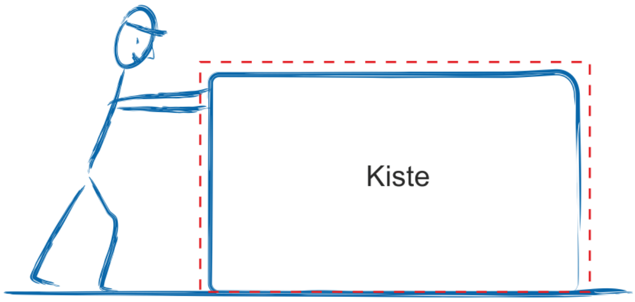


Abbildung 3: Systemgrenzen beim Schieben einer Kiste

Schritt 2:

Nun werden die äußeren Kräfte identifiziert. Die folgenden vier Kräfte wirken von außen über die Systemgrenzen hinweg auf das System „Kiste“:

1. die „Schiebekraft“ $\vec{F}_{\mathrm{S}}$, die der Arbeiter auf die Kiste ausübt,
2. die Gewichtskraft $\vec{F}_{\mathrm{G}}$, die die Erde über die Gravitationsanziehung auf die Kiste ausübt,
3. die Normalkraft $\vec{F}_{\mathrm{N}}$, die vom Boden auf die Kiste wirkt,
4. und schließlich die Reibungskraft $\vec{F}_{\mathrm{R}}$, die ebenfalls vom Boden auf die Kiste wirkt.

Erfahrungsgemäß fällt es Lernenden schwer, zu identifizieren, *von welchen Körpern* die jeweiligen Kräfte ausgeübt werden. Bei der obigen Aufzählung wurde dies daher jeweils mit angegeben. Die Normalkraft ist übrigens nicht die Gegenkraft zur Gewichtskraft (das ist die Gravitationskraft, mit der die Kiste die Erde anzieht). Sie ist die Gegenkraft zur gleich großen Kraft, die die Kiste auf den Boden ausübt. Der Boden drückt entsprechend zurück.

Die Normalkraft und die Reibungskraft ließen sich im Grunde vektoriell zu einer „Gesamtkraft des Bodens auf die Kiste“ zusammenfassen, von der sie die Komponenten sind. Dies wird jedoch kaum jemals getan, da sich Gesetzmäßigkeiten für den Betrag und die Richtung nicht für die Gesamtkraft, sondern nur für die Komponenten angeben lassen.

Die vier Kräfte werden nun wie in Abbildung 4 in eine Skizze eingezeichnet. Damit ist das System „Kiste“ freigestellt.

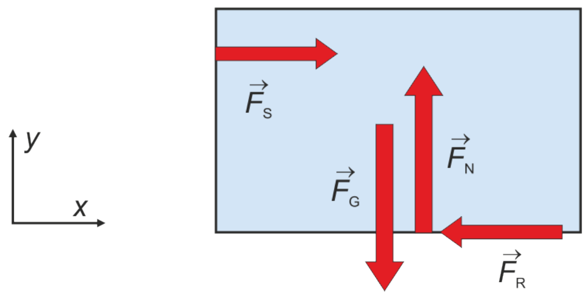


Abbildung 4: Die freigestellte Kiste

Schritt 3:

Wenn alle am System angreifenden Kräfte identifiziert sind, wird die Bewegungsgleichung aufgestellt und gelöst. Weil die newtonsche Bewegungsgleichung eine Vektorgleichung ist, können wir *x*- und *y*-Richtung getrennt betrachten. In *x*-Richtung wirken Schiebe- und Reibungskraft:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_\mathrm{S} - F_\mathrm{R} \tag{1}$$

In *y*-Richtung wirken Normal- und Gewichtskraft:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_\mathrm{N} - F_\mathrm{G} = 0 \tag{2}$$

Wir wissen, dass in y-Richtung keine Bewegung der Kiste stattfindet, da sich Gewichtskraft und Normalkraft gerade kompensieren. Es herrscht Kräftegleichgewicht.

Bei der Bewegung in *x*-Richtung gibt es zwei Möglichkeiten:

a) $F_S > F_\mathrm{R}$: Die Schiebekraft ist größer als die Reibungskraft. In diesem Fall ist rechte Seite von Gl. (1) positiv. Die Kiste wird nach rechts beschleunigt.
b) $F_S = F_\mathrm{R}$: Es herrscht Kräftegleichgewicht. Die rechte Seite von Gl. (1) hat den Wert null und die Geschwindigkeit der Kiste ändert sich nicht. Sie ist entweder in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

Damit ist das Problem im Prinzip gelöst. Wenn man konkrete Werte für F_S und F_R hat, kann man die Bewegungsgleichung (1) auch quantitativ lösen.

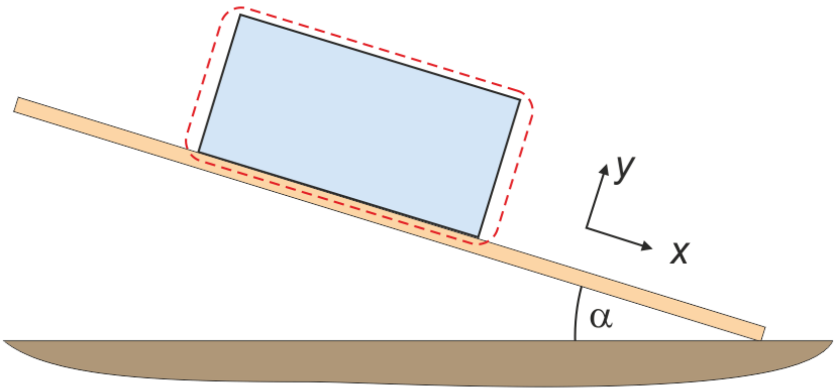


Abbildung 5: Schiefe Ebene

5 Schiefe Ebene

Die oftmals unübersichtlichen Kräfteverhältnisse an der schiefen Ebene werden durch das systematische Lösungsverfahren überschaubarer. Es handelt sich um eine Variante der Kistenaufgabe, bei der aufgrund der Neigung der Ebene die Gravitationskraft relativ zur Kiste eine andere Richtung hat. Die Vorgehensweise ist die gleiche wie bei der Kistenaufgabe.

Schritt 1:

Abbildung 5 zeigt die Skizze mit den beteiligten Körpern. Es liegt nahe, die Systemgrenzen so zu wählen, dass sie nur die Kiste umfassen.

Schritt 2:

Die äußeren Kräfte sind bis auf die Schiebekraft, die nun wegfällt, die gleichen wie in der vorangegangenen Aufgabe. In Bezug auf das eingezeichnete Koordinatensystem hat die Gewichtskraft allerdings ihre Richtung geändert.

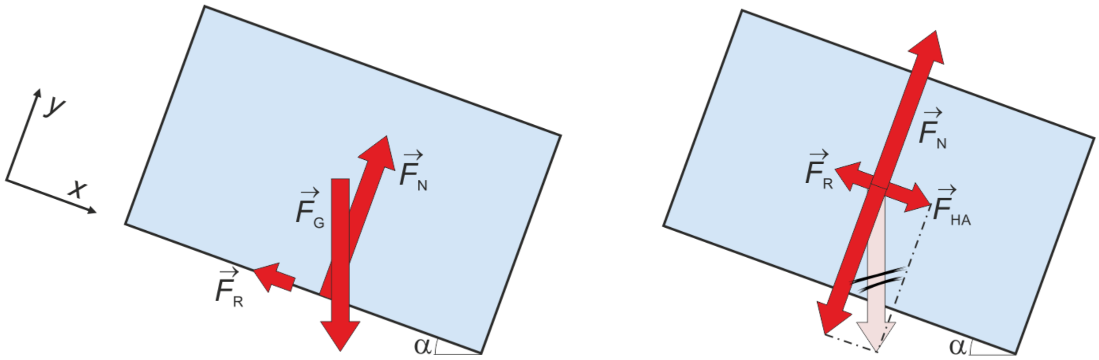


Abbildung 6: Die freigestellte Kiste auf der schiefen Ebene vor (links) und nach (rechts) der Kräftezerlegung der Gewichtskraft

Schritt 3:

Für die komponentenweise Betrachtung der newtonschen Bewegungsgleichung ist es störend, dass die Gewichtskraft schräg zu den Koordinatenachsen verläuft. Wir müssen sie in Teilkräfte parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen. Diese Zerlegung ist in Abbildung 6 rechts gezeigt. Es empfiehlt sich, die Gewichtskraft nach der Kräftezerlegung mit einem Doppelstrich „auszustreichen", damit auf den ersten Blick deutlich wird, dass sie nicht mehr beiträgt.

Für die Bewegung in *y*-Richtung, also senkrecht zur schiefen Ebene, gilt das oben Gesagte. Die Normalkraft stellt sich so ein, dass sie ebenso groß ist wie die *y*-Komponente der Gewichtskraft. Es findet keine Bewegung in *y*-Richtung statt.

Zur Bewegung in x-Richtung tragen die Reibungskraft und die Parallelkomponente der Gewichtskraft bei, die meist als „Hangabtriebskraft" bezeichnet wird. Für ihren Betrag gilt:

$$F_{\mathrm{HA}} = F_{\mathrm{G}} \ \sin \alpha .$$

Die *x*-Komponente der newtonschen Bewegungsgleichung lautet somit:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F_{\mathrm{G}} \sin \alpha - F_{\mathrm{R}} .$$

Abbildung 6 zeigt eine Situation, in der die Hangabtriebskraft etwas größer als die Reibungskraft ist. Die Kiste rutscht also in beschleunigter Bewegung die Ebene hinunter.

6 Vier neue Fragen

Die besprochenen Aufgaben konnte mit dem Lösungsschema aus Abschnitt 2 zwar relativ geradlinig gelöst werden. Sie haben aber gleich vier neue Fragen aufgeworfen, die sich dem mitdenkenden Aufgabenlöser aufdrängen. Diese Fragen stehen zwar nicht direkt im Zusammenhang mit dem Lösungsschema, sollen an dieser Stelle aber doch angesprochen werden, weil sie in vielen anderen Problemzusammenhängen ebenfalls relevant sind.

1. Warum hat F_R auf der rechten Seite von (1) ein negatives Vorzeichen?

Es gibt zwei Möglichkeiten, das Vorzeichen einer Kraft festzulegen: Entweder man trifft die Konvention, dass das Vorzeichen einer Kraft positiv ist, wenn sie so gerichtet ist wie in der jeweiligen Skizze eingezeichnet. Beim Aufstellen der Bewegungsgleichung wird dann die Richtung der Kraft durch das Vorzeichen gekennzeichnet. So ist es in Gl. (1) geschehen: Die in der Skizze nach links zeigende Reibungskraft wurde in der newtonschen Gleichung mit einem Minuszeichen berücksichtigt (ähnlich in Gl. (2) die nach unten eingezeichnete Gewichtskraft). Wenn sich in der Rechnung ein negativer Wert für eine Kraft ergibt, weiß man, dass sie anders gerichtet ist als in der Skizze eingezeichnet.

Bei der zweiten, hier nicht gewählten Möglichkeit trifft man die Konvention, dass Kräfte in positive x-Richtung (also nach rechts) immer positiv gerechnet werden. Ob eine Kraft nach links oder nach rechts gerichtet ist, kann man daran ablesen, ob sie einen negativen oder positiven Wert hat. Bei dieser Konvention darf man die (vermutete) Richtung der Kraft dann aber *nicht* mehr durch ein Vorzeichen in der newtonschen Gleichung ausdrücken. In den Bewegungsgleichungen oben stünde also vor jeder Kraft ein Pluszeichen. Der *Wert* der Kraft wäre entsprechend positiv oder negativ. Man kann sich frei für eine der beiden Möglichkeiten entscheiden, man darf sie nur nicht durcheinanderwerfen.

2. Warum heben sich Gewichtskraft und Normalkraft in Gl. (2) gerade auf?

Die vom Boden auf die Kiste wirkende Normalkraft verhindert, dass diese durch den Boden fällt. Die Normalkraft ist so groß wie die Gewichtskraft und entgegengesetzt gerichtet. Ohne sie wäre in y-Richtung die Gewichtskraft die einzige Kraft auf die Kiste, und die Kiste würde nach unten beschleunigt.

Der Wert der Normalkraft ist nicht von vornherein festgelegt, sondern stellt sich dynamisch so ein, dass an der Kiste immer Kräftegleichgewicht in y-Richtung herrscht. Erhöht man die Gewichtskraft, indem man einen schweren Stein auf die Kiste legt, wird die Normalkraft um den gleichen Betrag größer.

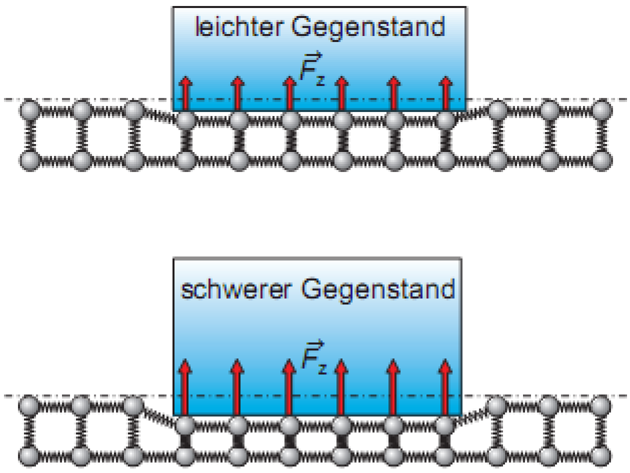


Abbildung 7: Modell für das "dynamische Sich-Einstellen" der Normalkraft (der Übersichtlichkeit halber ist die Gewichtskraft nicht eingezeichnet)
((Zeichner: $F_Z \rightarrow F_N$))

Das Zustandekommen dieses „dynamischen Sich-Einstellens“ kann man sich mit dem folgenden Modell erklären. Wir stellen uns vor, dass die Unterlage aus Teilchen zusammengesetzt ist, die durch Federn verbunden sind (Abbildung 7). Wenn wir einen leichten Gegenstand (eine leichte Kiste) auf die Unterlage stellen, werden die Federn etwas zusammengedrückt. Die Unterlage verformt sich ein wenig (oberes Bild). Die Normalkraft ist die Kraft, die die gespannten Federn von unten gemeinsam auf die Kiste ausüben. Sie ist genauso groß und entgegengesetzt gerichtet wie die Gewichtskraft der Kiste.

Entsprechendes gilt, wenn man einen schwereren Gegenstand auf die Unterlage legt. Die Federn werden weiter zusammengedrückt, und im Gegenzug üben sie auch eine größere Kraft auf den Gegenstand aus.

Kasten 1: Sich einstellende Kräfte und Bridging-Analogien

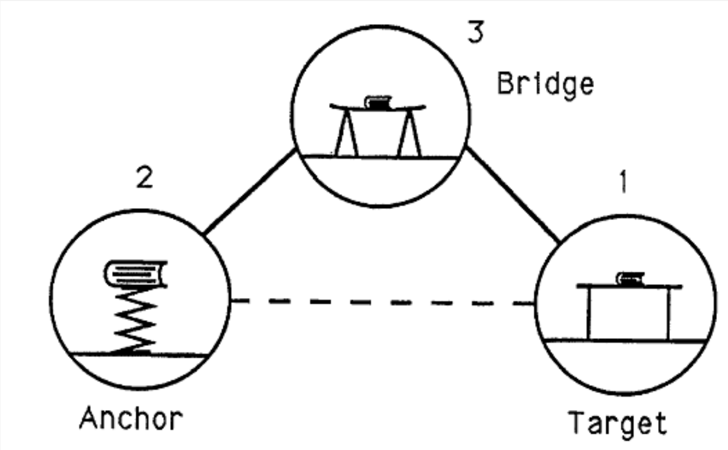


Abbildung 8: Bridging-Analogie zum Problem „Buch auf dem Tisch" (aus [10]).

Es ist eine wohldokumentierte Lernschwierigkeit [1], dass Schülerinnen und Schüler nur schwer akzeptieren, dass „passive" oder „tote" Körper Kräfte ausüben können. In den Beispielen oben bereitet die Normalkraft Probleme, die vom „passiven" Boden auf die Kiste ausgeübt wird.

Um diesen Lernschwierigkeiten vorzubeugen, schlagen Brown und Clement [10] den Einsatz von sogenannten „Bridging-Analogien" vor. Sie erläutern das Konzept anhand des Beispiels „Buch auf dem Tisch". Den Schülerinnen und Schülern soll vermittelt werden, dass der Tisch im rechten Teilbild von **Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.** eine Kraft auf das Buch ausübt (Target). Als „Anker" (Anchor) wird eine Situation gewählt, in der die Schülerinnen und Schüler das Vorhandensein einer Kraft akzeptieren: Die komprimierte Feder übt eine Kraft auf das Buch aus, weil sie „in ihre Ruhelage zurückkehren möchte". Die direkte Analogie zum Target wird jedoch abgelehnt, weil der Tisch im Gegensatz zur Feder starr ist und nicht in seine Ruhelage zurückkehren will. In einer „überbrückenden Analogie" betrachtet man daher einen flexiblen Tisch, der sich durchbiegt, wenn man ein Buch darauflegt. Diese „Brücke" erleichtert es den Schülern, die Analogie zum Anker herzustellen und zu akzeptieren, dass der Tisch wie die Feder eine Kraft auf das Buch ausübt.

3. Warum kann es im Kistenbeispiel den Fall $F_S < F_R$ nicht geben?

Der Fall $F_S < F_R$ würde zur folgenden absurden Situation führen: Die Reibungskraft ist größer als die Schiebekraft; die Kiste wird entgegengesetzt zur Schiebekraft beschleunigt. Um physikalisch zu begründen, warum es diesen Fall nicht geben kann, muss man sich mit Reibungskräften befassen.

Die *Haftreibungskraft* ist wie die Normalkraft eine Kraft, die sich dynamisch einstellt. Sie wirkt der Schiebekraft entgegen und kompensiert diese gerade. Man kann nicht im Voraus einen festen Wert für die Haftreibungskraft angeben, den man als Zahlenangabe in die newtonsche Bewegungsgleichung einsetzt. Wenn man die Schiebekraft von null bis zu einem Maximalwert kontinuierlich erhöht, steigt auch die entgegengerichtete Haftreibungskraft kontinuierlich an – bis zu einer gewissen Grenze. Die Haftreibungskraft kann einen bestimmten Maximalwert nicht überschreiten. Ist die Schiebekraft größer als der Maximalwert der Haftreibungskraft, setzt sich die Kiste plötzlich in Bewegung.

Für diesen maximalen Wert der Haftreibungskraft zwischen einem Körper und seiner Unterlage gibt es das bekannte empirische Gesetz, das oft verkürzt dargestellt wird. Korrekt lautet es:

Die Haftreibungskraft F_H zwischen einem ruhenden Körper und seiner Unterlage ist genauso groß und entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft, die parallel zur Unterlage auf den Körper wirkt. Sie kann allerdings einen bestimmten Maximalwert nicht übersteigen, der durch

$$F_{\mathrm{H,\,max}} = \mu_{\mathrm{H}}\ F_{\mathrm{N}}$$

gegeben ist. In dieser Formel ist F_N der Betrag der Normalkraft und μ_H eine Proportionalitätskonstante, der Haftreibungskoeffizient.

Wird die maximale Haftreibungskraft überschritten, bewegt sich die Kiste und die Gleitreibung setzt ein. Sie ist ebenfalls entgegengesetzt zur Schiebekraft gerichtet und gemäß der Formel $F_G = \mu_G\ F_N$ proportional zur Normalkraft.

4. Wo greift die Reibungskraft an? Wo greift die Normalkraft an?

Allgemeiner ausgedrückt: An welcher Stelle müssen die entsprechenden Kraftpfeile in die Skizze eingezeichnet werden? Spielt es überhaupt eine Rolle, wo die Kräfte angreifen? Ist es legitim, für die Reibungskraft einen einzelnen Angriffspunkt angeben? Diese Fragen nach dem Angriffspunkt von Kräften führen uns zur Mechanik ausgedehnter Systeme, die wir im folgenden Abschnitt ausführlicher ansprechen wollen.

7 Ausgedehnte Systeme und starre Körper

Darf man den Angriffspunkt einer Kraft verschieben? Bei Punktmassen stellt sich die Frage nicht, denn nach der Modellannahme besitzt der Körper nur einen Ort, an dem eine Kraft angreifen kann. Bei ausgedehnten Körpern ist das anders, und hier lautet die Antwort auf die Frage: Im Allgemeinen darf man es nicht. So beruht etwa die ganze Aussage des Hebelgesetzes gerade darauf, dass es einen Unterschied macht, ob eine Kraft mit einem langen oder einem kurzen Hebelarm angreift. Technisch gesprochen: Durch Verschieben des Angriffspunktes ändert sich im Allgemeinen das Drehmoment, das die Kraft am Körper hervorruft.

Es gibt jedoch eine genau umschriebene Ausnahme vom Verbot, den Angriffspunkt einer Kraft zu verschieben: Am starren Körper darf man eine Kraft *entlang ihrer Wirkungslinie* verschieben. Dies kann man geometrischen Argumentation veranschaulichen, die in Abbildung 9 verdeutlicht ist. Auf einen starren Körper soll die links oben eingezeichnete Kraft $\vec{F}_1$ wirken. Der starre Körper kann sich nicht verformen. Deshalb hat es keine Auswirkung, wenn man entlang der Wirkungslinie dieser Kraft zwei zusätzliche Kräfte $\vec{F}_2$und $\vec{F}_3$angreifen lässt, die gleich groß und entgegengesetzt gerichtet sind (für einen deformierbaren Körper gilt das nicht; er würde durch die beiden Kräfte verformt werden).

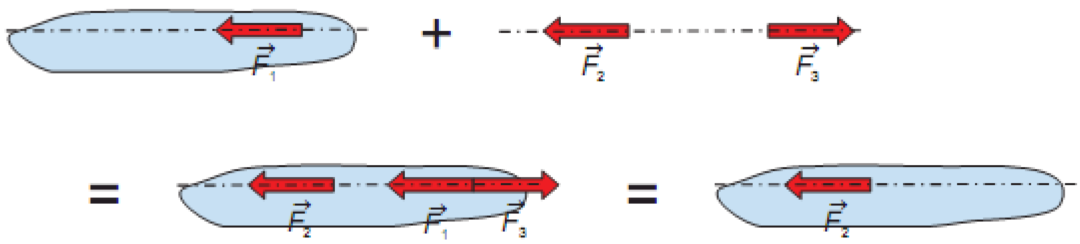


Abbildung 9: Am starren Körper darf man eine Kraft in Richtung ihrer Wirkungslinie verschieben

Die beiden an einem Punkt angreifenden, entgegengesetzt gerichteten Kräfte $\vec{F}_1$und $\vec{F}_3$ heben sich in ihrer Wirkung gegenseitig auf, so dass am Ende nur noch $\vec{F}_2$ übrig bleibt. Diese Kraft ist aber nichts anderes als die ursprüngliche Kraft $\vec{F}_1$, entlang ihrer Wirkungslinie verschoben. Das Verschieben entlang der Wirkungslinie ändert also beim starren Körper nicht die Wirkung der Kraft.

In den Abschnitten 4 und 5 haben wir von dieser Regel Gebrauch gemacht. Wir haben die Kiste als starren Körper aufgefasst und die Reibungskraft, die eigentlich entlang der gesamten Unterseite angreift, zu einer einzelnen Kraft zusammengefasst. Da ihre Wirkungslinie entlang der Kistenunterseite verläuft, spielt es keine Rolle, an welcher Stelle wir sie einzeichnen.

Eine Kraft, die nicht am Schwerpunkt angreift, erzeugt ein Drehmoment. Sie verursacht somit eine Kombination aus Translations- und Rotationsbewegung. Ihre Wirkung kann man sich mit der folgenden Argumentation veranschaulichen

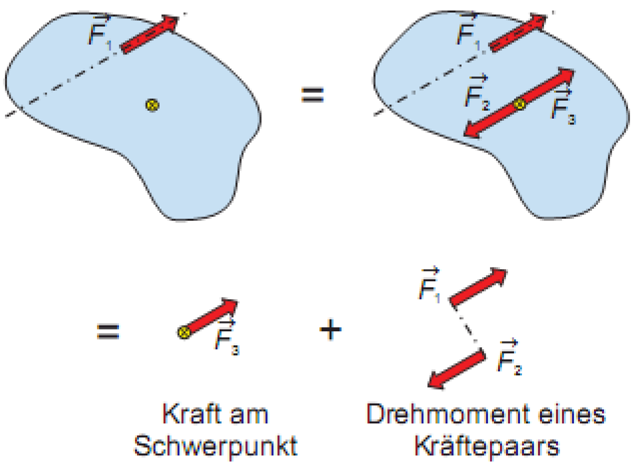


Abbildung 10: Wirkung einer Kraft, die nicht am Schwerpunkt angreift

Wir betrachten den Körper in Abbildung 10, an dem die Kraft $\vec{F}_1$ angreift. Wieder addieren wir ein wirkungsloses Paar von Kräften $\vec{F}_2$ und $\vec{F}_3$, die beide am Schwerpunkt angreifen. Nun teilen wir die drei Kräfte gedanklich auf wie in der Abbildung unten gezeigt. Die Kraft $\vec{F}_3$greift am Schwerpunkt an und ruft eine Translationsbewegung ohne Rotationsbewegung hervor. Das Kräftepaar $\vec{F}_1$und $\vec{F}_2$dagegen hat keine Auswirkung auf die Translationsbewegung des Körpers, erzeugt aber ein Drehmoment. Mit dieser gedanklichen Aufteilung lässt sich Translations- und Rotationsbewegung getrennt untersuchen, und man erhält die beiden Grundgesetze für die Bewegung ausgedehnter Systeme:

1. Für die Bewegung des Schwerpunkts eines ausgedehnten Systems gilt die newtonsche Bewegungsgleichung:
$$m\,\frac{d^2\vec{r}_S}{dt^2} = \vec{F}.$$
Dabei bezeichnet $\vec{r}_S$ den Ort des Schwerpunkts und $\vec{F}$ die Summe aller äußeren Kräfte. Diese Formulierung der newtonschen Bewegungsgleichung wurde bereits in Abschnitt 2 gegeben. Wie schon dort erwähnt, gilt sie in Strenge auch für ausgedehnte Systeme.
2. Das Drehmoment $\vec{M}$, das die äußeren Kräfte an einem ausgedehnten System erzeugen, ändert dessen Drehimpuls $\vec{L}$ gemäß:
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.$$
Speziell gilt in der Statik, wo die Körper nicht rotieren, dass die Summe aller Drehmomente null sein muss.

Entsprechend wurden die Kräfte in Abbildung 4 und Abbildung 6 so eingezeichnet, dass ihr Gesamtdrehmoment null ergibt. Die Normalkraft in Abbildung 4 wurde etwas rechts von der Gewichtskraft gezeichnet, so dass die beiden ein Kräftepaar bilden, dessen Drehmoment gerade das Drehmoment von Schiebe- und Reibungskraft kompensiert. Ebenso wurde beim Übergang vom linken zum rechten Teilbild in Abbildung 6 die Kräfte so verschoben, dass das Gesamtdrehmoment null erhalten bleibt.

Die Drehmomentbetrachtungen beim Schieben der Kiste sind nicht nur theoretischer Natur, sondern haben ganz praktische Auswirkungen. Wenn der Arbeiter die Kiste über einen langen Zeitraum schiebt und dabei immer links oben angreift, wird sie sich auf der Unterseite rechts stärker abnutzen. Mit seiner Schiebekraft erzeugt er nämlich ein Drehmoment im Uhrzeigersinn. Dies sorgt dafür, dass die Beiträge zur Normalkraft sich nicht wie in Abbildung 7 homogen über die Unterseite der Kiste verteilen. Sie sind rechts größer als links. Die Wirkungslinie der Normalkraft verläuft daher rechts vom Schwerpunkt, wie es in Abbildung 4 eingezeichnet ist. Da die Reibungskraft durch die Normalkraft bestimmt ist, nimmt deren Flächendichte ebenfalls nach rechts zu – was zur Folge hat, dass sich die Kiste dort stärker abnutzt.

8 Zusammenfassung

Aufgaben aus der Mechanik lassen sich leichter lösen, wenn man sie auf systematische Weise angeht. In diesem Artikel wurde ein Schema vorgestellt, das durch seine Klarheit und Einfachheit vielen Problemen schon im Ansatz vorbeugt. Wesentlich ist dabei das Abgrenzen des Systems von seiner Umgebung und das „Freistellen“ der betrachteten Körper. Einige Verständnisprobleme zu den Grundbegriffen der Mechanik konnten in den Beispielen angesprochen werden. Auf andere, wie z. B. die Schwierigkeiten mit dem dritten newtonschen Gesetz (Kraft und Gegenkraft), mit den sogenannten Schein- und Trägheitskräften, mit Zentrifugal- und Zentripetalkräften konnte dagegen nicht eingegangen werden. Eine erschöpfende Behandlung ist in einem Zeitschriftenartikel nicht möglich und muss den Lehrbüchern (z. B. [9]) vorbehalten bleiben.

Literatur

[1] R. Müller, R. Wodzinski, M. Hopf, Schülervorstellungen in der Physik, Köln:Aulis (2004).

[2] J. Gerdes, H. Schecker, Der Force Concept Inventory – ein diagnostischer Test zu Schülervorstellungen in der Mechanik, MNU 52/5, S. 283-288 (1999).

[3] J. W. Warren. Verständnisprobleme beim Kraftbegriff. Übersetzt von U. Backhaus und T. Schneider, zugänglich unter www.uni-muenster.de/imperia/md/Fcontent/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/warren.pdf

[4] C. Waltner, V. Tobias, H. Wiesner, M. Hopf, T. Wilhelm, Ein Unterrichtskonzept zur Einführung in die Dynamik in der Mittelstufe, PdN/PhiS 7/59, S. 9-22 (2010) und andere Beiträge in diesem Heft.

[5] C. Waltner et al., Einführung in die Mechanik, zugänglich unter: www.physik.uni-wuerzburg.de/~wilhelm/2dd.htm

[6] V. Tobias et al., Dynamischer Mechanikunterricht – Ergebnisse einer quantitativen Vergleichsstudie, PhyDid B (2010), zugänglich unter: www.phydid.de/index.php/phydid-b/article/view/111/130

[7] vgl. z. B. J. u. H. Dankert, Technische Mechanik, Wiesbaden: Vieweg + Teubner (2011).

[8] A. P. French, Newtonsche Mechanik, Berlin: de Gruyter (1996).

[9] R. Müller, Klassische Mechanik – vom Weitsprung zum Marsflug, Berlin: de Gruyter (2009).

[10] D. E. Brown, J. Clement, Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction, Instructional Science, **18**, S. 237-261 (1989).

Kurzfassung:

Aufgaben aus der Mechanik lassen sich leichter lösen, wenn man sie auf systematische Weise angeht. Im Artikel wird eine bewährte Strategie zur Lösung mechanischer Probleme vorgestellt. Wesentlich ist dabei das Abgrenzen des Systems von seiner Umgebung und das „Freistellen" der betrachteten Körper. Vielen Problemen bei der Lösung mechanischer Aufgaben wird durch die systematische Vorgehensweise schon im Ansatz vorbeugt